

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. BG: 2

168N25

Ac. No. 2432

Date of release for loan

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of one anna will be charged for each day the book is kept overtime.



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بی۔ اے۔ کے کے

تخلیسی

(کوادرڈی نیٹ جو مٹری، گریس اینڈ روزنگ)

مُتَرَجِم

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے

پروفیسر ریاضیات کلیہ جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

۱۳۳۲ھ ۱۳۳۲ھ ۱۹۴۲ء

کتاب الطبع جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

فہرست مضامین

ہند تھیل

صفحہ	مضمون
۱ - ۷۴	حصہ اول، خط مستقیم قائم اور مائل محور۔ خط مستقیم کی مساوات۔ خطوط اولاً + ۲۷ لاماب + ب مائے۔ کے متعلق مسائل۔ دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ۔ محوروں کی تبدیلی۔ نئے اور پرانے محوروں کا خطی ربط۔ محوروں کی تبدیلی سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔ غیر متغیر۔ آزمائشی پرچہ۔
۷۴ - ۱۷۸	حصہ دوم، دائرہ اور مخروطی تراشیں باب اول۔ دائرہ کی مساوات۔ وتر اور مماس۔ مماس ہونے کی شرط۔ باب دوم۔ دائرہ کا قطب اور قطبی۔ مماس کا طول بنیادی محور۔ مماسوں کے جوڑے کی مساوات۔ تقییب آزمائشی پرچہ۔

۶۲ - ۴۴	باب سوم - مکانی - بنانے کی آلی ترکیب - مساوات ما ^۲ = لا ^۲ - اصلی محوروں کے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات - درجہ دوم کی رقبہیں مربع کامل بناتی ہیں - مکانی کا محاسن
۶۲	آزمائشی پرچہ باب چہارم - قطع ناقص - مساوات $\frac{لا^2}{ب^2} + \frac{ب^2}{ا^2} = ۱$ ناقص کی شکل اصلی محوروں کے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات - قطبی مساوات ماسکی فاصلوں کا مجموعہ بنانے کی آلی ترکیب - دائرہ ناقص کی انتہائی صورت ہے - ناقص کا محاسن - ناقص کے لئے شرط $ا > ب$ ہے
۸۵ - ۶۴	باب پنجم - قطع زائد - مساوات $\frac{لا^2}{ب^2} - \frac{ب^2}{ا^2} = ۱$ زائد کی شکل - ان محوروں کے لحاظ سے مساوات جو اصلی محوروں کے متوازی ہوں - ماسکی فاصلوں کا فرق - بنانے کی آلی ترکیب - زائد کا محاسن - متقاربوں کی مساوات - قائم زائد - زائد کے لئے شرط $ا > ب$ ہے - مساوات لا ^۲ = ا ^۲ - (لا + ب) جبکہ متقاربوں کو محور مانا جائے -
۱۱۳ - ۸۶	آزمائشی پرچہ ۲
۱۱۳	باب ششم - درجہ دوم کی عام مساوات - مرکز کے لحاظ سے مساوات نصف محوروں کی مساواتیں اور طول متساوی -
۱۳۸ - ۱۱۵	باب ہفتم - عام مساوات سے ناقصوں کا مرسم کرنا
۱۴۶ - ۱۳۹	باب ہشتم - عام مساوات سے زائدوں کا مرسم کرنا
۱۵۳ - ۱۴۷	

۳۷۹-۳۵۲	باب ہندوہم - مخروطیوں کے نظام - س + ک سی = س + ک سی = کی تعبیر - محوروں کو مس کر نیوالی مخروطی کماسوں کی مشترک مساوات - ہم ماسکہ مخروطیاں
۳۹۶-۳۸۰	باب نوزدہم - لغات - مدن + مدتی + ر = .
۴۲۲-۳۹۷	باب ہستم - موسیقی تقسیم - موسیقی صغیر اور پیشلیں کمل ذواربعہ الاضلاع اور اس کی موسیقی خاصیتیں -
۴۲۲	آزمائشی پرچہ ۶
۴۳۳-۴۲۵	باب ہستم ویکم - چلیبی نسبتیں - صغیر اور پیشلیں
۴۵۷-۴۳۴	پاسکل کا مسئلہ - دریچا -
۴۹۸-۴۵۸	سوالات کے پرچے - جوابات -

ہند تحلیلی

حصہ اول

خط مستقیم

۱۔ محدود۔ جبر مقابلہ کے اصولوں کو جب نقاط، خطوط اور اشکال کے ہندسہ میں استعمال کیا جاتا ہے تو اسے ہندسہ تحلیلی کہتے ہیں اور اگر یہ نقاط خطوط وغیرہ ایک ہی سطح میں واقع ہوں تو یہ مستوی ہندسہ تحلیلی کہلاتا ہے۔ چونکہ تمام ترکیبیں جن کا آئندہ ذکر ہوگا صرف اس بات پر مبنی ہیں کہ خطوط کے طولوں کو

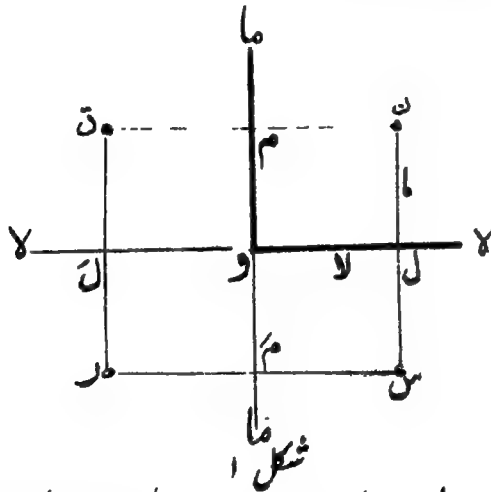
اعداد اور حروف جبر یہ سے تعبیر کیا جائے اس لئے تمام صورتوں میں ہمیں ایک ایسی اکائی منتخب کرنی چاہئے جس کی رقوم میں باقی تمام طول بیان ہو سکیں۔ پس اگر ایک فٹ کو اکائی قرار کریں تو ۵ فٹ کو عدد ۵ تعبیر کر سکتے گا۔

اگر ایک سطح میں ایک نقطہ کا مقام متعین کرنا مقصود ہو تو یہ ضرور ہے کہ اس سطح میں چند نقطے یا خط ثابت کر لئے جائیں اور بلحاظ ان کے نقطہ مذکورہ کے مقام کا تعین کیا جائے ایسا کرنے کی سب سے آسان ترکیب یہ ہے کہ ہم اس نقطہ کے مقام کو دو ثابت خطوط مستقیم کی طرف منسوب کریں جو باہم متقاطع علی القوائم ہوں۔

فرض کرو کہ ولا (وما) (شکل ۱) دو ثابت خطوط مستقیم ہیں جو ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں اور نقطہ ن کا مقام متعین کرنا مقصود ہے ن کو ولا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ولا سے ل پر ملتا ہے۔ اب نقطہ و سے ن تک جلتے میں ہیں فاصلہ ول خط ولا پر اور فاصلہ لن خط و ما کے متوازی ملے کر ناپڑتا ہے، پس اگر ہمیں ول اور لن کے طول معلوم ہو جائیں تو

ہم نقطہ ن کا مقام سطح مذکورہ میں ثابت کر سکتے ہیں۔
ان دو طولوں کو کارٹیزیائی قائم محدود یا اختصاراً نقطہ ن کے محدود کہتے ہیں،
ول نقطہ ن کا فاصلہ کہلاتا ہے اور ل ن معین، نیز خطوط ولا اور وما
کو محور اور نقطہ و کو مبدا کہتے ہیں۔

اگر ول میں طول کی لا اکائیاں ہوں اور ل ن میں ما اکائیاں یعنی اگر نقطہ ن کا فاصلہ
لا اور معین ما ہو تو ن کو نقطہ (لا، ما) سے موسوم کرتے ہیں، ولا کو لا کا محور
اور وما کو ما کا محور کہتے ہیں۔



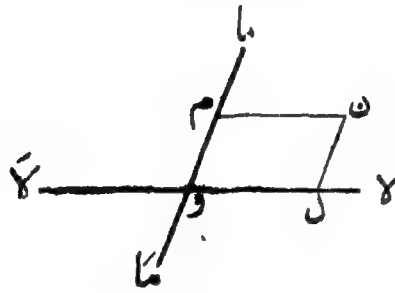
اگر ہم ول اور ل ن کے طولوں میں بالترتیب کل اکائیوں کی تعداد بھی معلوم ہو جائے
تو بھی ن کا مقام پورے طور پر متعین نہیں ہو سکتا کیونکہ ہمیں یہ ضرور معلوم ہونا چاہئے کہ
ول نقطہ و کے کس طرف کھینچا گیا ہے، دائیں طرف یا بائیں طرف، نیز ل ن نقطہ
ل سے اوپر کی طرف کھینچا گیا ہے یا نیچے کی طرف۔

ہم ان خطوط کی سمتوں کو نقطہ ن کے محدودوں کی علامات سے تعبیر کریں گے اور اس
جگہ ہم اس حسابی دستور کو اختیار کرتے ہیں جو علمہ ثلث میں مروج ہے۔ یعنی جب
ول نقطہ و سے دائیں طرف کو کھینچا جائے تو اسے مثبت خیال کرتے ہیں اور اگر یہ و
سے بائیں طرف کو کھینچا جائے تو منفی خیال کرتے ہیں، نیز اگر ل ن نقطہ ل سے
اوپر کی طرف کھینچا گیا ہو تو اسے مثبت خیال کرتے ہیں اور اگر نیچے کی طرف کھینچا گیا ہو تو

متقی۔ دوسرے الفاظ میں نقطہ کے دائیں طرف جتنے نقاط ہوں ان کے فصلوں کو مثبت خیال کرتے ہیں اور بائیں طرف کے نقاط کے فصلوں کو منفی نیز نقطہ کے اوپر جتنے نقاط ہوں ان کے معینوں کو مثبت شمار کرتے ہیں اور نیچے کے نقاط کے معینوں کو منفی۔

شکل میں خطوط ولا اور و ما کے اندر جو خانہ گھرا ہوا ہے اس کو مثبت راج کہتے ہیں کیونکہ ان تمام نقاط کے فصلے اور معین جو اس خانہ میں واقع ہیں مثبت ہیں مائل محور۔ بعض اوقات یہ زیادہ سودمند ہوتا ہے کہ ایک نقطہ مفروضہ کا مقام بلحاظ مائل محوروں کے (جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ نہ بناتے ہوں) متعین کیا جائے۔

اگر ولا اور و مائل محور ہوں اور ن نقطہ مفروضہ ہو تو ن ل کو



شکل ۲

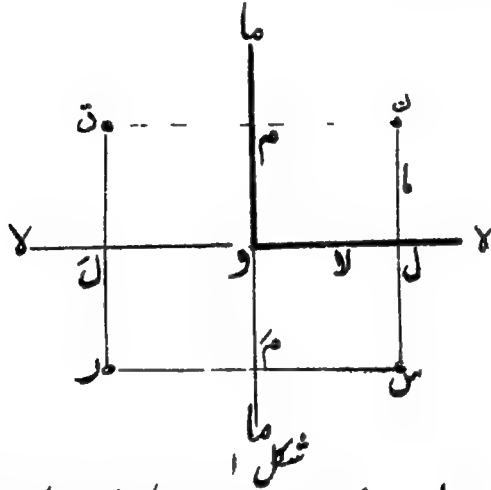
و ما کے متوازی کھینچو ولا سے نقطہ ل پر ملے۔ تب و ل نقطہ ن کا فصلہ ہے اور ل ن معین، یاد رہے کہ اس صورت میں بھی علامات کے متعلق ہم وہی حسابی دستور قائم رکھیں گے جو ہم نے قائم محوروں کے لئے اختیار کیا ہے۔ ہم زاویہ لا و ما کو خطوط ولا اور و ما کے اندر گھرا ہوا ہے سہ سے تعبیر کریں گے اور یہ زاویہ قائمہ سے بڑا یا چھوٹا ہو سکتا ہے۔

۲۔ دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ ان کے محدود کی رقوم میں دریافت کرو۔
قائم محور

فرض کرو کہ نقاط مفروضہ ن (لا، ما) اور ق (لا، ما) ہیں، معین

ہم نقطہ ن کا مقام سطح مذکورہ میں ثابت کر سکتے ہیں۔
ان دو طولوں کو کارٹیشی قاطم محدود یا اختصاراً نقطہ ن کے محدود کہتے ہیں،
ول نقطہ ن کا فضلہ کہلاتا ہے اور ل ن معین، نیز خطوط ولا اور و ما
کو محور اور نقطہ و کو مبدا کہتے ہیں۔

اگر ول میں طول کی لا اکائیاں ہوں اور ل ن میں ما اکائیاں یعنی اگر نقطہ ن کا فضل
لا اور معین ما ہو تو ن کو نقطہ (لا، ما) سے موسوم کرتے ہیں، ولا کو لا کا محور
اور و ما کو ما کا محور کہتے ہیں۔



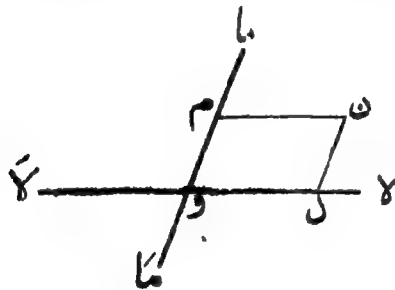
اگر ول اور ل ن کے طولوں میں باشریب کل اکائیوں کی تعداد بھی معلوم ہو جائے
تو بھی ن کا مقام پورے طور پر متعین نہیں ہو سکتا کیونکہ ہمیں یہ ضرور معلوم ہونا چاہئے کہ
ول نقطہ و کے کس طرف کھینچا گیا ہے، دائیں طرف یا بائیں طرف، نیز ل ن نقطہ
ل سے اوپر کی طرف کھینچا گیا ہے یا نیچے کی طرف۔

ہم ان خطوط کی سمتوں کو نقطہ ن کے محدودوں کی علامات سے تعبیر کریں گے اور ایس
جگہ ہم اس حسابی دستور کو اختیار کرتے ہیں جو علامت نشانی میں مروج ہے۔ یعنی جب
ول نقطہ و سے دائیں طرف کو کھینچا جائے تو اسے مثبت خیال کرتے ہیں اور اگر یہ و
سے بائیں طرف کو کھینچا جائے تو منفی خیال کرتے ہیں، نیز اگر ل ن نقطہ ل سے
اوپر کی طرف کھینچا گیا ہو تو اسے مثبت خیال کرتے ہیں اور اگر نیچے کی طرف کھینچا گیا ہو تو

متنی۔ دوسرے الفاظ میں نقطہ و کے دایمیں طرف جتنے نقاط ہوں ان کے فصلوں کو مثبت خیال کرتے ہیں اور بائیں طرف کے نقاط کے فصلوں کو منفی نیز نقطہ و کے اوپر جتنے نقاط ہوں ان کے معینوں کو مثبت شمار کرتے ہیں اور نیچے کے نقاط کے معینوں کو منفی۔

شکل میں خطوط ولا اور و ما کے اندر جو خانہ گھرا ہوا ہے اس کو مثبت ربع کہتے ہیں کیونکہ اُن تمام نقاط کے فصلے اور معین جو اس خانہ میں واقع ہیں مثبت میں داخل محوّر۔ بعض اوقات یہ زیادہ سودمند ہوتا ہے کہ ایک نقطہ مفروضہ کا مقام بلحاظ "مائل محوروں" کے (جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ نہ بناتے ہوں) متعین کیا جائے۔

انگڑ والا اور و ماائل مجاہدوں اور ن فقط مفروضہ ہو تو ن ل کو

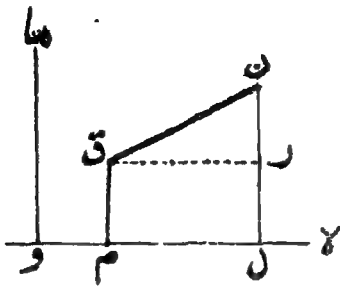


شکل ۲

و ما کے متوازی کھینچو جو لا سے نقطہ ل پر ملے۔ تب ول نقطہ ن کا
فصلہ ہے اور ل ن معین، یاد رہے کہ اس صورت میں بھی علامات کے متعلق
ہم وہی حسابی دستور قائم رکھیں گے جو ہم نے قائم محوروں کے لئے اختیار کیا ہے۔
ہم زاویہ لا و ما کو جو خطوط لا اور و ما کے اندر گھرا ہوا ہے سہ
سے تعبیر کریں گے اور یہ زاویہ قائمہ سے بڑا یا چھوٹا ہو سکتا ہے۔

۲۔ دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ ان کے محوروں کی رقوم میں دریافت کرو۔
 قائم محور

فرض کر دو کہ نقاط مقروضہ ن (لا، ما) اور ق (لا، ما) میں معین



شکل ۳

ن ل اور ق م کھینچو نقطہ
ق میں سے ق ر خط و لاکے
متوازی کھینچو جو ن ل یا
ن ل ممدودہ سے لقطہ ر پر
پڑے۔

تب ن ق = ق ل + ر ن

(اقلیدس ص ۱۷۷، اش ۴)

ق ر = ول - و م = لا - لا_۱

ر ن = لن - لم ق = ما - ما_۱

ن ق = (لا - لا_۱) + (ما - ما_۱) (۱)

اگر نقطہ ق مبدأ ہو تو لا = ۰، ما = ۰ اور اس لئے ون = لا + ما
مائل محور سے اس صورت میں بھی عمل وہی ہے، صرف اس فرق کا خیال رکھا جائے کہ
خط و لاکہ پر نمود نہیں ہیں، پس

ن ق = ق ل + ر ن - ۲ ق ر لن × جم ق ر ن

بوجب سابق ق ر = لا - لا_۱ اور ر ن = ما - ما_۱

نیز تراویہ ق ر ن = π - سہ اسلئے

ن ق = (لا - لا_۱) + (ما - ما_۱) + ۲ (لا - لا_۱) (ما - ما_۱) جم سہ (۲)

نتیجہ صریح - ون = لا + ما + ۲ لا ما جم سہ

نوٹ - اگر نقطہ ق مثبت ربع میں واقع نہ ہو تو لا یا ما یا یہ دونوں منفی ہوں گے،

طالب علم کو شکیں کھینچ کر اس کی تصدیق کرنی چاہئے کہ ہر صورت میں

ق ر = لا - لا_۱ اور ر ن = ما - ما_۱ اگر طولوں کی چہرہ علامات کا لحاظ رکھا جائے

مشقیں

ذیل کی مشقوں اتانم اور ۸ میں محور تاغم ہیں۔

۱- ایک بچہ کو طول کی اکائی مان کر نقاط ذیل کے مقامات کو شکل میں تعبیر کرو۔

(۱) (۰، ۰) (۲) (۱، ۰) (۳) (۰، ۰) (۴) (۰، ۱) (۵) (۱، ۱)

نتیجہ صریح۔ خط ن ق کے نقطہ تقصیف کے محدود ہیں

$$\left(\frac{لا + لام}{۲} ، \frac{۱۱ + ۱۲}{۲} \right)$$

(۲) خارجی تقسیم یعنی جب نقطہ ر خط ن ق محدودہ پر دائیں یا بائیں جانب کہیں واقع ہو۔ اگر ر خط ن ق کو خارجاً نسبت ص : ص_۱ سے تقسیم کرے تو

$$\frac{ن}{ر} = \frac{۱۳}{۲۳}$$

اب ن ر = - ر ق جبراً لحاظ سے

$$\frac{ن}{ر} = - \frac{۱۳}{۲۳}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر خارجی تقسیم کے لحاظ سے ر کے محدود مطلوب ہوں تو مندرجہ بالا جملات میں ہمیں صرف ص کی علامت بدل دینی چاہئے پس

$$لا = \frac{۱۳ - ۱۲}{۲۳} ، لا = \frac{۱۳ - ۱۲}{۲۳} ، لا = \frac{۱۳ - ۱۲}{۲۳} ، لا = \frac{۱۳ - ۱۲}{۲۳} ، لا = \frac{۱۳ - ۱۲}{۲۳} \dots (۴)$$

نئی شکل کھینچ کر طالب علم اس کی تصدیق کرے۔

یاد رہے کہ مندرجہ بالا نتائج قائم اور مائل ہر دو اقسام کے محاور کی صورت میں درست ہیں
مثال ۱۔ نقاط (۱-۴) ، (۲-۳) کے ملائیوائے خط کو ایک نقطہ نسبت ۵:۶ سے خارجاً تقسیم کرتا ہے، اس کے محدود دریافت کرو۔

خارجی تقسیم کے لئے جو ضابطہ اوپر مندرج ہے اس کو استعمال کرنے سے محدود ہیں
۶ - (۳) - ۵ (۱) ، ۶ - (۲) - ۵ (۴) - ۳ یعنی ۳۲ ، ۲۳

مثال ۲۔ اقلیدس ص ۶ ش ۳ کے نتیجہ کو ہانگر نسبت کر دو کہ ایک مثلث کے ناویوں کے داخلی منصف ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا (لا، ۱۱) ، ب (لام، ۱۲) ، ج (لام، ۱۳) ایک مثلث کے رأس ہیں نیز فرض کرو کہ اضلاع ب ج ، ج ا ، ا ب کے طول ا ، ب ، ج

$$م (\frac{ب + ل + ج + لا}{ج + لا}) + م ل$$

تساؤل ہو سب سے پہلے ہم م کو ب + ج کے مساوی لیتے ہیں تاکہ شمار کنندہ کسور سے خالی ہو جائے، اب چونکہ شمار کنندہ میں لا، کا سرب ہے اور لا، کا ج اس لئے ہم م کو ل کے مساوی منتخب کرنا چاہئے۔
اب شمار کنندہ متساؤل ہے اور نسبت نما ل + ب + ج کے مساوی ہے اسلئے یہ بھی متساؤل ہے، پس معلوم ہوا کہ نسبت ب + ج : ل کا انتخاب محض اتفاقی نہیں ہے۔

مشقیں

۹۔ ایک نقطہ نقاط (۷، ۴) اور (۶، ۵) کے ملانے والے خط کو نسبت ۵:۴ سے داخل تقسیم کرتا ہے، اس کے محدود دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک نقطہ نقاط (۶، ۳) اور (۴، ۲) کے ملانے والے خط کو خارجاً نسبت ۵:۴ سے تقسیم کرتا ہے، اس کے محدود دریافت کرو۔

۱۱۔ معلوم کرو کہ محور لا نقاط (۶، ۴) (۱، ۷) کے ملانے والے خط کو کس نسبت سے تقسیم کرتا ہے [نسبت م:م ایسی معلوم کرو کہ م کی قیمت صفر ہو]

۱۲۔ نقاط (لا، لا) اور (لا، لا) کے ملانے والے خط کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے، نقطہ (لا، لا) سے شروع ہو کر جو ل، والے نقطہ تقسیم ہے اس کے محدود معلوم کرو۔

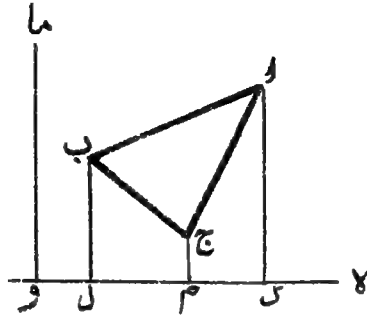
۱۳۔ اگر ایک مثلث کے اضلاع ب ج، ج ل، ل ب کے نقاط منصف د، ع، ف ہوں اور اگر ل، ب، ج کے محدود بالترتیب (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا) ہوں تو ثابت کرو کہ د، ب، ع، ج، ف ایک ایسے نقطہ شہر ملتے ہیں جس کے محدود لا + لا + لا، لا + لا + لا، لا + لا + لا ہیں (ہم جانتے ہیں کہ

نقطہ ش مثلث کا مرکز ثقل ہے)

۱۴۔ مثلث کا رقبہ اس کے رأسوں کے محدودوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

قاعدہ محور۔ فرض کرو کہ ل، ب، ج کے محدود بالترتیب (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا) ہوں

(لام، ماہ) ہیں، معین اوک، بل، ج م کھینچو، تب



منسل ۶

ا ب ج = منحرف ب ک - منحرف ب م - منحرف ج ک

ا ب منحرف ب ک = ا ب ل ک + ا ب ا ک

$$\frac{1}{4} ل ک (ل ب + ک ا) =$$

$$\frac{1}{4} (لام - لام) (لام + ماہ) =$$

باقی رقبوں کو اسی طرح تخیل کرنے سے

$$\Delta ا ب ج = \frac{1}{4} (لام - لام) (لام + ماہ) - لام ماہ + لام ماہ - لام ماہ (۵)$$

یہاں ہم نے مثلث کے رأسوں کو گھڑسی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں لیا ہے، اگر انہیں سوئیوں کی سمت میں لیا جائے تو مساوات (۵) سے رقبہ حاصل کرنے کیلئے اس کے بائیں رکن کی علامت تبدیل کرنی چاہئے۔

نتیجہ صریح - مثلث ا ب و کا رقبہ = $\frac{1}{4} (لام - لام) (لام + ماہ)$

$$\frac{1}{4} = \frac{لام}{لام} \frac{ماہ}{لام}$$

اس صورت میں مثلث کے رأسوں 'ا'، 'ب'، و کو مخالف سمت ساعت لیا گیا ہے۔

پس مساوات (۵) کی ہندسی تعبیر ہے

$$\Delta ا ب ج = \Delta و ا ب - \Delta و ج ب + \Delta و ج ا$$

مائل محور - بناوٹ اور عمل ہی ہے جو اوپر ہوا، فرق صرف یہ ہے کہ ہمیں خط و کواچر

عمود نہیں ہیں۔

 Δ ب ل ک = $\frac{1}{4}$ ب ل x عمود نقطہ ک سے خط ب ل پر $\frac{1}{4}$ ب ل x ل ک جب سہ

اور اسی طرح دوسرے رقبوں کے لئے۔ پس مائل محوروں کی صورت میں یہ فرق ہے کہ رقبہ کی تمام رقومیں جب سہ شامل ہوتا ہے۔

 Δ و ب ج = $\frac{1}{4}$ { ل ا م + ل ا م + ل ا م + ل ا م + ل ا م + ل ا م } جب سہ جہاں رأسوں کو حسب سابق مخالفت سمت لیا گیا ہے، مساوات ذہن تو یاد رکھنا چاہئے۔

مثال۔ ایک ذواربعۃ الاضلاع کے رأسوں و ب ج د کے محد و مخالف سمت ساعت (ل ا م)، (ل ا م)، (ل ا م)، (ل ا م)، (ل ا م)، (ل ا م) ہیں، ثابت کر دو کہ قائم محوروں کی صورت میں اس کا رقبہ

 $\frac{1}{4}$ { ل ا م + ل ا م + ل ا م + ل ا م + ل ا م + ل ا م + ل ا م + ل ا م + ل ا م + ل ا م } ہے لیکن اگر مائل ہوں تو اوپر کے جملہ میں ہمیں جب سہ کا بطور جزو ضربی اضافہ کر دینا چاہئے، کیونکہ ذواربعۃ الاضلاع کا کل رقبہ مثلثات و ب ج اور ب ج د کے رقبوں کے مجموعہ کے برابر ہے)

مشقیں

۱۴۔ نقاط ذیل کو ملانے سے جو مثلث بنتے ہیں ان کے رقبے دریافت کرو۔

(ا) (۰، ۳)، (۱، ۲)، (۲، ۱)

(ب) (۰، ۰)، (۰، ۱)، (۱، ۱)

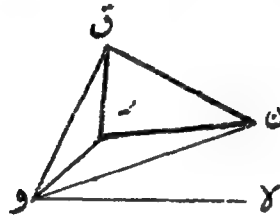
(ج) (۰، ۰)، (۰، ۱)، (۱، ۱)

۱۵۔ ایک ذواربعۃ الاضلاع کے رأس

(۱، ۱)، (۱، ۳)، (۳، ۳)، (۳، ۱)

اس کا رقبہ دریافت کرو۔

تب $ن ق' = ون' + وق' - ۲ون \times وق$ جم $ن وق$
 $ن ق' = ۱ + ۲ - ۲ = ۱$ (طہ - طہ) (۱۱)
 مثال ۱۷۔ اس ضابطہ کو کارٹینزی قائم ضابطہ سے حاصل کرو۔
 ۸۔ ایک مثلث کا رقبہ اس کے رأسوں کے قطبی محدودوں کی رقوم میں دریافت کرو۔



شکل ۱۰

فرض کرو کہ $ن (ر، طہ)$ ، $ق (ر، طہ)$ ، $و (ر، طہ)$
 مثلث کے رأس ہیں جن کو مخالف سمت ساعت یا گیا ہے، نیز نقطہ $ر$
 مثلث $ن وق$ کے اندر واقع ہوتا ہے

$$\Delta ن ق ر = \Delta ن وق - \Delta ر وق - \Delta و ر ق$$

$$\Delta ن وق = \Delta ن وق \times جب ن وق$$

$$= \frac{۱}{۲} ر ر جب (طہ - طہ)$$

باقی رقبوں کو اسی طرح بحول کرنے کے بعد

$$\Delta ن وق = \frac{۱}{۲} ر ر جب (طہ - طہ) + \frac{۱}{۲} ر ر جب (طہ - طہ)$$

طالب علم کو رأسوں کے مختلف مقامات کے لئے شکلیں کھینچنے سے اس ضابطے کی تصدیق کرنی چاہئے
 (۱۲)

مشقیں

۱۸۔ چھ نقاط ذیل کے قطبی محدودے ہوئے ہیں ان کے قائم محدود معلوم کرو نیز نقطوں کو
 شکل میں دکھاؤ

$$(۱) ۲۸، ۲۵ (ب) - ۲۸، ۲۷ (ج) ۳۸ - ۲۷$$

حرکت کرنے سے مراد کہ ایک غیر متبدل جبر یہ ربط ہوتا ہے جس کو منحنی کے ہر ایک نقطہ کے محدود پورا کرتے ہیں اس جبر یہ ربط کو منحنی کی مساوات کہتے ہیں۔ اور برعکس اس کے ہر ایک ایسی جبر یہ مساوات کے جواب میں جس کے ذریعہ ایک متحرک نقطہ کے محدود باہم مربوط ہوں ایک منحنی ہوتا ہے جس پر یہ نقطہ ہمیشہ واقع ہوتا ہے جب تک کہ اس کے محدود مساوات معلومہ کو پورا کریں۔ اس منحنی کو مساوات کا طریق کہتے ہیں مثلاً اوپر کی مثال میں ایک ایسے دائرہ کی مساوات جس کا مرکز مبدأ ہو اور نصف قطر $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ہے، اور مساوات $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز وہ ہے اور نصف قطر $\frac{1}{2}$ ۔

ہم نے صرف سہولت کی خاطر قائم کارٹیزی محدودوں کا اوپر ذکر کیا ہے لیکن ظاہر ہے کہ اسی طرح ایک منحنی کی مساوات میں مائل کارٹیزی، اور قبی محدودوں میں بھی ہو سکتی ہیں، اس تہید کے بعد ذیل کی تعریفات سمجھ میں آئیں گی۔
کسی منحنی کی مساوات ایک جبر یہ ربط ہے جس کو منحنی کے ہر ایک نقطہ کے محدود پورا کرتے ہیں۔

برعکس اس کے مساوات کا طریق وہ منحنی ہے جس پر کے ہر ایک نقطہ کے محدود مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ یہ منحنی ایسا ہونا چاہئے کہ وہ تمام نقطے جو شرط کو پورا کریں اس پر واقع ہوں اور کوئی ایسا نقطہ جو منحنی پر واقع نہ ہو شرط کو پورا نہ کرے۔ فرض کرو کہ دو منحنی خطوط کی مساواتیں معلوم ہیں، اب ظاہر ہے کہ جس نقطہ یا نقاط پر یہ منحنی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں ان کے محدودان دونوں مساواتوں کو پورا کریں گے کیونکہ ہر ایک نقطہ تقاطع دونوں منحنی خطوط پر واقع ہے۔ اس لئے اگر نقطہ تقاطع کے محدود مطلوب ہوں تو ہمیں دونوں مساواتوں کو $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ کے لئے (جو محدود زیر بحث ہوں) ایک ساتھ حل کرنا چاہئے۔

اوپر کی عبارت اور تعریض نہایت ضروری ہیں، طالب علم کو چاہئے کہ آگے جانے سے پیشتر ان سے بخوبی واقف ہو لے۔

مساوات کے طریق کا مفہوم شاید اس طرح زیادہ واضح ہو گا، لا کو کوئی قیمتیں یا لہو اترو سے جاؤ اور ان کے جواب میں مائل قیمتیں مساوات سے معلوم کرو اس طرح

کئی نقطہ طریق پر ملیں گے جن کو شکل میں مربع دار کا غدیہ منقسم کرنے اور ملانے سے طریق کی شکل کا کچھ پتہ چل سکتا ہے۔
مثال لا۔ ما۔ کے طریق کو منقسم کرو۔

اوپر کے طریقہ کے موافق عمل کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نقاط (۰،۰)، (۱،۱)، (۲،۲)، (۳،۳)، (۴،۴)، (۵،۵)، (۶،۶)، (۷،۷)، (۸،۸)، (۹،۹) مطلوبہ طریق پر واقع ہیں یہ نقطے زاویہ لا و ما کے منصف کی نشان دہی کرتے ہیں، مگر ہمیں ابھی یہ ثابت کرنا ہے کہ اس منصف پر کے ہر ایک نقطہ کے محدود مساوات کو پورا کرتے ہیں اور یہ اقلیدس ۴۱ ش ۶ سے ظاہر ہے، پس یہ منصف طریق مطلوب ہے۔

مشقیں

۲۴۔ ثابت کرو کہ محاور لا اور ما کی مساواتیں بالترتیب ما۔ اور لا۔ ہیں۔
۲۵۔ ثابت کرو کہ مساوات ر۔ ز کا طریق ایک دائرہ کا محیط ہے اور مساوات طہ۔ عہ کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔
۲۶۔ ثابت کرو کہ جن خط ط کی مساواتیں لا۔ ما۔ اور لا + ما۔ ہیں وہ ایک دوسرے کو نقطہ (۶، ۱) پر قطع کرتے ہیں۔
۲۷۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دونوں محوروں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ۲ ہے، اس کا طریق دریافت کرو۔
۲۸۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کے فاصلہ کا مربع نقطہ (۶، ۱) سے ایک کے برابر ہو۔

۲۹۔ ایک ایسے طریق کی مساوات دریافت کرو جس کا ہر ایک معین اس کے متناظر فضاء سے بقدر ایک معلومہ فاصلہ کے بڑا ہو۔

۳۰۔ ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک کا طریق منقسم کرو

$$(۱) ۲ لا - ما = ۱۶ \quad (ب) لا + ما = ۱۶$$

$$(ج) ما = ۳ لا \quad (د) ما = ۲$$

$$(ع) لا = ما \quad (ف) لا = ما$$

(گ) $۳ لا + ۲ ما = ۶ (ھ)$ $لا = لا$

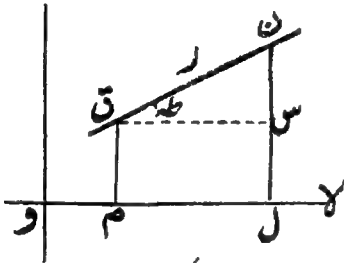
۱۰۔ خط مستقیم کی مساوات

(ا) جب وہ کسی ایک محور کے متوازی ہو۔
اگر ایک خط مستقیم محور لا کے متوازی ہو تو اس کی مساوات $ما = ب$ ہوگی جہاں ب اس خط پر کے کسی نقطہ کا معین ہے، اسی طرح سے $لا = ا$ ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو محور ما کے متوازی ہو جہاں ا اس خط مستقیم پر کے کسی ایک نقطہ کا فصلہ ہے۔

(ب) خط مستقیم کی مساوات جب اس کی سمت دی ہوئی ہو اور اس پر کسی ایک نقطہ کے محدود معلوم ہوں۔

قائم محور۔ فرض کرو کہ ق (لا، ما) نقطہ معلومہ ہے اور خط مستقیم محور لا کے ساتھ زاویہ طہ (مخالف سمت ساخت) بناتا ہے۔
فرض کرو کہ ن (لا، ما) کوئی اور

نقطہ خط مستقیم پر ہے۔
میں ق م ن ل کھینچو اور ولا کے متوازی ق س کھینچو جو ن ل یا ن ل محدودہ کو نقطہ س پر قطع کرے۔
نقطہ ن ذیل کی ہندسی شرط کو پورا کرتا ہے۔



شکل ۱۱

س ن = ق س مس طہ

اسی شرط کو جبر و مقابلہ کی زبان میں بیان کرنے سے

$$\left. \begin{aligned} ما - ما &= (لا - لا) مس طہ \\ یا \quad \frac{لا - لا}{جم طہ} &= \frac{ما - ما}{جم طہ} \end{aligned} \right\} (۱۳)$$

اور یہ مساوات مطلوبہ ہے، اس مساوات کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں

$$ما - ما = ص (لا - لا) \quad (۱۴)$$

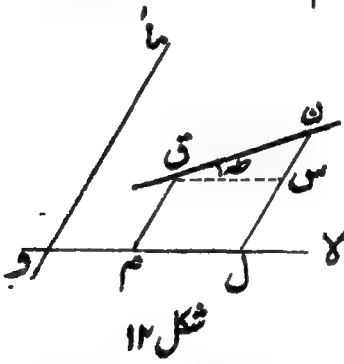
جہاں خط کامیلان طہ، مسن ام ہے۔
اگر خط مستقیم محور ما کو مبدأ سے اوپر فاصلہ ب پر قطع کرے تو ہم ق کو نقطہ
(ب، ب) مان سکتے ہیں اور اس صورت میں مساوات ہوگی

$$\text{ما} = \text{صم لا} + \text{لب} \dots\dots\dots (۱۵)$$

اگر خط مستقیم مبدأ میں سے گزرے تو اس کی مساوات ہوتی ہے

$$\text{ما} = \text{صم لا} \dots\dots\dots (۱۶)$$

نتیجہ صریح نقطہ ن کے محدد لا + رجم طہ + م + رجب طہ ہیں۔
ماہل محور۔ شکل اور عمل حسب بالا۔



$$\Delta ق ن س = \Delta ما و لا - \Delta ن ق س$$

$$\text{سہ} = \text{طہ}$$

$$\frac{\text{ن س}}{\text{ق س}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{جب (سہ - طہ)}}$$

اس سے معلوم ہوا کہ مساواتیں (۱۳ تا ۱۶) اس صورت میں بھی وہی رہیں گی سوائے
اس کے کہ م کی جگہ جملہ $\frac{\text{جب طہ}}{\text{جب (سہ - طہ)}}$ ہوگا جس سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ خط
مستقیم کامیلان ہے

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{م جب سہ}}{\text{م جب سہ} + ۱} \dots\dots\dots (۱۷)$$

مثال۔ محوروں کا زاویہ میلان ۲۵° ہے، جو زاویہ خط
 $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} (۲۸ + ۲۸)$ لا محور لا سے بناتا ہے اس کو دریافت کرو۔
اس جگہ سہ = ۵۴° اور م = $\frac{۱}{۲} (۲۸ + ۲۸)$

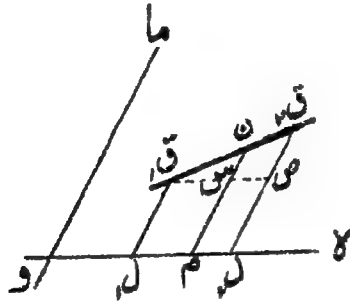
$$\text{مس طہ} = \frac{\text{م جب سہ}}{\text{م جب سہ} + ۱} = \frac{\frac{۱}{۲} م}{\frac{۱}{۲} م + ۱} = \frac{م}{۲۸ + م}$$

$$\frac{(\sqrt{18} + \sqrt{48}) \frac{1}{4}}{\sqrt{18} + (\sqrt{18} + \sqrt{48}) \frac{1}{4}} = \text{پس مس طہ}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18} + \sqrt{48}}{\sqrt{18}^2 + \sqrt{48}} =$$

طہ = ۳۰

(ج) خط مستقیم کی مساوات جب اس پر کے کسی دو نقطوں کے محدود معلوم ہوں



شکل ۱۳

فرض کرو کہ ق، (لا، ما) اور ق، (لا، ما) نقاط معلوم ہیں اور ن (لا، ما) خط پر کوئی اور نقطہ ہے۔

معین ق، ل، ق، ل، ن م کھینچو اور ق، ص کو و لا کے متوازی کھینچو کہ وہ ن م کو پس پر اور ق، ل کو ص پر قطع کرے۔

نقطہ ن اس ہندسی شرط کو پورا کرتا ہے

$$\frac{\text{ق، ص}}{\text{ق، ل}} = \frac{\text{س، ن}}{\text{ص، ق، ل}}$$

اس ہندسی ربط کے مقابل جملہ جبریہ یہ ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} - \text{لا}} \dots \dots (۱۸)$$

یہ مساوات مطلوبہ ہے اور یہ قائم امر مائل ہر ذمہ داروں کے لئے درست ہے۔

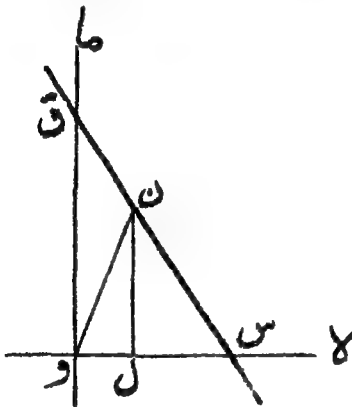
مثال - نقاط (۳، ۷)، (۱، ۲) کو ملانے والے خط کی مساوات دریافت کرو۔

$$\frac{(۳ - ۱) - لا}{(۳ - ۱) - ۱} = \frac{۷ - ۲}{۷ - ۲\frac{۱}{۲} - ۱}$$

$$\frac{۳ + لا}{۴} = \frac{۷ - ۲}{\frac{۱۹}{۲}}$$

تحويل کے بعد $۱۹ لا + ۸ = ۱۹$

(۲) خط مستقیم کی مساوات جبکہ محوروں پر اس کے مقطوعوں کے طول معلوم ہوں
یہ (ج) کی ایک خاص صورت ہے لیکن اس کے لئے ایک بلاواسطہ ثبوت



شکل ۱۴

ذیل میں مندرج ہے -
مقام محور - فرض کرو کہ محاور کا اور
مابہر متطوعات و س (۱) اور
وق (ب) ہیں نیز فرض کرو کہ خط پر
کوئی اور نقطہ ن (لا، ما) ہے -
نقطہ ن کی شرط ہندسی کو پورا کرتا ہے
 $\Delta وق ن + لے و س ن$
 $\Delta وق س ق =$

اس ربط کے مقابل جملہ جبریہ یہ ہے

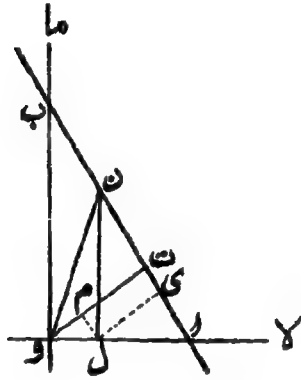
$$\frac{۱}{ب} لا + \frac{۱}{لے} ما = \frac{۱}{لے} وق$$

(۱۹)

یہ مساوات نال محوروں کے لئے بھی درست ہے، فرق صرف یہ ہے کہ
جزو ضربی جب سہ ہر رقبہ میں شریک ہوتا ہے اور آخر میں طرین سے خارج ہو جاتا،
(خ) عمودی صورت - مبدأ سے خط مستقیم پر عمود نکالا گیا ہے اس کا طول
ع معلوم ہے نیز وہ زاویہ (عہ) معلوم ہے جو یہ عمود محور لا سے بناتا ہے -

[عہ کو مخالف سمت ساعت ناپا گیا ہے]

جیسا اوپر بھی محدودوں میں بیان ہوا یہ یاد رہے کہ عمود $ع$ لازماً مثبت ہے کیونکہ اگر یہ منفی ہو تو $ع$ سے وہ زاویہ تعمیر ہوگا جو عمود کی تقابل سمت (یعنی وہ سمت جو عمود کو مبدئیں سے بچھلی طرف خارج کرنے سے حاصل ہوتی ہے) محور $لا$ سے بناتی ہے۔



شکل ۱۵

قائم محور۔ فرض کرو کہ خط مستقیم محاور $ولا$ اور $و$ ماکونقاط $ا$ اور $ب$ پر قطع کرتا ہے۔

مبدئ سے خط مستقیم پر عمود $وت$ نکالو۔

تب $وت = ع$ ، $لاوت = ع$

نیز فرض کرو کہ خط پر کوئی نقطہ $ن$ ($لا، ما$) ہے۔

معین $ن$ لکھیں جو اور $وت$ پر عمود $ل$ م اور $ا$ ب پر عمود $ل$ می نکالو۔

تب $وت = و$ م + $ل$ می = $ول$ جم اور $وت + ل$ ن جب $ل$ ن می

اب $ل$ ن می = $ل$ ب و $ت = و$ ۔ $ل$ ب و $ت = ل$ ا و $ت$

اس لئے متناظر جبریہ ربط یہ ہے

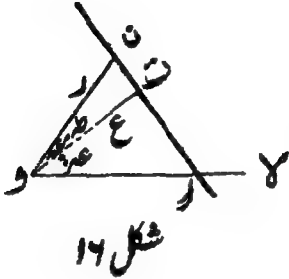
لاجم $ع$ + $ما$ جب $ع$ = $ع$ (۲۰)

ماثل محور۔ اوپر کی شکل اور عمل کی روش سے

$وت = ول$ جم اور $وت + ل$ ن جب $ب$ و $ت$

اور اس مساوات کا متناظر جبریہ ربط یہ ہے

لاجم عم + باجم (سم - عم) = ع (۲۱)
(ف) خط مستقیم کی قطبی مساوات
(صورت عامہ)



فرض کرو کہ قطب سے جو عمود و ت خط
مستقیم پر نکالا جائے اس کا طول ع ہے
اور بموجب سابق ت کے محدد (ع عم)

ہیں۔
فرض کرو کہ خط مستقیم پر ایک اور نقطہ
ن (ر طہ) ہے۔

نقطہ ن ذیل کی ہندسی شرط پورا کرتا ہے۔

ون جم ت ون = و ت

اب د ت ون = د ر ون - د ر و ت = طہ - عم

اس لئے متناظر جبریہ ربط ہے رجم (طہ - عم) = ع (۲۲)

مشقیں

۳۱۔ مساوات (۱۸) کو اس اور کی مدد سے ثابت کرو کہ Δ ن ق ق کا رقبہ صفر ہوگا
اگر ن خط ق ق پر واقع ہو۔

۳۲۔ کارٹیزی صورت (۲۰) کو قطبی صورت (۲۲) سے مستقیم کرو اور برعکس اس کے
(گ) ایک ایسے خط کی قطبی مساوات جو دو نقاط معلومہ میں سے گزرے۔

فرض کرو کہ ۱ (ر طہ) اور ۲ (ر طہ) دو نقاط معلومہ ہیں اور خط ر ب
پر کوئی اور نقطہ ن (ر طہ) ہے۔

نقطہ ن اس ہندسی ربط کو پورا کرتا ہے کہ مثلث ر ب ن کا رقبہ صفر کے
برابر ہے، اس لئے بموجب دفعہ ۸ خط مستقیم کی مساوات مطلوبہ ہے

ر ب جب (طہ - طہ) + ر ب جب (طہ - طہ) + ر ب جب (طہ - طہ) = ۰

یا $\frac{1}{2}$ جب (طہ - طہ) + $\frac{1}{2}$ جب (طہ - طہ) + $\frac{1}{2}$ جب (طہ - طہ) = (۲۳)

مشقیں

۳۳۔ دو خطوط نقطہ (۲۰) میں سے گزرتے ہیں اور محور لا کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{4}$ اور $\frac{\pi}{2}$ بناتے ہیں، ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

نیز ان خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو اوپر کے خطوط کے متوازی ہوں اور محور لا کو مبدأ سے نیچے فاصلہ ۲ پر ہیں۔ ان خطوط کے نقاط تقاطع محور لا کے ساتھ دریافت کرو۔

۳۴۔ خطوط $y = \frac{1}{2}x$ اور $y = \frac{1}{2}x + 3$ کے میلان محور لا سے دریافت کرو۔

ثابت کرو کہ خط $y = \frac{1}{2}x + 3$ ان کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ نقاط (۳، ۱)، (۲، ۳)، (۱، ۱) ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

۳۶۔ اگر دو مائے متوازی کوئی معین کھینچا جائے جو خطوط مستقیم $y = \frac{1}{2}x$ اور $y = \frac{1}{2}x + 3$ کو قطع کرے تو ثابت کرو کہ اس کا جو حصہ ان دو خطوط کے درمیان واقع ہوتا ہے اس کا طول مستقل ہے۔

۳۷۔ ایک دائرہ کا مرکز مبدأ ہے اور نصف قطر $\frac{1}{2}$ ، اس کا ایک قطر محور لا کے ساتھ 45° کا زاویہ بناتا ہے اور اس کے دونوں سروں پر دو مائے کھینچے گئے ہیں، ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

۳۸۔ ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو نقاط (۵، ۳) اور (۴، ۴) کے غلافے والے خط کی تنصیف کرے اور محور لا سے زاویہ 45° بنائے۔

۳۹۔ ایک مثلث کے رأس (۰، ۰)، (۲، ۴) اور (۶، ۴) ہیں، اس کے اضلاع کی مساواتیں دریافت کرو۔

۴۰۔ ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو نقطہ (۲، ۲) میں سے گزرے اور محاور پر اس کے مقطوعات کا مجموعہ = ۹

۴۱۔ ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو نقطہ ق (۲، ۳) میں سے گزرے اور محور لا سے زاویہ 45° بنائے نیز جہاں یہ خط مستقیم $y = \frac{1}{2}x + 3$ کو قطع

کرتا ہے اس نقطہ تقاطع اور نقطہ ق کے درمیانی حصہ کا طول دریافت کرو۔

۴۲۔ دریافت کرو کہ نقاط (۴، ۶)، (۱، -۱)، (۷، -۲) کے ملانے والے خط کو خط MA + MA سے نسبت سے تقسیم کرتا ہے۔

۴۳۔ اگر $MA = ۵$ تو ثابت کرو کہ خط MA = لا محور O سے زاویہ $\frac{1}{4}$ بناتا ہے اور بالعموم ضابطہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ MA = لا محور O سے زاویہ $\frac{1}{4}$ سمہ بناتا ہے۔

۴۴۔ اگر $MS = ۵$ (جہاں $MS > ۵$) تو جو زاویہ خط $MA = ۵$ لا محور O سے بناتا ہے اس کو دریافت کرو۔

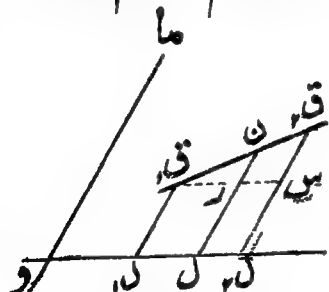
۱۱۔ کارٹیزین محددوں کے لحاظ سے خط مستقیم کی مساوات کی صورت عامہ۔
خط مستقیم کی مساوات کی جتنی صورتیں ہم نے اب تک بلحاظ قائم محوروں کے دریافت کی ہیں وہ سب کی سب بلحاظ لا، MA کے درجہ اول کی مساواتیں ہیں، لیکن دو مجموعی تقارر کی مساوات درجہ اول کی عام سے عام صورت

$$A + B + C = 0$$

ہے، اگرچہ بظاہر اس مساوات میں تین مستقل مقادیر A ، B ، C شامل ہیں مگر فی الحقیقت

یہ دو ہیں یعنی نسبتیں $\frac{A}{C}$ اور $\frac{B}{C}$ ۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ لا، MA کی مساوات درجہ اول کی عام سے عام صورت ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔



فرض کرو کہ کوئی دو نقاط مچھینے

ق، (لا، MA)، ق، (لا، MA)، ق، (لا، MA)

خط مستقیم پر ہیں اور ایک تیسرا نقطہ

ن (لا، MA) بھی طریق مساوات $A + B + C = 0$

پر واقع ہے۔

میں ق، ق، ق، ق، ق، ق، ق، ق کے متوازی ق، MA سے اس طرح کھینچو کہ وہ ن سے لے کر اور ق، ق، ق، ق، ق، ق، ق، ق سے لے کر اس پر ملے، اس پر چونکہ ان تینوں نقطوں کے محدود طریق کی مساوات کو پورا کرتے ہیں، اس لئے

$$(۱) \dots\dots\dots = \text{لا} + \text{ب} \text{ ما} + \text{ج}$$

$$(۲) \dots\dots\dots = \text{لا} + \text{ب} \text{ ما} + \text{ج}$$

$$(۳) \dots\dots\dots = \text{لا} + \text{ب} \text{ ما} + \text{ج}$$

مساواتوں (۱) اور (۲) سے $(\text{لا} - \text{لا}) + (\text{ب} - \text{ما}) = ۰$

اور (۱) اور (۳) سے $(\text{لا} - \text{لا}) + (\text{ب} - \text{ما}) = ۰$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}}{\text{ما} - \text{ما}} \text{ یعنی } \frac{\text{ق}}{\text{س}} = \frac{\text{ق}}{\text{س}}$$

اس لئے ثابت ہوا کہ نقطہ ن خط ق ق پر واقع ہے۔

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

متبادل ثبوت۔ درجہ اول کی مساوات عامہ اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$۱ = \frac{\text{لا}}{\text{ب}} - \frac{\text{ج}}{\text{ب}} \text{ جس کی شکل مساوات } ۱ = \text{م} + \text{لا} + \text{ب} \text{ آئی ہے، ہم ثابت}$$

کر چکے ہیں کہ شرائط مساوات آخر الذکر ایک ایسے خط مستقیم کے ہر نقطہ کے محوروں سے پوری ہوتی ہیں جو محور ما کو مبدأ سے فاصلہ ب پر قطع کرتا ہے اور محور لا سے زاویہ

مس-ام (قائم محوروں کی صورت میں) اور مس-ا+م+ج (ماہل محوروں کی صورت میں) بناتا ہے۔

نیز اس مساوات کو کسی اور نقطہ کے محدود پورا نہیں کر سکتے، کیونکہ فرض کرو کہ ایک نقطہ

ق خط مذکورہ کے باہر کچھ فاصلہ اوپر واقع ہے اور اس کے محدود (لا، ما) ہیں۔

نیز فرض کرو کہ اس خط پر نقطہ ن ایسا ہے جس کا فاصلہ (لا، دہی) ہے جو ق کا اور جس کا معین ما ہے۔

تب ما = م + لا + ب چونکہ (لا، ما) اس خط پر واقع ہے۔

لیکن ما < م + لا چونکہ ق نقطہ ن کے اوپر واقع ہے

ما < م + لا + ب

اسی طرح سے اگر ق خط مذکور کے نیچے واقع ہو تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

ما > م لا + ب

اس لئے معلوم ہوا کہ مساوات ما = م لا + ب کو ہر ایک ایسا نقطہ جو ایک خاص خط مستقیم پر واقع ہو پورا کرتا ہے لیکن اور کوئی نقطہ پورا نہیں کر سکتا اس لئے ما = م لا + ب ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔

۱۳۔ دفعہ آخر کے استدلال سے ظاہر ہے کہ نقاط (لا، ما) اور (لام، ما) ایک خط مستقیم ما = م لا + ب کے ایک جانب یا متقابل جانبوں میں واقع ہونگے اگر جملات (ما - م لا - ب) اور (ما - م لا - ب) کی علامات بالترتیب موافق یا مختلف ہوں اور چونکہ مساوات عامہ لا + ب + ما + ج = ۰ مساوات ما = م لا + ب کو ایک مستقل مقدار میں ضرب دینے اور صورت مذکورہ میں تحویل کرنے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے معلوم ہوا کہ نقاط (لا، ما) اور (لام، ما) خط مستقیم لا + ب + ما + ج = ۰ کے ایک جانب یا متقابل جانبوں میں واقع ہوں گے اگر جملات

لا + ب + ما + ج اور لا + م + ب + ما + ج کی علامات بالترتیب موافق یا مختلف ہوں، یاد رہے کہ جملات مندرجہ بالا خط مستقیم کی مساوات میں محمد (لا، ما) اور (لام، ما) مندرجہ کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۴۔ مساوات لا + ب + ما + ج = ۰

$$ما = \frac{لا}{ب} - \frac{ج}{ب} \quad \text{اور} \quad \frac{لا}{ب} = \frac{ج}{ب} + ۱$$

جن کا مقابلہ مساوات کی حسب ذیل صورتوں

ما = م لا + ب اور لا + ب + ما + ج = ۱ سے کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ خط مستقیم کی مساوات عامہ لا + ب + ما + ج = ۰ کا میلان محور لا سے مست (لا، ب) ہے

ہے اگر محور قائم ہوں اور مست (ب - رجب سہ) ہے اگر محور مائل ہوں، نیز ظاہر ہے کہ محاور لا اور ما پتہ قطوعات - ج اور ج - ب ہیں۔

۱۔ مساوات $ا + لا + لب + ما + ج =$ کو عمودی صورت لاجم $عہ + جب + عہ = ع$ میں (جہاں محور قائم ہیں) تحویل کرتے وقت احتیاط سے کام لینا چاہئے، چونکہ مساوات تحول میں لا اور ما کے سروں کے مربعوں کا مجموعہ لازماً ایک کے برابر ہونا چاہئے اس لئے سب سے پہلے ہمیں مساوات کی کل ارقام کو $ا + لا + لب + ما$ پر تقسیم کرنا چاہئے اس تحویل کے بعد مساوات ہوگی

$$\frac{ا}{ا + لا + لب + ما} - لا = \frac{لب}{ا + لا + لب + ما} = ما = \frac{ج}{ا + لا + لب + ما} \dots (۱)$$

ہم جانتے ہیں کہ $ع$ لازماً مثبت ہے [دفعہ ۱۰ (ع)] اس لئے معلوم ہوا کہ اگر $ج$ مثبت ہو تو (۱) تحویل شدہ مساوات کی صحیح صورت ہے اور اگر $ج$ منفی ہو تو مساوات (۱) جس میں جایہ ارقام کی علامات بدل رہی جائیں مساوات مطلوبہ کی صحیح صورت ہوگی۔

مبدأ سے خط مستقیم پر کے عمود کا طول $\frac{ج}{ا + لا + لب + ما}$ ہوگا اگر $ج$ مثبت ہو اور

$\frac{ج}{ا + لا + لب + ما}$ اگر $ج$ منفی ہو۔

مال محوروں کی صورت میں اگر مساوات $ا + لا + لب + ما + ج =$ کا مقابلہ لاجم $عہ + ما + جم = (سہ - عہ) = ع$ سے کیا جائے تو

$$ع - ع = \frac{ا}{ج} = جم - عہ$$

$$ع - ع = \frac{لب}{ج} = جم - (سہ - عہ) = جم - سہ + جب + عہ$$

$$ع - ع = \frac{ا}{ج} + \frac{لب}{ج} + ع = \frac{ا + لب + سہ}{ج} = جب + سہ + عہ$$

$$اور - ع = \frac{ا + جب + سہ}{ج} = جب + سہ + جم - عہ$$

مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$\frac{ع}{ج} = \{ (ا + جم) - (ا + ا + جب) \} = جب - جم$$

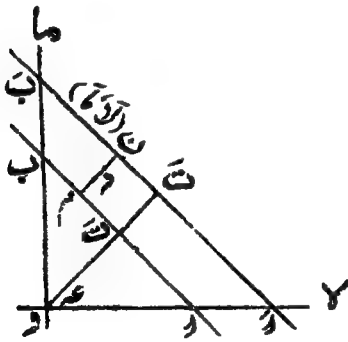
$$\frac{ع}{ج} = \pm \frac{ا + ا + جب - ۲ ا + جب - جم}{ا + ا + جب - ۲ ا + جب - جم}$$

اور مساوات کی تحویل شدہ صورت اگر ج مثبت ہو

$$\frac{ا + ا + جب - ۲ ا + جب - جم}{ا + ا + جب - ۲ ا + جب - جم} = \frac{ا + ا + جب - ۲ ا + جب - جم}{ا + ا + جب - ۲ ا + جب - جم}$$

ہوگی لیکن اگر ج منفی ہو تو اس مساوات میں سب ارقام کی علامتیں بدل دینے کے بعد مساوات مطلوبہ حاصل ہوگی۔

۱۶۔ نقطہ (لا، ما) کا عمودی فاصلہ خط مستقیم لا جم عدہ + ما جب عدہ = ع سے دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔



فرض کرو کہ ا ب خط مستقیم ہے اور ن نقطہ (لا، ما) ہے، فرض کرو کہ عمود ن م کا طول د ہے جہاں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ نقطہ ن اور مبدأ و خط ا ب کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

شکل ۱۸

نقطہ ن میں سے ا ب کے متوازی ا ب ب کھینچو اور

نقطہ د سے خطوط ا ب اور ا ب پر مشترک عمود و ت ت نکالو۔
و ت = ع اور زاویہ لا و ت = عدہ [دفعہ ۱۰ (ع)] اب چونکہ نقطہ د سے خط ا ب پر عمود و ت ہے اور وہ لا سے زاویہ عدہ بناتا ہے

اس لئے خط رتب کی مساوات ہے

لاجم عہ + مآجب عہ = وت = ع + د [دفعہ ۱۰ (ع)]
 نیزن (لا، ما) کے محدود رتب کی مساوات کو پورا کرتے ہیں
 لاجم عہ + مآجب عہ = ع + د

د = لاجم عہ + مآجب عہ - ع (۲۴)

اس لئے معلوم ہوگا کہ اگر جملہ لاجم عہ + مآجب عہ - ع میں نقطہ ن کے محدود مندرجہ کردئے جائیں تو حاصل عمود کا طول مطلوب ہوگا۔

اگر اس کی تصدیق ہندسہ بنیہ نمود ہو تو ن کا متین ن لکھیں اور وت پر عمود ای
 نکالو اس سے معلوم ہوگا کہ ضابطہ (۶۴) کو ہندسی طریق پر اس طرح بیان کر سکتے ہیں

م ن = وی + سی - وت

مشقیں

۴۵۔ دریافت کرو کہ نقاط (۱، ۱) اور (۲، ۲) خط لا - ۳ + ۱ = ۵ = ۰

کے ایک ہی جانب واقع ہیں یا متقابل جانبوں پر۔

۴۶۔ ثابت کرو کہ مبدأ اور نقاط (۱، ۱)، (۰، ۵)، (۵، ۹)، (۹، ۳) ان چار مختلف خانوں میں واقع ہیں جو خطوط لا + ۲ = ۱ اور لا + ۳ = ۲ کے تقاطع سے پیدا ہوتے ہیں۔

۴۷۔ (۱) مساوات لا + ۳ = ۲ - ۱ = ۰ کو قائم محوروں کے لحاظ سے عمودی صورت میں تبدیل کرو۔

(۲) مساوات لا + ۱ = ۲ = ۰ کو عمودی صورت میں تبدیل کرو، محوروں کا

بازی میلان ۴۰ ہے۔

۴۸۔ ثابت کرو کہ مائل محوروں کی صورت میں اگر نقطہ (لا، ما) سے نمود خط

لاجم عہ + مآجم (سہ - عہ) = ع پر نکالا جائے تو اس کا طول

لاجم عہ + مآجم (سہ - عہ) = ع ہوگا۔

۴۹۔ مساوات عامہ لا + ۱ + ب + ج = ۰ کو عمودی صورت میں تبدیل کرنے سے

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر نقطہ (لا، ما) سے خط لا + ۱ + ب + ج = ۰ پر نمود نکالا جائے

تو اس کا طول (بغیر لحاظ علامت) قائم محوروں کی صورت میں

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2} \quad (۲۵)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

ہوگا اور اہل محوروں کی صورت میں

$$\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2} \quad \text{جب } n \text{ سہ } (۲۶)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

ہوگا -

۱۸۔ اب تک ہم نے عمود کے طول کے متعلق بحث کی ہے، اب ہم اس کی علامت پر غور کریں گے، ظاہر ہے کہ عمود کی علامت نقطہ مذکورہ کے محدودوں (۱، ۲، ۳، ...) کو جملہ ۱ + ۲ + ۳ + ... + n میں مندرج کرنے سے معلوم نہیں ہو سکتی کیونکہ خط کی مساوات ذیل کی کسی ایک صورت میں لکھی جاسکتی ہے ۱ + ۲ + ۳ + ... + n = ۱ + ۲ + ۳ + ... + n۔ اب چونکہ نقطہ کے محدود مندرج کرنے سے عمود کی مطلق علامت معلوم نہیں ہو سکتی اس لئے اس کی سمت کا تعین یہ دیکھنے سے ہو سکتا ہے کہ نقطہ (۱، ۲، ۳، ...) خط مستقیم کے کس جانب واقع ہے، پس اس غرض سے ہم یہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ نقطہ (۱، ۲، ۳، ...) خط مستقیم کے اسی جانب واقع ہے جس جانب کہ مبداء یا اس کی متقابل جانب میں اور یہ بات معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ نقطہ (۱، ۲، ۳، ...) اور مبداء کے محدودوں کو جملہ ۱ + ۲ + ۳ + ... + n میں بالترتیب مندرج کرنے سے اگر ہم دیکھیں کہ حاصل کی علامت ہر صورت میں ایک ہی ہے تو ظاہر ہے کہ دونوں نقطے (۱، ۲، ۳، ...) اور مبداء خط مستقیم کے ایک ہی جانب واقع ہیں اور اگر یہ علامتیں مختلف ہوں تو یہ نقطے متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

مثال۔ نقطہ (۱، ۲) کا عمودی فاصلہ خط ۱ + ۲ = ۳ سے

دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔

$$\frac{1 + 2}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

اس مثال کے آخری دو نتائج کو یاد رکھنا ضروری نہیں، مثالیں حل کرنے میں سب سے اہل مساوات معلومہ کو ماسی صورت میں لے آنا چاہئے۔ اس کے بعد حسب ضرورت ضوابط (۲۷) اور (۲۸) کی مدد سے حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے لیکن ان دو نتائج کو یاد رکھنا ضروری ہے۔

(۱) خطوط کے باہم متوازی ہونے کی شرط بہ دو قائم اور مائل محوروں کی صورت میں (مس ف = ۰)

$$م = م یا \frac{م}{م} = \frac{م}{م} \dots\dots\dots (۲۹)$$

(ب) ایک دوسرے پر عمود ہونے کی شرط (مس ف = ۹۰) قائم محوروں کی صورت میں

$$م = م - یا \frac{م}{م} = - \frac{م}{م} \dots\dots\dots (۳۰)$$

پس معلوم ہوا کہ اسے خط مستقیم کی مساوات جو خط لا + ب + ج = کے متوازی ہو صرف متقل رقم کے مناسب تغیر سے حاصل ہو سکتی ہے (کیونکہ حسب بالا متوازی خطوط کے لئے نسبت لا + ب وہی رہتی ہے) اس سلسلہ کے کسی خاص خط کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ضروری ہے کہ متوازی ہونے کی شرط کے علاوہ ایک اور شرط دی گئی ہو جس کو استعمال کرنے سے ہم مساویہ کی رقم متقل معاویہ کر سکیں۔

نیز اگر قائم محوروں کے لحاظ سے ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات معلوم کرنا مقصود ہو جو لا + ب + ج = پر عمود ہو تو ہمیں لا + ب کے سروں کو آپس میں بدل کر ان میں سے ایک کی علامت تبدیل کر دینی چاہیے، رقم مستقل کسی دوسری شرط کی مدد سے حسب مابقی معلوم ہو سکتی ہے۔

مشقیں

[۵۰ سے ۶۰ تک قائم محوروں کے لئے ہیں]

۵۰۔ نقطہ (ب) کا عمودی فاصلہ $\frac{لا}{ب} + \frac{ب}{ب} = ۲$ سے دریافت کر۔

۵۱۔ ثابت کرو کہ بدا کے عمودی فاصلے تین خطوط مستقیم

$$50 = 6r^2 + 3c^2 = 24 + 6(2 - 206) = 1 + 6r + 3c$$

سے مساوی ہیں۔

۵۲۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳۰، ۴۰، ۵۰ (۱، ۳، ۴) اور ۳، ۴، ۵ (۱، ۲، ۳) ہیں، اس کے راسوں کے محدد دریافت کرو، نیز ان راسوں سے مقابل کے اضلاع پر جو عمود نکالے جا سکتے ہیں ان کے طول دریافت کرو۔

۵۳- خطوط مستقیم -۱- ۳ لا-۵= اور ۳ لا-۶+۲= .
کادر میانی زاویه دریافت کرد-

۵۴- خطوط مستقیم ۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰ اور الہی (۳) ۱۰+۱=۳۱۰۔
کادریائی زاویہ دریافت کرو۔

۵۵۔ خطوط مستقیم $MA = MB$ اور $LA = LB$ ۔ $(M + 1) = (L + 1)$ ۔ $(M - 1) = (L - 1)$ کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے اسے دریافت کرو۔

۵۶۔ اُن خطوط مستقیم کی مساواتیں دریافت کرو جو نقطہ (۱-۳) میں سے گزریں اور خط لا+۷=۴ کے بالترتیب متوازی اور عمود ہوں۔

۵۷۔ ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو جو ہمہ اُمس سے گزرے اور نقاط (۳-۶) اور (۴-۵) کے ملانے والے خط پر عمود ہو۔

۵۸۔ جو خطوط مدائیں سے گزرتے ہیں اور خط AD + AM + MS = سے ۶۰ کے زاوٹے بناتے ہیں ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

نیز ان نقاط کے محدود دریافت کرو جہاں یہ خط مذکور سے ملے ہیں

۵۹۔ محور لا پرایک ایسا نقطہ دریافت کرو جس کا عمودی فاصلہ خط $13 + 12 = 25$ سے ۴۴ ہوا اور جو خط مذکور کے اس طرف واقع ہو جس طرف کہ مبدا واقع ہو۔

۶۰۔ نقطہ (ھ، ک) سے خط am (م لا ب) پر عمود نکلا گیا ہے، اس کے پائوں کے عمود دریافت کرو۔

۱۶۔ اسی شرط معلوم کرو کہ خطوط ۲ لا + س = م، س لا - ک = م یا ۲ با ہم متوازی ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ = س ہو۔

یہ شرط حاصل ہوگی

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

سادات مندرجہ بالا (۱) صرف اس شرط کی تفصیلی صورت ہے۔

مشق

۶۵۔ خطوط ۳ لا + ۳ ما = ۱۰ اور ۲ لا + ۵ ما = ۱۳ کے نقطہ تقاطع کے محدود دریافت کرو۔

۲۶۔ ایک ایسے خط مستقیم کی سادات جو دو مفروضہ خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے۔

سادات ذیل پر غور کرو۔

$$1 \text{ لا} + 1 \text{ ب} + 1 \text{ ج} + 1 \text{ ک} (1 \text{ لا} + 1 \text{ ب} + 1 \text{ ج}) = 0 \dots\dots\dots (31)$$

یہ سادات ک کی تمام قیمتوں کے لئے ایک ایسے خط کو تعبیر کرتی ہے جو
 $1 \text{ لا} + 1 \text{ ب} + 1 \text{ ج} = 0$ اور $1 \text{ لا} + 1 \text{ ب} + 1 \text{ ج} = 0$ کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا
 ہے، کیونکہ (۳۱) بلحاظ لا، ما کے سادات درجہ اول ہے، اس لئے ایک
 خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، نیز چونکہ $1 \text{ لا} + 1 \text{ ب} + 1 \text{ ج} = 0$ اور
 $1 \text{ لا} + 1 \text{ ب} + 1 \text{ ج} = 0$ کے نقطہ تقاطع کے محدود ہر دو خطوط کی ساداتوں کو پورا کرتے
 ہیں اس لئے وہ (۳۱) کو بھی پورا کریں گے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ سادات
 مذکورہ ایک ایسے خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں جو ان خطوں کے نقطہ تقاطع
 میں سے گزرتا ہے۔

اگر ک کی قیمت کا مناسب انتخاب کیا جائے تو جو خط مستقیم سادات (۳۱)
 سے تعبیر ہوتا ہے وہ ایک اور شرط معینہ کو بھی پورا کر سکتا ہے۔

مثال۔ ایک ایسے خط مستقیم کی سادات دریافت کرو جو محور ما کے متوازی
 ہو اور خطوط لا - ۱ ما - ۵ = ۱ اور ۳ لا + ما - ۷ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں

سے گزرے۔
 ان خطوط کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کی مساوات ہوگی
 (۱) $۷ + ۵ + ۳ = ۱۵$ (۲) $۷ + ۵ + ۳ = ۱۵$
 یا (۱) $۷ + ۵ + ۳ = ۱۵$ (۲) $۷ + ۵ + ۳ = ۱۵$
 اگر یہ خط محور مسا کے متوازی ہو تو ماکا سر صفر ہونا چاہئے، پس $۷ = ۰$
 اور مساوات مطلوبہ ہے $۷ = ۰$

مشقیں

- ۱۔ ایک ایسے خط کی مساوات دریافت کرو جو خطوط
 $۷ + ۵ = ۱۲$ اور $۳ + ۷ = ۱۰$ کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے
 اور محور ۷ کے متوازی ہو۔
- ۲۔ خطوط $۷ + ۵ = ۱۲$ اور $۳ + ۷ = ۱۰$ کے نقطہ تقاطع کے
 محدود دریافت کرنے سے اوپر کے دو سوالات کے نتائج کی تصدیق کرو۔
- ۳۔ دفعہ ماقبل کے استدلال کی بنیاد پر ہم تین خطوط کے متراکز ہونے کی
 شرط کو ایسی شکل میں تحول کر سکتے ہیں جو بعض اوقات مفید ہوتی ہے۔ اگر ہم
 تین ایسے مستطلات $ل$ ، $م$ ، $ن$ معلوم کر سکیں کہ جملہ
 $ل$ (۱) $۷ + ۵ + ۳ = ۱۵$ (۲) $۷ + ۵ + ۳ = ۱۵$ (۳) $۷ + ۵ + ۳ = ۱۵$

متطابقاً صفر ہو [یعنی $ل$] اکیں نام قیمتوں کے لئے صفر ہو جس کے لئے ضروری
 ہے کہ لاکا سر، ماکا سر اور جملہ (۳) میں مقدار مستقل تینوں میں سے ہر ایک الگ
 الگ صفر ہو جب $ل$ ، $م$ ، $ن$ کو مناسب قیمتیں دی جائیں آ تو یہ تینوں خط
 متراکز ہوں گے۔

کیونکہ فرض کرو کہ پہلے دو خط نقطہ (۱) پر قطع کرتے ہیں

$$تب ۱) ۷ + ۵ + ۳ = ۱۵$$

$$اور ۲) ۷ + ۵ + ۳ = ۱۵$$

لیکن ل (ل + لا + ب + ما + ج) + م (ل + لا + ب + ما + ج) +
 + ن (ل + لا + ب + ما + ج) =
 کیونکہ ہر (۳۱) تغیرات لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے صفر کے مساوی ہے۔
 اس لئے ہم لا + ب + ما + ج = ۰
 میں نقطہ (لا، ما) درست خط پر بھی واقع ہے، یعنی ثابت ہوا کہ تینوں خطوط ایک
 ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

اس ترکیب میں خاص سہولت یہ ہے کہ بعض مرتبہ فقط دیکھنے سے ہی
 ہم ل، م، ن کی قیمتیں متعین کر سکتے ہیں، اس کی سب سے سہل صورت
 اس وقت پیدا ہوتی ہے جب کہ تین خطوط کی مساواتیں ایسی صورت میں دی گئی
 ہوں کہ ل، م، ن میں سے ہر ایک کو ایک کے مساوی منتخب کرنے سے جملہ
 (۳۲) لا، ما کی تمام قیمتوں کے لئے صفر کے مساوی ہو۔

[جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے وہ پہچان لے گا کہ اس ترکیب سے
 بھی ہم اسی نتیجہ پہنچتے ہیں جو پہلے دریافت ہوا، کیونکہ اگر جملہ (۳۲) ل، م، ن
 کی تمام قیمتوں کے لئے صفر ہوں تو

ل + م + ن = ۰، ل + ب + م + ن = ۰، ل + ج + م + ن = ۰، اور ان مساواتوں سے اگر ل، م، ن کو مساوی
 کر دیا جائے تو وہی مساوات حاصل ہوتی ہے جو دفعہ ۲۱ میں حاصل ہوئی [مثلاً]
 مثال سے ثابت کرو کہ جو خطوط مثلث کے تین اضلاع کی عمودی تعریف کرتے ہیں
 وہ تینوں ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

غرض کرو کہ جو نقاط ہیں اور نقاط رأسی کو، ب، ج کے محاذ بالترتیب

(لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما) (لا، ما) ہیں۔

ب، ج کی مساوات ہے [تسبب دفعہ ۱۰ (ج)]

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}}{\text{ما} - \text{ما}}$$

یعنی (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا) = ۰..... (لا)

اگر دضلع ب ج و انتہہ نصف ہو تو اس کے محدود $\frac{لا + لا}{۲}$ ، $\frac{لو + لو}{۲}$ ہوں گے اور د میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کو۔ اوقات یہ ہوگی

$$ما - \frac{لا + لا}{۲} = ص (لا - لا) \dots\dots (د)$$

اس چونکہ نقطہ د میں سے گزرنے والا خط ب ج پر عمود ہے اس لئے مساوات (د) میں جو لا اور ما کے سر میں ہیں ان کا تبادلہ کر کے ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل دی جائے گی اس نے ایک ایسے خط کی مساوات جو د میں سے گزرنے اور ب ج پر عمود ہو حسب ذیل ہوگی

$$(لا - لا) (لا - لا) = ص (لا - لا) (لا - لا) \dots\dots (ج)$$

ان دونوں مثالوں کے خطوط کی مساواتیں جو بالترتیب ج ا اور ا ب کی تنصیف کریں اور ان پر عمود ہوں یہ ج و ا

$$(لا - لا) (لا - لا) = ص (لا - لا) (لا - لا) \dots\dots (ب)$$

$$اور (لا - لا) (لا - لا) = ص (لا - لا) (لا - لا) \dots\dots (ع)$$

اب اگر مساواتوں (ج)، (د)، (ع) کو یکجا جمع کیا جائے تو ان کا مجموعہ متطابقاً صفر کے مساوی ہوتا ہے اس لئے معلوم ہوا کہ جو خطوط ان مساواتوں سے تعبیر ہوئے ہیں وہ ایک دوسرے پر ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

۲۴۔ ایسی شرط دریافت کر دیتے ہیں نقطہ ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہوں۔ فرض کر کے نقاط کے عمود (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا) ہیں اور جس خط پر یہ تینوں واقع ہوئے ہیں اس کی مساوات لا + لا + ج = ص ہے۔ چونکہ ہر ایک نقطہ کے محدود اس مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لئے

$$\begin{aligned} (۱) \quad & \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = ۰ \dots\dots\dots (۱) \\ & \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = ۰ \dots\dots\dots (ب) \\ & \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = ۰ \dots\dots\dots (ج) \end{aligned}$$

(۱) اور (ب) سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}} = \frac{۱}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}$$

لا، ب، ج کی قیمتوں کو (۳) میں مندرجہ کرنے سے حاصل ہوگا

(۲) لا + ما - لا + ما + لا + ما - لا + ما = ۰ ... (۲)
 اور تین نقطوں کے ہم خط ہونے کی یہی شرط ہے۔
 اوپر کے عمل کے بغیر بھی ہم مساوات (۲) کو معلوم کر سکتے
 تھے کیونکہ یہ صرف اس امر کو تعبیر کرتی ہے کہ اس مثلث کا رقبہ جس کے برابر
 تین نقاط مفروضہ ہیں مفر کے مساوی ہے۔

جو طالب علم مسائل مقصحات سے واقف ہے وہ فوراً پہچان لے گا کہ مساوات
 (۲) مساوات

$$= \begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & ۱ \\ \text{لا} & \text{ما} & ۱ \\ \text{لا} & \text{ما} & ۱ \end{vmatrix}$$

کی محض تفصیل ہے جو مساواتوں (۱) (ب) (ج) میں سے حروف
 لا، ب، ج کو ساکت کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ لا، ب، ج ایک مثلث ہے، زوایا لا اور ب کے داخلی منصف
 اضلاع سب ج اور ج کو نقاط لا اور ج پر قطع کرتے ہیں اور زاویہ ج کا بیرونی
 منصف لا، ب سے قاطع ہوتا ہے، ثابت کرو کہ لا، ب، ج ایک ہی خط پر
 واقع ہیں۔

فرض کرو کہ لا، ب، ج کے محدد بالترتیب (لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما)
 ہیں اور اضلاع ب، ج، ج، لا، لا کے طول بالترتیب لا، ب، ج ہیں،
 تب آفیدہ میں ۶ ش ۳ اور (۱) کو استعمال کرتے سے نقاط

$$\begin{aligned} & \text{د، ع، ن کے مجدد بالترتیب معلوم ہوں گے (دفعہ ۳)} \\ & \left(\frac{\text{ب لار} + \text{ج لام}}{\text{ب} + \text{ج}} \right) \left(\frac{\text{ب مل} + \text{ج لام}}{\text{ب} + \text{ج}} \right) \left(\frac{\text{ج لار} + \text{لام}}{\text{ج} + \text{لام}} \right) \\ & \left(\frac{\text{لار} - \text{ب لام}}{\text{لار} - \text{ب}} \right) \left(\frac{\text{لام} - \text{ب مل}}{\text{لام} - \text{ب}} \right) \left(\frac{\text{لام} - \text{ج لار}}{\text{لام} - \text{ج}} \right) \end{aligned}$$

ان محدودوں کو مساوات (د) میں مندرج کرنے سے نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوگا لیکن پیشاب طالب علم محدودوں کو دیکھنے سے فوراً سمجھ جائے گا کہ ن خط د ع کو خارجاً نسبت

ج + لار + ب سے تقسیم کرتا ہے (دفعہ ۳)
مثال ۲- زیادہ عام صورت میں اگر ایک مثلث کے اضلاع ب ج ج لار ب یا
ان اضلاع محدودہ پر ایسے نقاط لار ب ج لائے جائیں کہ

$$\frac{\text{ب لار}}{\text{لار}} \times \frac{\text{ج ب}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ج لار}}{\text{ج}} = 1$$

تو نقاط لار ب ج ایک ہی خط پر واقع ہوں گے۔
فرض کرو کہ لار ضلع ب ج کو نسبت م : ن سے تقسیم کرتا ہے اور ب ضلع

ج لار کو نسبت ن : ل سے تقسیم کرتا ہے۔
تب بموجب شرائط سوال ج ضلع لار کو لازماً نسبت ل : م سے تقسیم
کرنے لگا۔ مثال سابق کا ثبوت اس صورت پر عین صادق آئے کہ فرق صرف اشتقاق
ہے کہ لار ب ج کی بجائے ل م ن رکھ دینے چاہئیں۔

مشقیں

- ۶۸- ایک خط مستقیم خطوط ۳ لا + ۲ - ۵ = ۰ اور ۳ لا + ۳ + ۴ = ۰ کے
نقطہ تقاطع کو نقطہ (۳، ۱) سے ملاتا ہے اس کی مساوات دریافت کرو۔
۶۹- ایک مثلث کے اضلاع ۳ لا + ۲ = ۰، ۲ لا + ۳ = ۰ اور
۲ لا + ۳ + ۴ = ۰ ہیں، مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ہیں سائیکی
مساواتیں دریافت کرو نیز ان عمودوں کا نقطہ تقاطع دریافت کرو۔

۷۰۔ اوپر کی مثال کے مثلث میں ان خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو مثلث کے رأسوں میں سے مقابل کے اضلاع کے متوازی کھینچے جائیں۔
 ۷۱۔ ایسے خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو ۳ لا + ۴ ما - ۱۱ = ۰ اور ۴ ما - لا - ۱۳ = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گزریں اور انہی خطوط پر بالترتیب عمود ہوں۔

۷۲۔ ثابت کرو کہ ذیل کے مستقیم خط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں

$$(ب + ج) (لا + ۱ ما) = د$$

$$(ج + ۱) (لا + ب) = د$$

$$(۱ + ب) (لا + ج + ما) = د$$

۷۳۔ اگر مثلث کے رأسوں میں سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ ایک ہی نقطہ میں ملتے ہیں۔

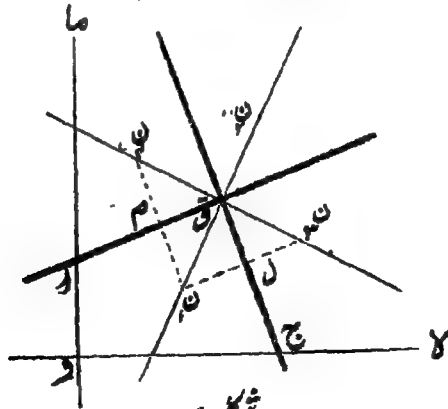
۷۴۔ دو خطوط کی مساواتیں بلحاظ قائم محوروں کے

$$لاجم عم + ماجب عم - ع = ۰ \text{ اور } لاجم عم + ماجب عم - ع = ۰$$

ہیں، ان کے درمیانی زاویوں کے منصفیوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

اگر نقطہ ۱ (لا، ما) کسی ایک منصف پر ہو تو جو عمود نقطہ (لا، ما) سے ہے۔
 ان خطوط پر کھینچے جائیں گے وہ برابر ہونگے اس لئے (موجب دفعہ ۱۶)

$$لاجم عم + ماجب عم - ع = ۰ \pm (لاجم عم + ماجب عم - ع = ۰)$$



شکل ۱۹

پس کسی ایک منصف پر کاہر ایک نقطہ ذیل کی ایک نہ ایک مساوات کو پورا کرتا ہے
 (لاجم عم + ماجب عم - ع = ± (لاجم عم + ماجب عم - ع) ... (۳۴)
 پس یہ مساواتیں خطوط کے دو منصفوں کی ہیں، ایک منصف مثبت علامت لینے
 سے اور دوسرا منفی علامت لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

اب ہم اس دوسری یا مشتبہ علامت کے متعلق تحقیق کرتے ہیں۔
 اگر اوب اور ج د مفروضہ خطوط ہوں اور ن، ن، اور ن، ن نام
 ان کے منصف ہوں تو ایک منصف (ن، ن) دیکھو شکل) ایسے خانہ اوق ج
 میں سے گزریگا جس میں مبدأ واقع ہے، اس منصف کے حصہ ق ن پر کاہر ایک
 نقطہ خطوط مفروضہ سے اسی طرف واقع ہے جس طرف کہ مبدأ ہے۔
 اگر مبدأ سے ان خطوں پر عمود نکالے جائیں تو ہم جانتے ہیں کہ ان کے
 طول ع، اور ع، میں اور یہ طول مبدأ کے محدودوں کو ذیل کے جملوں میں مندرج
 کرنے سے حاصل ہوتے ہیں

-(لاجم عم + ماجب عم - ع) -

-(لاجم عم + ماجب عم - ع) اور

اس سے معلوم ہوا کہ اگر ق ن پر کے کسی نقطہ (لا، ما) سے ان خطوں
 پر عمود نکالے جائیں تو ان کے طول بھی اوپر کے جملات میں لا، مایکجگہ لا، ما
 مندرج کرنے سے حاصل ہونگے

اس لئے ق ن کی مساوات یہ ہوئی

-(لاجم عم + ماجب عم - ع) = -(لاجم عم + ماجب عم - ع)

یا لاجم عم + ماجب عم - ع = لاجم عم + ماجب عم - ع
 پس اگر مساوات (۳۴) میں بائیں طرف کے رکن کے ماقبل مثبت علامت لی جائے
 تو یہ مساوات منصف ن، ق ن کو تعبیر کرے گی جو اس خانہ میں سے گزرتا ہے
 جس میں مبدأ واقع ہے اور اسی طرح کے استدلال سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ منفی
 علامت لینے سے ہم کو جو مساوات حاصل ہوگی وہ منصف ن، ق ن کو تعبیر
 کرے گی (دیکھو شکل)۔

مائل محور۔ اسی طرح سے خطوط مستقیم

$$\text{لاجم عم} + \text{ماجم (سم - عم)} - \text{ع} = ۰$$

$$\text{اور } \text{لاجم عم} + \text{ماجم (سم - عم)} - \text{ع} = ۰$$

کے درمیانی زاویوں کے منصفیوں کی مساواتیں

$$\text{لاجم عم} + \text{ماجم (سم - عم)} - \text{ع} = \pm \{ \text{لاجم عم} + \text{ماجم (سم - عم)} - \text{ع} \} \dots (۳۵)$$

ہیں اور اس میں متبادل علامات کے وہی معنی ہیں جو قائم محوروں کی صورت میں بیان ہوئے۔

$$۲۶ - \text{خطوط } \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = ۰ \text{ اور } \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = ۰$$

کے درمیانی زاویوں کے منصفیوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

دفعہ ۵ کی مدد سے ان مساواتوں کو عمودی صورت میں تبدیل کرو اور دفعہ سابق کے استدلال سے کام لو، اس طرح سے منصفیوں کی مساواتیں قائم محوروں کی صورت میں یہ ہوگی

$$\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = \pm \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}} \dots (۳۶)$$

اور مائل محوروں کی صورت میں یہ ہوگی

$$\frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}} = \pm \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}$$

ہر ایک صورت میں جس علامت کو لینے سے دونوں طرف کی مستقل قیمتیں متفق العلامت ہو جائیں (یعنی دونوں کی علامت ایک ہی ہو جائے) اس علامت سے وہ منصفیت حاصل ہوگا جو مبدأ کے خانہ میں سے گذرتا ہے۔

طالب علم غور سے دیکھے کہ دفعہ ۵ کے جملوں سے مساوات (۳۶) کو تبدیل کرتے وقت دونوں طرف سے جزو ضربی جب سمہ خارج ہو گیا ہے۔

مثال (۱) قائم محوروں کی صورت میں خطوط ۳ لا + ۴ ما = ۷ اور ۸ لا + ۶ ما = ۱۳ کے درمیانی زاویوں کے منصفیت دریافت کرو۔

دونوں منصفوں کی مساواتیں ذیل کے ضابطہ میں شامل ہیں

$$\frac{۱۳ - ۶ + ۸}{۲۶ + ۲۸} \pm = \frac{۳ - ۴ + ۷}{۲۴ + ۲۳} \pm$$

$$(۱۳ - ۶ + ۸) \pm = (۳ - ۴ + ۷) \pm$$

یعنی اس لئے مطلوبہ مساواتیں یہ ہیں

$$۱۳ - ۶ + ۸ = ۳ - ۴ + ۷ \quad \text{اور} \quad ۱۳ + ۶ - ۸ = ۳ + ۴ - ۷$$

مثال (۲) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے زاویوں کے داخلی منصف ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

محدودوں کا مبدأ مثلث کے اندر مقرر کرو اور فرض کرو کہ ب ج، ج ا، ا ب کی مساواتیں بلحاظ قائم محوروں کے یہ ہیں

$$(۱) \dots\dots\dots = ۰ \quad \text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} - ۰ = ۰$$

$$(۲) \dots\dots\dots = ۰ \quad \text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} - ۰ = ۰$$

$$(۳) \dots\dots\dots = ۰ \quad \text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} - ۰ = ۰$$

زاویہ ا کا داخلی منصف اس خانہ میں سے گذرتا ہے جس میں مبدأ واقع ہے، ایسے اسکی مساوات یہ ہے

$$(۴) \dots\dots\dots = ۰ \quad \text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} - ۰ = ۰$$

ازروئے تغافل زوایا ب اور ج کے داخلی منصفوں کی مساواتیں یہ ہونگی

$$(۵) \dots\dots\dots = ۰ \quad \text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} - ۰ = ۰$$

$$(۶) \dots\dots\dots = ۰ \quad \text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} - ۰ = ۰$$

اب چونکہ مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) کے دائیں طرف کے رکتوں کا مجموعہ

متطابقاً صفر ہے اس لئے جو خط ان مساواتوں سے تعمیر ہوتے ہیں وہ ایک ہی نقطہ پر

ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (دفعہ ۲۲)

[مشاہدہ ہو کہ یہ ثبوت اور اقلیدس ص ۶ شش ۴ کا ثبوت اصول میں متطابق ہیں]

۲۷۔ مختصر طریق کتابت محدودوں کے ہندسہ میں اکثر اوقات اعمال جبر پر

مختصر طریق کتابت کی مدد سے سادہ صورت میں پیش کئے جا سکتے ہیں، مثلاً اگر اوپر کی مثال میں رموز عہ، بہ، جہ بالترتیب جلات لاجم عہ + ماجب عہ + ع لاجم عہ + ماجب عہ - ع اور لاجم عہ + ماجب عہ - ع کو تعبیر کریں تو اس طریق کتابت کے موافق مثلث کے اضلاع کی مساواتیں عہ = ۰، بہ = ۰، جہ = ۰ ہونگی اور زوایا، ب، ج کے داخلی منصفوں کی مساواتیں بہ - جہ = ۰، جہ - عہ = ۰، عہ - بہ = ۰ ہونگی، ظاہر ہے کہ آخری تین مساواتوں کے دائیں طرف کے رکنوں کا مجموعہ مطابقتاً صفر ہے پس معلوم ہوا کہ طریق کتابت کا استعمال ثبوت کی نوعیت کو نہیں بدلتا صرف یہ جبر یہ عمل کو مختصر کر دیتا ہے۔

طالب علم کو یاد رکھنا چاہئے کہ منصفوں کی مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) کو مختصر صورت میں لکھنا اس وقت لکھا جاسکتا ہے جبکہ اضلاع کی مساواتیں عمودی صورت میں بیان کی گئی ہوں، مختصر طریق کتابت استعمال کرتے وقت اسکو اس حسالی دستور کی پوری پیروی کرنی چاہئے کہ عہ، بہ، جہ اختصاراً خط مستقیم کی مساوات کی عمودی صورت کے دائیں رکن کے لئے استعمال کئے جائیں یعنی ان رموز کو صرف لاجم عہ + ماجب عہ + ع جیسے جلات کو تعبیر کرنے کے لئے استعمال کیا جائے۔ اگر خط مستقیم کی مساوات کو عام صورت میں لکھا جائے تو ان کے دائیں طرف کے رکنوں کو، یعنی لا + ب + ج جیسے جملوں کو حروف سی، د، سے سے تعبیر کیا جائے۔

مشقیں

۴۴۔ خطوط مستقیم ۳ لا - ۴ ما + ۵ = ۰ اور ۱۲ لا + ۵ ما - ۹ = ۰ کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

۴۵۔ خطوط مستقیم کے دو زوج ذیل میں دئے گئے ہیں، ہر ایک زوج کے درمیانی زاویوں کے منصف معلوم کرو اور ان خطوط کی مساواتیں دریافت کرو جو ان کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملاتے ہیں۔

$$(۱) \quad ۶ = ۳ - لا - ۴ اور ۴ = ۳ - لا - ۶$$

$$(۲) \quad لا + ۳ = ۰ اور ۴ - لا - ۵ = ۰$$

۷۶۔ ایک مثلث کے اضلاع بالترتیب یہ ہیں

$$۲ + ۳ + ۴ = ۹، ۵ + ۱۲ + ۲۰ = ۳۷ اور ۳ + ۹ + ۸ = ۲۰$$

اس کے داخلی منصفوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

۷۷۔ ایک نقطہ ن سے مثلث کے اضلاع پر عمود نکالے گئے ہیں اور ان کے

طول ع، م، د ہیں اگر یہ عمود ایک تعلق $۱ع + ۲ب + ۳م + ۴د = ۰$ کے ذریعہ مربوط ہوں جہاں $۱، ۲، ۳، ۴$ مستقل مقادیر ہیں تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

[طریق مطلوب کی مساوات مندرجہ بالا طریق کتابت کے موافق

$$۱ع + ۲ب + ۳م + ۴د = ۰ ہے اور یہ مساوات درجہ اول ہے]$$

۷۸۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے دو زاویوں کے خارجی منصف اور تیسرے

زاویہ کا داخلی منصف تینوں ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

[مثلث کے اندر کسی نقطہ کو مبدأ قرار دو اور فرض کرو کہ مثلث کے اضلاع

کی مختصر مساواتیں عمودی صورت میں $۱ع = ۰، ۲ب = ۰، ۳م = ۰$ ہیں، زاویاں

اور ب کے خارجی منصفوں کی مساواتیں $۱ع + ۲ب = ۰، ۲ب + ۳م = ۰، ۳م + ۴د = ۰$ ہوں گی

اور ج کے داخلی منصف کی مساوات $۱ع - ۲ب + ۳م - ۴د = ۰$ دفعہ ۳ کی مدد سے مسئلہ

ثابت ہو گا اگر مستقل مقادیر $۱، ۲، ۳، ۴$ بالترتیب $۱، ۱، ۱، ۱$ کے برابر لیا جائیں]

۷۹۔ $۱، ۲، ۳، ۴$ کی تجانس مساوات درجہ دوم دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے

جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ مساوات معاومہ

$$۱ا + ۲ب + ۳ج + ۴د + ۵ه = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

ہے اگر اس کو مافی رقوم میں مساوات درجہ دوم خال کر کے حل کیا جائے تو

$$۱ا = - \frac{۲ب + ۳ج + ۴د + ۵ه}{۱} اور ۲ب = - \frac{۱ا + ۳ج + ۴د + ۵ه}{۲}$$

جو ایسے خطوط مستقیم کی مساواتیں ہیں جو ب میں سے گزرتے ہیں، پس مساوات

(۱) کا طریق یہ دو مستقیم خط ہیں کیونکہ اگر ان میں سے کسی ایک پر کوئی نقطہ لیا جائے تو

اس کے محدود (۱) کو پورا کریں گے۔
 یہ خط حقیقی ہوں گے اگر $\angle \text{اب} < \angle \text{اب}$ ، ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اگر
 $\angle \text{اب} = \angle \text{اب}$ ، خیالی ہوں گے اگر $\angle \text{اب} > \angle \text{اب}$ ۔
 یہ نتائج ہر صورت میں درست ہیں خواہ محور قائم ہوں یا مائل۔
 یاد رہے کہ $\angle \text{اب}$ رقم لا ماکا سر نہیں ہے بلکہ $\angle \text{اب}$ لا ماکا سر ہے۔
 ۲۹۔ جن دو خطوط مستقیم کو مساوات $\angle \text{اب} + \angle \text{اب} = \angle \text{اب}$ ۔
 تعبیر کرتی ہے ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مغروضہ خطوط مستقیم کی مساواتیں $\angle \text{اب} = \angle \text{اب}$ اور $\angle \text{اب} = \angle \text{اب}$ ہیں۔
 اب اگر جملہ $\angle \text{اب} + \angle \text{اب} = \angle \text{اب}$ لا ماکا $\angle \text{اب}$ پر اس غرض سے تقسیم کر دیا جائے
 کہ $\angle \text{اب}$ کا سر ایک ہو جائے تو جملہ $\angle \text{اب} + \angle \text{اب} = \angle \text{اب}$ لا حاصل ہوگا اور یہ لازماً اجزاؤں پر
 $\angle \text{اب}$ اور $\angle \text{اب}$ کے حاصل قریب کے مساوی ہوگا۔

قائم محور۔ اگر خطوں کا درمیانی زاویہ $\angle \text{اب} = \angle \text{اب}$ ہو تو

$$\text{مس فہ} = \frac{\angle \text{اب} - \angle \text{اب}}{\angle \text{اب} + \angle \text{اب}} \quad (\text{دفعہ ۱۹})$$

$$\text{اب} (\angle \text{اب} - \angle \text{اب}) = (\angle \text{اب} + \angle \text{اب}) (\angle \text{اب} - \angle \text{اب}) = \angle \text{اب} (\angle \text{اب} - \angle \text{اب})$$

$$\text{مس فہ} = \pm \frac{\angle \text{اب} - \angle \text{اب}}{\angle \text{اب} + \angle \text{اب}} \quad (\text{۳۸})$$

مشتبہ یا دوہری علامت اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ خطوں کا درمیانی زاویہ $\angle \text{اب}$ ہو سکتا
 یا $\angle \text{اب}$ کا مکمل۔

ان خطوں کے ایک دوسرے پر منطبق ہونے کی یہ شرط ہے کہ

$$\angle \text{اب} = \angle \text{اب} \quad (\text{۳۹})$$

یعنی جملہ $\angle \text{اب} + \angle \text{اب} = \angle \text{اب}$ مریج کامل ہو۔

اور ایک دوسرے پر عمود ہونے کی شرط یہ ہے کہ

$$۱ + ب = ۰ \dots\dots\dots (۴۰)$$

مائل محور۔ اس صورت میں

$$\text{مس فہ} = \frac{(۲ - ۱) \text{ جب سے}}{۱ + (۱ + ۲) \text{ جم سے} + ۲}$$

$$\text{جس سے مس فہ} = \pm \frac{۲ (۲ - ۱) \text{ جب سے}}{۱ + ب - ۲ \text{ جم سے}} \dots\dots\dots (۴۱)$$

ایک دوسرے پر منطبق ہونے کی شرط پہلے کی طرح ہے۔ $۱ + ب = ۰$ ہے

$$\text{عمودیت کی شرط ہے } ۱ + ب - ۲ \text{ جم سے} = ۰ \dots\dots\dots (۴۲)$$

انطباق اور عمودیت کی یہ شرطیں یاد رکھنی چاہئیں۔

۴۳۔ خطوط مستقیم ۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا کے درمیان جو زاویے بنتے ہیں ان کے نصفوں کی مساواتیں معلوم کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔
فرض اگر کہ خطوط ۱ - ۲ لا = ۰ اور ۳ لا - ۴ لا = ۰ ہیں۔

اگر ایک نصف کے کسی نقطہ سے ان خطوط پر عمود نکالے جائیں تو وہ مساوی ہونگے اور

$$\frac{۱ - ۲ لا}{۱ + ۲ لا} = \frac{۳ لا - ۴ لا}{۳ لا + ۴ لا}$$

جہاں اوپر کی علامت ایک منصف سے متعلق ہے اور نیچلی دوسرے سے۔

$$\text{پس مساوات} \frac{(۱ - ۲ لا)}{۱ + ۲ لا} = \frac{(۳ لا - ۴ لا)}{۳ لا + ۴ لا}$$

میں دونوں منصف شامل ہیں۔ یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$(۱ + ۲ لا)(۳ لا - ۴ لا) - (۳ لا + ۴ لا)(۱ - ۲ لا) = ۰$$

$$\begin{aligned}
 & \text{یا } \{ \text{لا}^2 \text{ م}^2 (1 + \text{م}^2) - \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) \} \\
 & = 2 - \text{لا}^2 \text{ م}^2 (1 + \text{م}^2) - \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) + \{ \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) - 1 - \text{م}^2 \} \\
 & = \text{لا}^2 \text{ م}^2 (1 + \text{م}^2) - 2 - \text{لا}^2 \text{ م}^2 (1 + \text{م}^2) + \{ \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) - 1 - \text{م}^2 \} \\
 & = \text{لا}^2 \text{ م}^2 (1 + \text{م}^2) - 2 - \text{لا}^2 \text{ م}^2 (1 + \text{م}^2) + \text{م}^2 (1 + \text{م}^2) - 1 - \text{م}^2 \\
 & \text{لیکن } \text{م}^2 - \text{م}^2 = 0, \quad \frac{5}{2} = \frac{5}{2}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
 & \text{اس لئے مساوات ہو جاتی ہے}
 \end{aligned}$$

$$(\text{لا}^2 - 1) = \left(\frac{5}{2} - 1 \right) = 2 - \text{لا}^2 \text{ م}^2 (1 + \text{م}^2)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{یا } (\text{لا}^2 - 1) = 5 - \text{لا}^2 \text{ م}^2 (1 + \text{م}^2) \\
 & \text{یعنی } \frac{\text{لا}^2 - 1}{5} = \frac{\text{لا}^2 \text{ م}^2 (1 + \text{م}^2)}{5} \dots \dots \dots (۴۳)
 \end{aligned}$$

یہ مساوات نہایت ضروری ہے اور اس شکل میں یہ آسانی سے یاد رکھ سکتی ہے
مثال - خطوط کے زوج ۳ لا^۲ + لا^۲ - ۲ م^۲ = ۰ کے درمیان جو زاویے
بنتے ہیں ان کے مضبوطی کی مساواتیں معلوم کرو۔

$$\text{ضابطہ } \frac{\text{لا}^2 - 1}{2} = \frac{\text{لا}^2 \text{ م}^2}{5} \text{ استعمال کرنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے}$$

$$\frac{\text{لا}^2}{2} = \frac{\text{لا}^2 \text{ م}^2}{5 - 2 \text{ م}^2}$$

$$\text{یا } \text{لا}^2 - 1 = \text{لا}^2 \text{ م}^2 = 0$$

مشقیں

۹۔ جن خطوط مستقیم کی مشترک مساوات لا^۲ - ۵ لا + ۶ م^۲ = ۰
ہے ان کی مساواتیں الگ الگ دریافت کرو۔

۸۰۔ بتاؤ کہ ذیل کی مساواتوں کے کیا طریق ہیں۔

(ا) $۱۰ = ۱۰$ (ب) $۲ = ۲$ (ج) $۱۰ = ۱۰ + ۱۰$

(د) $۱۰ = ۱۰ + ۱۰$ (ه) $۱۰ = ۱۰ + ۱۰ + ۱۰$ (ف) $۱۰ = ۱۰ + ۱۰$

(گ) $(۱۰ - ۱۰) + ۱۰ = ۱۰$ (دس) $۱۰ = ۱۰ + ۱۰ + ۱۰$

۸۱۔ جن خصوص کی مشترک مساوات ۲ لا - ۳ لا + ۱۰ = ہے اُن کا درمیانی زاویہ دریافت کرو، محور قائم الزاویہ ہیں۔

۸۲۔ جن خطوط مستقیم کی مساوات ۱۰ لا - ۱۰ لا = ہے انہیں معلوم کرو اور اُن کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

۸۳۔ جن خطوط کی مساوات ۳ لا - ۹ لا + ۱۰ لا = ہے ان کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

۸۴۔ ثابت کرو کہ خطوط کا جو زوج مساوات ۲ لا + ۲ لا ماقطعہ + ۱۰ = ہے تبصر ہوتا ہے وہ ہمیشہ حقیقی ہے اور زوج کا درمیانی زاویہ عم ہے۔

۸۵۔ خطوط ۱ لا + ۲ لا + ۲ لا + ۱۰ لا = کے درمیانی زاویوں کے جو منصف ہیں اُن کی مساوات سے ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے سے زاویہ قائم بناتے ہیں۔

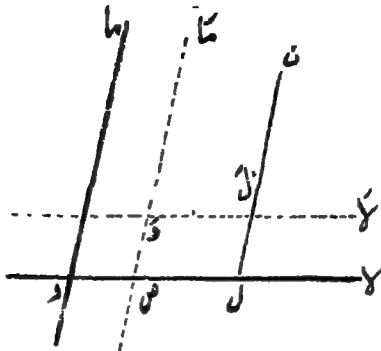
۸۶۔ اگر ۱۰ لا + ۲ لا + ۲ لا + ۱۰ لا = کے درمیانی زاویوں کے منصف وہی ہیں جو محور لا کما کے درمیانی زاویوں کے ہیں اور بنا بریں ایک منصف والا سے وہی زاویہ بناتا ہے جو دوسرا دما سے۔

۳۱۔ محوروں کا بدلنا۔ محوروں کی سمتوں کے بدلنے کے بغیر محدودوں کے مبدأ کے مقام کا بدلنا۔

فرض کرو کہ ولا، دما پرانے محور میں اور ولا، ومانے محور میں جو ولا، دما کے بالترتیب متوازی ہیں۔ نئے مبدأ و کا فصل اور معین و ص و

بلحاظ پرانے محوروں کے کھینچو اور فرض کرو کہ و کے محدودان محوروں کے لحاظ سے (س ک) ہیں یعنی د ص = س ص و ک

فرض کرو کہ و کی نقطہ ہے، بلحاظ پرانے محوروں کے اس کا فصل ول ہے اور معین ل ن



شکل ۲۰

نیز بلحاظ نئے محوروں کے اس کا فاصلہ $د\lambda$ ہے اور میں $ک\lambda$ ۔
فرض کرو اس نقطہ $ن$ کے محدود بلحاظ پرانے اور نئے محوروں کے بالترتیب
(لا، ما) اور (لا، نا) ہیں۔

ہم (لا، ما) کی ایک مساوات کو (لا، نا) کی مساوات متناظرہ میں تبدیل کرنا چاہتے
ہیں اس لئے میں پرانے محدودوں لا، ما کو نئے محدودوں لا، نا کی قوم میں بیان
کرنا چاہیے تاکہ محض قیمتیں مندرجہ کرنے سے ایک مساوات دوسری سے حاصل ہو سکے۔
صریحاً $د\lambda = س + و\lambda$ ، $ن\lambda = ک + و\lambda$ ۔

$$یا \quad لا = لا + س \quad ، \quad ما = ک + و\lambda \quad \dots \dots (۳۴)$$

اس لئے میں صرف لا کی بجائے لا + س اور ما کی بجائے ک + و\lambda اس
مساوات میں لکھنا ہے جسے ہم بدلنا چاہتے ہیں، اس طرح ہمیں لا، ما میں ایک
مساوات حاصل ہوئی ہے۔ اب چونکہ (لا، نا) نئے دائرہ محدود ہیں اس لئے اس
مساوات میں لا، نا کی ذہنوں کو حذف کرنے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے
پس جس مساوات کو ہم بدلنا چاہتے ہیں اس کی تبدیل صرف لا کی بجائے (لا + س) اور
ما کی بجائے (ک + و\lambda) لکھنے سے فوراً ہو سکتی ہے۔

ثبوت بالا ہر دو قائم اور مائل محوروں کی صورت میں درست ہے۔
۳۴۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ درجہ دوم کی عام سے عام مساوات دو خطوط مستقیم
کو تعبیر کرے۔

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ ہے

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} \text{ لا} + ۱ \text{ ب} + ۲ \text{ گ} \text{ لا} + ۲ \text{ ف} + ۱ \text{ ج} = ۰ \dots \dots \dots (۴۵)$$

طالب علم اس مساوات پر غور کرے، دراصل یہ مساوات متشاکل ہے کیونکہ اس کا دایاں رکن جملہ متشاکلہ $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} + ۱ \text{ ب} + ۲ \text{ گ} + ۲ \text{ ف} + ۱ \text{ ج}$ کی ایک صورت ہے جبکہ ۱ کو ایک کے مساوی فرض کر لیا جائے۔ اس بنا پر ف متغیر ہا کے ساتھ لکھا گیا ہے اور گ، لا کے اور ہ، لا ہا کے۔ یہ بھی یاد رہے کہ ۱ لا کا یہ نہیں ہے بلکہ ۲ لا کا سر ہے، اسی طرح ف اور ہ بھی بالترتیب ۲ ہ اور ۲ لا کا سر ہیں۔

اگر مساوات (۴۵) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو فرض کرو کہ یہ خط نقطہ $(۱، ۱)$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں

اس مساوات کو ان محوروں کے لحاظ سے جو $۱، ۱$ میں سے گزرتے ہیں اور پرانے محوروں متوازی ہیں بدل دو۔ اس کی صورت دفعہ اس کی رو سے یہ ہو جائے گی

$$۱ \text{ لا} + ۱ \text{ ہ} - ۲ \text{ لا} + ۱ \text{ ب} + ۱ \text{ گ} + ۱ \text{ ف} + ۲ \text{ ج} = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

$$۲ \text{ ف} + ۱ \text{ ج} + ۱ \text{ ہ} = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

بلحاظ نئے نوروں کے مساوات (۱) دو ایسے خطوط مستقیم کی مساوات ہے جو مبدأ میں سے گزرتے ہیں اس لئے (۱) کا دایاں رکن $۱، ۱$ کا ملتی جلتی جملہ درجہ دوم ہونا چاہیئے۔ اس سے مساوات (۱) میں ۱ لا کا سر، ۱ ہ کا سر اور مستقل رقم لازماً محدود ہونے چاہئیں

$$\text{اس لئے } ۱ \text{ لا} + ۱ \text{ ہ} + ۱ \text{ گ} = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

$$۱ \text{ ہ} + ۱ \text{ ب} + ۱ \text{ ف} = ۰ \dots \dots \dots (۳)$$

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ہ} \text{ لا} + ۱ \text{ ب} + ۲ \text{ گ} \text{ لا} + ۲ \text{ ف} + ۱ \text{ ج} = ۰ \dots \dots \dots (۵)$$

مساوات (۵) اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$۱ \text{ لا} + ۱ \text{ ب} + ۱ \text{ گ} + ۱ \text{ ہ} + ۱ \text{ ف} + ۱ \text{ ج} = ۰$$

$$\text{گ} + ۱ \text{ ف} + ۱ \text{ ج} = ۰ \dots \dots \dots (۶)$$

(۱) ہا کو مساواتوں (۲) (۳) (۶) سے ساقط کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جس سے تجویز کے بعد
 (ب ج + ۲ ف گ ہ - ا ف - ب گ - ج ہ) =

مشقیں

۸۷۔ بتاؤ کہ ذیل کی مساواتیں کیا ہو جائیں گی اگر مبدأ کو نقطہ (۱۱) پر منتقل کر دیا جائے
 (۱) (ا + لا - ما - ۳ لا - ۲ ما + ۲) = (ب) (لا - ما - ۱ - لا + ما =
 (ج) (لا - ما - لا - ما + ۱ = (د) (لا - ما - ۲ لا + ۲ ما =
 ۸۸۔ نقطہ (۱۱) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات

$$\frac{لا}{ا} + \frac{نا}{ب} - ۱ = ۰ \text{ کو تبدیل کرو۔}$$

۸۹۔ نقطہ (ع جم عہ، ع جب عہ) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات لاجم عہ + ما جب عہ = ع کو تبدیل کرو۔
 ۹۰۔ مساوات (ا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = کو نقطہ (گ، ف) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے تبدیل کرو۔

۹۱۔ اگر مساوات (ا + لا + ۲ ما + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ ان کا نقطہ تقاطع
 (ہ ف - ب گ، ہ گ - ا ف) = (ب - ۲ ما - ۲ ف) = ہے۔

[مساواتوں (ب) اور (ج) کو لا، با کے لئے حل کرو]
 ۹۲۔ اگر اوپر کی مساوات خطوط مستقیم کے جوڑے کو تعبیر کرے تو بھی حسب دفعہ ۲۳ سے تبدیل کرو۔

[یہاں بھی اگر نئے مبدأ کے محدود ایسے منتخب کئے جائیں کہ وہ مساواتوں (ب) اور (ج) کو پورا کریں تو بھی تبدیل شدہ مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہونگے لیکن مستقل رقم معدوم ہونے کی بجائے گ لا + ف ما + ج ہوگی جہاں
 لا = (ہ ف - ب گ) اور با = (ہ گ - ا ف) = (ب - ۲ ما - ۲ ف) =

اور تبدیل شدہ مساوات ہوگی

$$لا + ۲ھ + لا + ما + ب + ج + ۲ف + گ - (ف - ب + گ - ج) = [$$

اس نتیجہ کو آئندہ باب ششم کی تہید کے طور پر خیال کر دو جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے وہ پہچان لے گا کہ مثال ۹۲ میں نئے مبدأ کے

$$\text{محد } \frac{گ}{ج} - \frac{ف}{ج} \text{ ہیں}$$

$$\text{اور تبدیل شدہ مساوات } لا + ۲ھ + لا + ما + ب + ج = ۰$$

$$\text{جہاں } = \left| \begin{array}{c} ۱ھ گ \\ ۲ھ ب ف \\ ۳ گ ف ج \end{array} \right| \text{ اور بڑے حروف چھوٹے متناظر}$$

حروف کے مضامین کو تعبیر کرتے ہیں۔

۹۳۔ ثابت کرو کہ مساوات لا۔ ما۔ لا + ۳۔ ۲۔ = خطوط مستقیم کے ایک ایسے جوڑے کو تعبیر کرتی ہے جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔ انہیں معلوم کرو۔

۹۴۔ مساوات (لا + ما۔ ۱)۔ ۲۔ لا = کا طریقہ کھینچو اور جن خطوط مستقیم کو یہ مساوات تعبیر کرتی ہے ان کا نقطہ تقاطع دریافت کرو۔

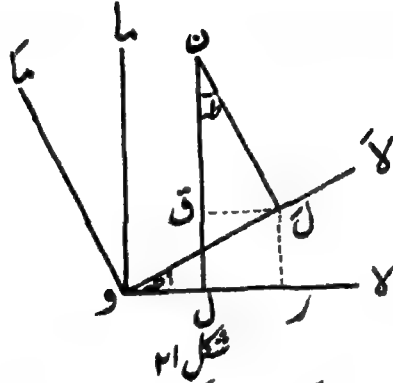
۹۵۔ ثابت کرو کہ مساوات لا۔ ۵۔ لا + ما + ۴۔ لا + ما۔ ۲۔ = خطوط مستقیم کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے، ان کا نقطہ تقاطع اور خطوط کی مساویات معلوم کرو۔

۹۶۔ مبدأ کو نقطہ (۱، ۲) پر لیجانے سے ثابت کرو کہ مساوات لا + ما۔ لا۔ ۵ + ۵۔ ۵۔ = خطوط مستقیم کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے پھر مبدأ کو اسکے ابتدائی مقام پر منتقل کرنے سے ثابت کرو کہ ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصفین کی

$$\text{مساوات } لا۔ ۲۔ لا + ما۔ ۱۰۔ لا + ۵۔ = ۰ \text{ ہے}$$

۹۷۔ بتاؤ کہ مبدأ کو کس نقطہ پر منتقل کرنے سے مساوات

لا + لا ما + ما ۲ - لا - لا ۵ + ما ۱۲ = کی تبدیل شدہ صورت میں درجہ اول کی رقتیں خارج کر دی جاسکتی ہیں اور اس صورت میں تبدیل شدہ مساوات کیا ہوگی۔
 ۳۳ = مبدأ کو بدلنے کے بغیر قائم محوروں کے ایک نظام سے دوسرے میں بدلنا۔



فرض کرو کہ نئے محاور و لا ، و ما پرانے محاور و لا ، و ما کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ کسی نقطہ ن کے محدود پرانے محوروں کے لحاظ سے (لا ، ما) ہیں اور نئے محوروں کے لحاظ سے (لا ، ما) ، جیسا دفعہ اس میں بتایا جا چکا ہے ہم یہاں صرف لا ، ما کو لا ، ما کی رقوم میں بیان کروینا چاہتے ہیں۔
 نقطہ ن سے و لا اور و لا پر عمود ن ل اور ن ل نکالو اور و لا پر عمود ل ر اور ن ل پر عمود ل ق کھینچو۔

$$\begin{aligned} \text{تب } \text{ول} &= \text{ور} - \text{ق ل} \\ \text{ن ل} &= \text{ر ل} + \text{ق ن} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{لا} = \text{لا جم طہ} - \text{ما جب طہ} \\ \text{ما} = \text{لا جب طہ} + \text{ما جم طہ} \end{cases} \dots \dots (۲۷)$$

پس زبروں کو حذف کرنے سے تبدیل شدہ مساوات اصلی مساوات میں لا کی بجائے (لا جم طہ - ما جب طہ) اور ما کی بجائے (لا جب طہ + ما جم طہ) لکھنے سے حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ اگر نیسبدا (ھ، ک) ہو اور نئے قائم محوریہ قائم محوروں کے ساتھ زاویہ طہ بنائیں تو ثابت کرو کہ ایک نقطہ کے پرانے محدود (لا، ما) اسی نقطہ کے نئے محدودوں (لا، ما) کے ساتھ ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ مربوط ہوں گے۔

$$\text{لا} = \text{ھ} + \text{لاجم طہ} - \text{ما جب طہ}$$

$$\text{ما} = \text{ک} + \text{لا جب طہ} + \text{ما جم طہ}$$

[پہلے (ھ، ک) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے بدلو
پھر محوروں کو زاویہ طہ میں پھراؤ، یا سیدھا شکل سے حاصل کرو]
مثال ۲۔ اگر پرانے محوروں کو جو قائم ہیں زاویہ ۵۴° میں سے پھرایا جائے تو بتاؤ
کہ مساوات لا + ۴ = لا ما + ما = کیا ہو جائے گی۔

یہاں ۴ = ۵۴°

$$\text{لا} = \frac{\text{لا} - \text{ما}}{۲}, \text{ما} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲}$$

$$\text{اس لئے } (\text{لا} - \text{ما}) + ۴(\text{لا} - \text{ما}) + (\text{لا} + \text{ما}) + ۴(\text{لا} + \text{ما}) =$$

$$\text{یا } (\text{لا} - \text{ما}) + ۴(\text{لا} - \text{ما}) + (\text{لا} + \text{ما}) =$$

$$\text{یعنی } ۶\text{لا} - ۲\text{ما} = ۵\text{لا} + ۳\text{ما}$$

ظاہر ہے کہ جن دو خطوط کو یہ مساواتیں تعبیر کرتی ہیں وہ ولا کے ساتھ اسکے دونوں جانب ۶۰° کے زاوے بناتے

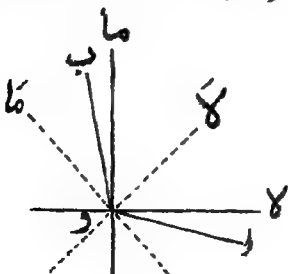
ہیں۔ پس اگر ولا، وب یہ خط ہوں تو

$$\text{لا ولا} = \text{ب ولا} = ۶۰^\circ$$

$$\text{لا ولا} = ۱۵^\circ, \text{ب وما} = ۱۵^\circ$$

جس سے خطوط کے مقام پرانے

محوروں کے لحاظ سے معلوم ہوتے ہیں۔



طالب علم کو لاکھ رقوم میں معلوم کرنے سے اس کی تصدیق کرے کہ مساوات $لا + م + لا + م = م + م$ ۔ دو ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جن میں سے ایک $ولا$ کے ساتھ ۱۵ کا زاویہ بناتا ہے اور دوسرا $وما$ کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے۔

مشقیں

۹۸۔ اگر نیا مبدأ نقطہ $(-۱، ۱)$ پر لیا جائے تو بتاؤ کہ ذیل کی مساواتیں کیا ہو جائیں گی

$$(۱) لا = م \quad (۲) م = لا \quad (۳) لا + م = م + لا \quad (۴) لا = لا$$

$$(۵) لا - م = م - لا \quad (۶) لا + م = م + لا$$

$$(۷) لا + م = م + لا \quad (۸) لا + م = م + لا$$

۹۹۔ اگر محوروں کو بالترتیب زوایا $(۱) ۳۰^\circ$ $(۲) ۲۵^\circ$ میں پھرا دیا جائے تو مساواتوں کی تحویل کے لئے متناظر ضابطے کیا ہوں گے۔

۱۰۰۔ اگر محوروں کو زاویہ ۳۰° میں پھرا دیا جائے تو پرانے محدودوں کو نئے محدودوں کی رقوم میں اور نئے محدودوں کو پرانے محدودوں کی رقوم میں بیان کرو۔

۱۰۱۔ اگر محوروں کو زاویہ ۳۰° میں پھرا دیا جائے تو بتاؤ کہ مساوات $لا + لا = م + م$ کیا ہو جائے گی۔

۱۰۲۔ محوروں کو زاویہ قائمہ میں پھرانے کے لئے تحویل ضابطے کیا ہوں گے، ابتدائی اصولوں سے انکی تصدیق کرو۔

۱۰۳۔ ہم نے دیکھا ہے کہ محور بدلتے وقت جو تحویلیں عمل میں آتی ہیں ان کے لئے ہم بالعموم پرانے محدودوں $(لا، م)$ کو نئے محدودوں $(لا، م)$ کی رقوم میں

بیان کرتے ہیں اور اسی میں سہولت ہے، لیکن ایک صورت ایسی ہے جس میں $(لا، م)$ کو نقطہ دیکھنے سے ہی $(لا، م)$ کی رقوم میں بیان کرنا زیادہ مناسب ہے۔

فرض کرو کہ ہمیں ایک مساوات قائمہ محوروں کے لحاظ سے صورت ذیل میں دی گئی ہے

$$(لا + جم) عم + (ما + جم) عم = (لا + جم) عم + (ما + جم) عم$$

جہاں $عم - عم = عم$ اور ہم خطوط مستقیم

لاجم عہ + ماجب عہ - ع = اور لاجم عہ + ماجب عہ - ع =
کو بالترتیب نئے محور لا اور ما مانکر اوپر کی مساوات کو ان کے لحاظ سے
تحويل کرنا چاہتے ہیں (بادر ہے کہ یہ نئے محور قائم نہیں ہوں گے جب تک کہ
عہ - عہ = $\frac{1}{2}$ کے مساوی نہ ہو)

پس لا = نقطہ (لا، ما) سے نئے محور ما پر عمود

$$= \pm (\text{لاجم عہ} + \text{ماجب عہ} - \text{عہ})$$

$$\text{اس طرح سے ما} = \pm (\text{لاجم عہ} + \text{ماجب عہ} - \text{عہ})$$

اس لئے اب مساوات ہو جائے گی

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{ب} = \text{لا} = \text{لا} + \text{ب}$$

یا زبریں حذف کرنے سے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}} + \frac{\text{ب}^2}{\text{لا}} = 1$$

اوپر کی مشتبہ علامت سے یہ فرادہ ہے کہ ہم اپنے نئے محوروں کی کسی سمت کو
مثبت سمت قرار دے سکتے ہیں، لیکن ہم دیکھینگے کہ اکثر اوقات تحويل شدہ مساوات
میں لا، ما کی صرف جفت قوتیں واقع ہوں گی یعنی منحنی ہر دو نئے محوروں کے
لحاظ سے متشکل ہوگا، ایسی صورت میں مشتبہ علامت کا سوال پیدا ہی نہیں ہوگا
ایسی تحويل عمل میں لاتے وقت طالب علم کو یاد رکھنا چاہئے کہ مجوزہ نئے محور
ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان کی مساواتیں عمودی صورت میں
لائی گئی ہیں۔

مثال۔ مساوات (۳ لا - ۴ ما - ۱۰) + (۴ لا + ۳ ما + ۱۵) = ۲۵ (۱)
کو اسی طرح سے تحويل کرو (محور قائم ہیں)

$$\text{خطوط مستقیم ۳ لا - ۴ ما - ۱۰} = ۰, \text{ ۴ لا + ۳ ما + ۱۵} = ۰$$

صریحاً ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں کیونکہ ایک خط کی مساوات دوسرے
سے لا، ما کے سروں کا تبادلہ کرنے اور ان میں سے ایک کی علامت بدلنے سے
حاصل ہوتی ہے، پہلے خط کو نیا محور لا اور دوسرے کو نیا محور ما مقرر کرو، ان
مساواتوں کو عمودی صورت میں لانے کے لئے ہمیں ہر خطوط و حدانی کے اندر کی

رقوم کو $\sqrt{۳۵} + \sqrt{۲۵}$ یا $\sqrt{۵}$ پر تقسیم کرنا چاہئے، اس طرح مساوات (۱) ہو جائے گی

$$۱ = \left(\frac{۳}{۵} - \frac{۱}{۵} \right) + \left(\frac{۲}{۵} - \frac{۱}{۵} \right) + \left(\frac{۳}{۵} + \frac{۱}{۵} \right) = ۱$$

نئے محوروں کے لحاظ سے اس کی تحویل کرنے سے یہ ہو جاتی ہے

$$\sqrt{۳۵} + \sqrt{۲۵} = ۱ \text{ اس لئے نئی مساوات ہے } \sqrt{۳۵} + \sqrt{۲۵} = ۱$$

مشق

$$۱۰۳ - \text{خطوط } ۵ \text{ لا } ۱۲ - ۳۹ = ۰ \text{ اور } ۱۲ - ۵ - ۵۲ = ۰$$

کو بالترتیب نئے محاور لا اور سا مان کر (کاظم محوروں کے لحاظ سے)

$$\text{مساوات } (۵ \text{ لا } ۱۲ - ۳۹ = ۰) \text{ اور } (۱۲ - ۵ - ۵۲ = ۰)$$

کو بدلواور نئے محور سا کی اس جانب کو جس میں پرانا مبداء واقع ہے اپنی مثبت جانب قرار دو۔

۵۳۔ محور وکی عام سے عام تبدیلی میں پرانے محوروں کی بجائے نئے محوروں کے خطی تفاعل مندرج کرتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ پرانے محور قائم ہیں۔

فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ ہے، پرانے محور و لا، و سا ہیں اور نئے محور و لا، و سا ہیں۔

فرض کرو کہ نئے محوروں کی مساواتیں بلحاظ پرانے محوروں کے

$$\text{ل لا } + \text{ص ما } + \text{ن} = ۰, \text{ ل لا } + \text{ص ما } + \text{ن} = ۰$$

ہیں اور نئے محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔

تب ما جب سہ = ن سے و لا پر عمود

$$\frac{\text{ل لا } + \text{ص ما } + \text{ن}}{\text{ل لا } + \text{ص ما } + \text{ن}} = \pm$$

اسی طرح سے لاجب سہ = $\pm \frac{\text{ل لا } + \text{ص ما } + \text{ن}}{\text{ل لا } + \text{ص ما } + \text{ن}}$ [اس سے قبل مشتقہ علامت کے معنی بیان کر چکے ہیں]

اس لئے لا، ما محدودوں لا، ما کے خطی تفاعل ہیں یعنی
 $لا = ف + لا + ق + ما + ر، ما = ف + لا + ق + ما + ر$ پس لا، ما کے لئے
 حل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا، مانے محدودوں لا، ما کے خطی تفاعل ہیں۔
 (۲) فرض کرو کہ پرانے محور مائل ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ صہ بنائے ہیں
 ثبوت مندرجہ بالا میں صرف اتنے تغیر کی ضرورت ہے کہ ما جب صہ اور
 لا جب صہ کے لئے جو جملے اوپر معلوم کئے گئے ہیں ان کے نسب نماؤں
 میں علامت جذر کے اندر ل + صہ اور ل + صہ کی بجائے بالترتیب
 $ل + صہ - ۲ ل، صہ اور ل + صہ + ۲ ل، صہ$ جم صہ
 ہونا چاہیئے۔

۳۶۔ محوروں کی کسی قسم کی تبدیلی سے مساوات کا درجہ نہیں بدل سکتا۔
 (۱) درجہ بڑھ نہیں سکتا، فرض کرو کہ بڑے سے بڑے درجہ کی رقم لا، ما

ہے، اس کی بجائے ہیں اس شکل کا جملہ
 $(ف + لا + ق + ما + ر) \times (ف + لا + ق + ما + ر)$ رکھنا ہوگا اور ہم دیکھتے
 ہیں کہ اس جملہ میں بھی لا، ما میں جو بڑے سے بڑے درجہ کی رقم ہے اس کا درجہ
 ل + صہ ہے جیسا کہ رقم لا، ما میں۔

(۲) درجہ کم نہیں ہو سکتا، کیونکہ اگر تحویل کے بعد پھر ہم اصلی محوروں پر واپس آنا
 چاہیں تو ہمیں لازماً اصلی مساوات حاصل ہونی چاہئے کیونکہ اس طرح کی تحویل سے درجہ
 بڑھ جائے گا اور چونکہ لا، ما محدودوں لا، ما کے خطی تفاعل ہیں اس لئے
 (۱) کی رو سے یہ ناممکن ہے۔

۳۷۔ اگر محوروں کی کسی قسم کی تبدیلی سے جبکہ مبداء کو نہ بدلا جائے جسملہ
 $لا + ۲ ل، صہ لا + ما + ب، ما، لا + ۲ ل، صہ لا + ما + ب، ما$ ہو جائے تو
 $لا + ب - ۲ ل، صہ جم صہ = لا + ب - ۲ ل، صہ جم صہ$

جب صہ

جب صہ

لا + ب - ۲ ل، صہ

لا + ب - ۲ ل، صہ

اور

جب صہ

جب صہ

جہاں سہ اور سہہ دونوں صورتوں میں محوروں کے درمیانی زاوے ہیں۔
 جملہ $(لا + ما + ۲ لا)$ ما جم سہ مبدأ سے نقطہ $(لا، ما)$ کے فاصلہ
 کے مربع کو تعبیر کرتا ہے، اور یہ فاصلہ نہیں بدلتا کیونکہ مبدأ دونوں صورتوں میں وہی رہتا ہے
 اس لئے جملہ $(لا + ما + ۲ لا)$ ما جم سہ کی تبدیل شدہ صورت
 $(لا + ما + ۲ لا)$ ما جم سہ ہوگی

اس لئے مفروضات کی رو سے

$(لا + ۲ لا + ما + ب + لا)$ $(لا + ما + ۲ لا)$ ما جم سہ $(لا)$
 تحویل کے بعد

$(لا + ۲ لا + ما + ب + لا)$ $(لا + ما + ۲ لا)$ ما جم سہ $(ب)$
 ہو جائے گا۔

اب اگر $(لا)$ مربع کامل ہو یعنی $(ف لا + ق ما)$ کی شکل کا ہو تو جملہ $(ب)$
 بھی لازم مربع کامل ہوگا کیونکہ مساوات کو تحویل کرنے میں ہم $(ف لا + ق ما)$
 کی بجائے $لا$ کا ایک جملہ درجہ اول مندرج کرتے ہیں (دفعہ ۳۵)
 پس $(لا)$ اور $(ب)$ کے الگ الگ مربع کامل ہونے کی شرائط

$$(لا + لا) (ب + ب) - (لا + لا) (ب + ب) = ۰$$

$$(لا + لا) (ب + ب) - (لا + لا) (ب + ب) = ۰$$

سے حل کرنے پر لہ کی وہی قیمت حاصل ہونی چاہیئے۔

اس لئے لہ، لہ کے سروں اور مستقل ارقام کا مقابلہ کرنے سے

$$\frac{جب^۲ سہ}{جب^۲ سہ} = \frac{لا + ب - ۲ لا + ب - ۲ لا}{لا + ب - ۲ لا + ب - ۲ لا}$$

$$\frac{لا + ب - ۲ لا + ب - ۲ لا}{جب^۲ سہ} = \frac{لا + ب - ۲ لا + ب - ۲ لا}{جب^۲ سہ}$$

..... (۳۶)

$$\frac{لا + ب - ۲ لا + ب - ۲ لا}{جب^۲ سہ} = \frac{لا + ب - ۲ لا + ب - ۲ لا}{جب^۲ سہ}$$

نتیجہ صریح اگر محوروں کے دونوں نظم علی القوائم ہوں تو

لو + ب = لو + ب اور لو ب - ھ = لو ب - ھ (۴۸)

غیر متغییر لٹ - مسئلہ بالا کو ایک مختلف طرح سے ہم بیان کر سکتے ہیں، اوپر کے نتائج سے یہ مراد ہے کہ

جملات $\frac{1+2-3}{\text{جسے سمجھو}}$ اور $\frac{1-2-3}{\text{جسے سمجھو}}$

محوروں کو بدلنے کے بعد اپنے متناظر جملات کے مساوی رہتے ہیں یعنی انکی قیمتیں محوروں کے بدلنے سے نہیں بدلتیں، اس لئے ان کو غیر متغیرات کہتے ہیں۔

۳۸۔ اگر ان نقاط کو جہاں خط مستقیم ل لا + م + ن =۔ منحنی سے
لا + ۲ سے لا + م + ب + ۲ گ لا + ۲ ف + م + ج =۔ سے ملتا،
مبدأ کے ساتھ خطوط مستقیم کے ذریعہ طرایا جائے تو ان خطوط کی مساوات معلوم
کرو۔

قاعدہ = دوسری مساوات کو پہلی مساوات کی مدد سے جس کو اس شکل

$$L = \frac{M + m}{2}$$
 میں لکھا جاسکتا ہے بلحاظ لا، م کے متجانس بناؤ۔

اس طرح $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right)$ ج

حاصل ہوگی اور یہ مطلوبہ مساوات ہے کیونکہ یہ (لا، ما) میں درجہ دوم کی
ایک متجانس مساوات ہونے کی وجہ سے مساویں سے گزرنے والے دو خطوط
مستقیم بنیں گے۔ نیز جہاں خط مستقیم منحنی کو قطع کرتا ہے ان نقطوں کے
نجد بھی اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ اس لیے (لا) مطلوبہ مساوات ہے
مثال۔ اگر ان نقاط کو جہاں خط مستقیم لا + ما + ۲ = ۰ منحنی
لا + لا + ما + لا + ۳ + ما + ۱ = ۰ سے ملتا ہے مساویں کے ساتھ خطوط
مستقیم کے ذریعہ ملایا جائے تو ان خطوط کی مساوات معلوم کرو۔

یہاں $1 = \frac{لا + ما}{۲}$ اور اس لئے متجانس مساوات ہے

$$\begin{aligned} لا + لا + ما + ما + (لا + لا) - (ما + ما) &= ۲ \left(\frac{لا + لا}{۲} \right) + \left(\frac{ما + ما}{۲} \right) - ۲ \\ &= ۲(لا + لا) + (ما + ما) - ۲(ما + ما) \\ &= ۲(لا + لا) - ۲(ما + ما) \\ &= ۲(لا - ما) \\ &= ۲(لا - ما) \\ &= ۲(لا - ما) \\ &= ۲(لا - ما) \end{aligned}$$

مشقیں

۱۰۴۔ جن نقاط پر خط مستقیم $لا + ما = ۲$ اور $لا + لا = ۲$ سے ملتا ہے ان کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔
 ۱۰۵۔ جن نقاط پر خط مستقیم $لا + ما = ۵$ اور $لا + لا = ۵$ سے ملتا ہے ان کو مبدأ سے ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۶۔ $ما = ۳$ اور $لا = ۳$ کے نقاط تقاطع اور مبدأ کو ملانے والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو اپنے نتیجہ کی تشریح کرو۔

توضیحی مثالیں

(۱) اور ب دو ثابت نقطے ہیں، ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے ہر مقام کے لئے $ا + ن$ ب ایک مستقل مقدار ہے، اس کا طریق معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $ا + ن$ ب = ج، ا ب کو محور لا فرض کرو اور تشاکل کے لحاظ سے اس کے نقطہ نصف و کو مبدأ قرار دو، نیز فرض کرو کہ محور قائم ہیں فرض کرو کہ ا ب کا طول ۲ ہے، تب ا کے محدد (ا، -) اور ب کے (ا، -) ہوں گے، فرض کرو کہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں

تب ن^۱ = (لا + ل^۲) + م^۱ ، تب ب^۱ = (لا - ل^۲) + م^۱

$$n = n' + n'' = (n_1' + n_2' + n_3') + (n_1'' + n_2'' + n_3'')$$
$$71 - 5 - \frac{1}{2} = 66 \frac{1}{2} \therefore$$

یعنی $ON = \frac{1}{2} \text{ ج} - \frac{1}{2} \text{ ج}$ یعنی ON کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز O ہے۔

(۲) مبدئیں سے گزرنے والے دوائیے خطوط کی مساوات معلوم کر جو بالترتیب

خطوط ۱ + ۲ = ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ پر نمود ہوں۔ (مخبر قائم ہیں)

فرض کرو کہ معلومہ خطوط یقیناً - م، لا = م، م - م، لا = م ہیں

$$\text{یعنی } م_1 + م_2 = \frac{م_2}{ب} ، م_1 م_2 = \frac{1}{ب}$$

ایسے خطوط جو ان پر بالترتیب عمود ہوں انکی مساواتیں

م + لا = اور م + لا = ہوگی [مسئلہ ۱۹]

جن سے مساوات (م + لا) (م + لا) =

يعني م، م، م + م + م + لا + لا =

حاصل ہوتی ہے۔

اب م + م + م اور م م کی قیمتیں مندرجہ کرنے سے مطلوبہ مساوات

بلا۔ ۲۔ لا ما + لا = حاصل ہوتی ہے۔

(۳) اگر آپ کو معلوم محدود خطوط مستقیم میں ایک نقطہ ن اس طرح

حرکت کرتا ہے کہ رقبوں ۱ ن و ۲ ب ن ب کا مجموعہ مستقل رہتا ہے ۱ ن کا طرئی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ یہ مجموعہ ۵ ہے، نیز فرض کرو کہ اول باب نقطہ و پر

قطع کرتے ہیں۔ ۱۱۹، وب ب کو بالترتیب محور لا اور ما قرار دے

بالعموم یہ محور مائل ہوں گے، فرض کرو کہ ان کا زاویہ میلان θ ہے۔ فرض کرو کہ

و۱ = ا، و۲ = ب، وب = پ، وب = ت نیز فرض کرو کہ

وَبِجَاءِ هُوَ مِنْهُ أَوْ يَكُونُ بِجَاءِ يُخَالِفُ بِهِ نِهَايَةَ مَا لَمْ يَكُنْ لَكَ بِهِ شَأْنٌ فَأَمَّا بِنِعْمَةِ رَبِّكَ فَحَدِّثْ

ہیں جبکہ یہ مثبت رجب میں ہو، اوپر کے مفروضات کی بناء پر مثلث Δ کے راسوں Δ ، Δ ، Δ کے مجدد جو گھڑی کی سوئیوں کی مخالف سمت میں واقع ہوں گے (لا، ما) (لا، ما) ہوں گے۔

اس لئے رقبہ $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ما} \times (\Delta - \Delta)$ جب سہ (دفعہ ۳)
اسی طرح سے رقبہ $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{لا} \times (\Delta - \Delta)$ جب سہ
 $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{ما} \times (\Delta - \Delta) + \frac{1}{2} \times \text{لا} \times (\Delta - \Delta)$ جب سہ Δ

یا $\frac{\Delta}{\Delta - \Delta} = \frac{\text{ما}}{\Delta - \Delta} + \frac{\text{لا}}{\Delta - \Delta}$ (۱)
جو ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو

(۲) $\frac{\Delta}{\Delta - \Delta} = \frac{\text{ما}}{\Delta - \Delta} + \frac{\text{لا}}{\Delta - \Delta}$ کے متوازی ہے۔

نوٹ جب Δ ، Δ کو عبور کرتا ہے تو ماضی ہو جاتا ہے اور تحلیلی عمل میں رقبہ Δ ، Δ ماضی ہو جاتا ہے اور راس Δ ، Δ اب سمت ساعت میں واقع ہوتے ہیں، پس طریق کے اس حصہ کی ہندسی تشریح کے لئے ہمیں سوال مذکور کو اس طرح بیان کرنا ہوگا۔

رقبوں Δ ، Δ اور Δ ب ب کا فرق جبکہ سرن مقدار کو ملحوظ رکھا جائے اور علامت سے قطع نظر کی جائے Δ کے مساوی ہے۔

(۳) ایک جھنڈا Δ ایک عمودی ٹیلہ Δ پر قائم ہے اور اس کے محاذی دونوں

Δ اور Δ پر وہی زاویہ Δ بناتا ہے جہاں Δ اور Δ دونوں ٹیلہ کے پائیں

و میں سے گزرنے والے افقی خط مستقیم پر واقع ہیں اور ان کے فاصلے Δ سے

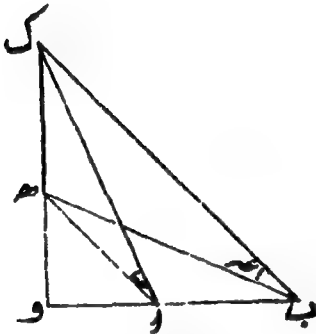
بالترتیب Δ ، Δ ہیں، ثابت کرو کہ جھنڈے کی بلندی Δ (ب) مس Δ ہے

و Δ کو محور Δ اور Δ کو محور Δ قرار دو، یہ محور قائم الزاویہ ہوں گے۔
تب $\Delta = \Delta$ ، $\Delta = \Delta$ ، $\Delta = \Delta$ فرض کرو کہ $\Delta = \Delta$ ، $\Delta = \Delta$ ، $\Delta = \Delta$ پس Δ اور Δ کے مجدد Δ (ج) اور Δ (ج) ہوں گے۔

ہے کہ خط و اب پر کے نقطہ (لا) کے ساتھ ملانے والے خط مستقیم کی مساوات ہوگی

$$(دفعہ ۱۰) \quad ۱ = \frac{لا}{ج} + \frac{با}{ج}$$

ک کو اسی نقطہ سے ملانے والے خط کی مساوات



$$۱ = \frac{لا}{ج} + \frac{با}{ج}$$

ہوگی۔ اور ان دو خطوں میں جو زاویہ قائمہ بنتا ہے وہ مساوات ذیل سے معلوم ہوگا

$$\text{مس فہ} = \frac{\frac{ج}{لا} + \frac{ج+ف}{لا}}{۱ + \frac{ج(ج+ف)}{لا^2}} = \frac{\frac{ج}{لا} + \frac{ج+ف}{لا}}{\frac{لا^2 + ج(ج+ف)}{لا^2}} \quad (دفعہ ۱۹)$$

یا (لا) - (لا) ف مم فہ + ج ف + ج = (۱)
شرائط سوال کے بموجب اگر فہ = عہ تو (لا) کی اس مساوات درجہ دوم کی دو اصلیں (۱) اور (۲) ہیں

$$۱ + با = اصلوں کا مجموعہ جبکہ فہ = عہ$$

$$= ف مم عہ$$

جس سے نتیجہ مطلوب حاصل ہوتا ہے۔

[ملاحظہ ہو کہ (لا) کی دو الگ الگ قیمتیں نکالنے کے لئے مساوات درجہ دوم کو حل کرنا ضروری نہیں]

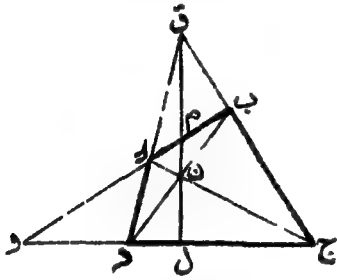
(۵) (با) ج د ایک ذواربتہ الاضلاع ہے، (با) ج د ایک دوسرے کو نقطہ و پر قطع کرتے ہیں، (ا ج) ب د نقطہ ن پر اور (د) ب ج

نقطہ نق پر، نق، لب کو کم پر اور ج د کو ل پر کاٹتا ہے

$$\text{ثابت کرو کہ } \frac{ل}{ا} = \frac{ل}{ب} + \frac{ا}{ب}، \frac{م}{و} = \frac{ا}{ب} + \frac{ا}{ج}، \frac{و}{ل} = \frac{ا}{د} + \frac{ا}{ج}$$

فرض کرو کہ $ا = ل$ ، $ا = ب$ ، $ا = ج$ ، $ا = د$ ، $ا = م$

اور لب اور وج د کو محور لا اور ما فرض کرو، یہ محورائل ہوں گے۔
اد کی مساوات ہے



شکل ۲۴

$$\frac{ل}{ا} + \frac{ا}{ب} = ۱ \dots\dots\dots (ا)$$

$$\text{ب ج کی } \frac{ل}{ا} + \frac{ا}{ج} = ۱ \dots\dots\dots (ب)$$

$$\text{وج کی } \frac{ل}{ا} + \frac{ا}{ج} = ۱ \dots\dots\dots (ج)$$

$$\text{اور ب د کی } \frac{ل}{ا} + \frac{ا}{د} = ۱ \dots\dots\dots (د) \quad [\text{دفعہ ۱۰ د}]$$

چونکہ نق خطوں اد اور ب ج کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے اس لئے
اس کی مساوات فیصل کی شکل کی ہونی چاہیے

$$\left(\frac{ل}{ا} + \frac{ا}{د} \right) + \left(۱ - \frac{ا}{ج} + \frac{ل}{ب} \right) = ۱ \dots\dots\dots (ع)$$

نیز نق خطوں وج اور ب د کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے اس لئے

$$\text{اسکی مساوات اس شکل } \left(\frac{ل}{ا} + \frac{ا}{ج} \right) + \left(۱ - \frac{ا}{د} + \frac{ل}{ب} \right) = ۱ \dots\dots\dots (ف)$$

کی ہونی چاہیے۔ نق کی مساوات حاصل کرنے کے لئے ہمیں ک اور ک
کو اس طرح منتخب کرنا چاہئے کہ (ع) اور (ف) ایک ہی خط مستقیم کو تعبیر کریں۔
اس سے لازم آتا ہے کہ ک = ا اور ک = ا

اس لئے ن ق کی سادات ہے

$$لا (\frac{1}{ر} + \frac{1}{ب}) + ما (\frac{1}{ج} + \frac{1}{د}) - ۲ = ۰$$

جہاں ن ق، لب کو کاٹتا ہے اس نقطہ کا لا = وم اور ما = ۰۔

$$اس لئے وم = \frac{1}{ر} + \frac{1}{ب} اور اسی طرح سے دل = \frac{1}{ج} + \frac{1}{د}$$

باب اول پر متفرق مشقیں

۱۰۷۔ (۱، ۱) اور (۲، ۳) کے ملانے والے خط کو جو نقاط داخلاً نسبت ۱:۲ سے اور غاراً نسبت ۳:۱ سے تقسیم کرتے ہیں ان کے محور معلوم کرو۔
۱۰۸۔ ثابت کرو کہ خواہ محور قائم ہوں یا مائل (لا، ما) اور (لا، ما) کو ملانے والے خط کی محور ما تنصیف کرتا ہے۔

۱۰۹۔ ذیل کے طرق مرتبہ کرو (۱) طہ = $\frac{1}{2}$ (۲) ر = $\frac{3}{4}$ (۳) جبب ۲ طہ = ۰۔
۱۱۰۔ ایک متحرک نقطہ اور (۴، ۰) کے درمیانی فاصلہ کا مربع ہمیشہ اتنے فاصلہ کے مربع کا چار گنا ہوتا ہے جو متحرک نقطہ اور (۱، ۰) کے درمیان ہو۔ نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۱۱۱۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے فاصلوں کے مربعات مساوی ہوں۔
(۴، ۳) سے مساوی ہوں۔

۱۱۲۔ مساوات $لا = ۹$ ما کا طریق دریافت کرو۔

۱۱۳۔ مساوات $لا + ما = ۳۶$ کا طریق دریافت کرو۔

۱۱۴۔ محوروں کا زاویہ میلان معلوم ہے اور ن کوئی نقطہ (لا، ما) ہے، ن سے محوروں پر عمود ن ل اور ن م نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ

$$رل = لا + باجم سہ، وم = لا جم سہ + ما$$

ل م کی سادات حاصل کرو۔

۱۱۵۔ اگر مثال بالا میں ل م ایک ثابت نقطہ (ف، ق) میں سے گزرے

تو ن کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔
۱۱۶۔ ایک خط مستقیم کا جو حصہ دونوں محوروں کے درمیان کٹتا ہے اس کا نقطہ
تخصیف (لا، با) ہے۔ ثابت کرو کہ خط کی مساوات

$$\frac{لا}{لا_۲} + \frac{با}{با_۲} = ۱ \text{ ہے۔}$$

۱۱۷۔ ایک خط مستقیم ایک ثابت نقطہ (لا، با) میں سے گذرتا ہے، ثابت
کرو کہ اس کا جو حصہ محوروں کے درمیان کٹتا ہے اس کے نقطہ تخصیف کے

$$\text{طریق کی مساوات } \frac{لا}{لا_۲} + \frac{با}{با_۲} = ۱ \text{ ہے۔}$$

۱۱۸۔ خطوط ذیل کے جوڑوں کے درمیان جو زاوے بنتے ہیں انکے ماس معلوم کرو، محور قائم ہیں

$$(۱) \text{ لا} - \text{ما} = ۰ \quad (۲) ۲ لا + ۳ لا - ما - ما = ۰$$

$$(۳) لا + ۲ لا - ما + ما = ۰ \quad (۴) لا + لا - ما + ما = ۰$$

آخری صورت میں ماس کے خیالی ہونے کے معنی سمجھاؤ۔

$$۱۱۹۔ جن نقاط پر خط مستقیم لا + ما = ۲ منحنی$$

$$لا + ۲ لا - ما - ما + لا + ما + ما = ۰ \text{ سے ملتا ہے ان کو مبداء سے ملانے}$$

والے خطوط مستقیم کی مساوات معلوم کرو۔

$$۱۲۰۔ اگر دائرہ لا + ما = ۲ کے ایک وتر لا + ما = ۱ کے$$

محاذی سب-ایر زاویہ ۵۴ بنے تو

$$۲ \{ لا (لا + ما) - ۱ \} = ۲ \{ لا (لا + ما) - ۲ \}$$

$$۱۲۱۔ چار خطوط لا + ما + ما = ۰، لا - ما + ما = ۰، لا + ما - ما = ۰،$$

لا + ما - ما = ۰ کو دو دو کر کے لینے سے جو چھ نقاط تقاطع حاصل ہوتے ہیں ان کے
محد معلوم کرو۔

اس لئے ان خطوط سے جو ذوار بستہ الاشباع بنتا ہے اس کے تین قطروں کی
مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ان قطروں کے نقاط تخصیف ایک خط

مستقیمہ واقع ہوتے ہیں جس کی مساوات $۵۲ (۱۰ + ۸۰ - ۴۷) = ۰$ ہے۔
 ۱۲۲۔ اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط $۴ = ۱۰$ ، $۳ = ۱۰$ ، $۲ = ۱۰$ اور $۱ = ۱۰$ ج = ۰
 سے جو مثلث بناتا ہے اس کا رقبہ $\frac{1}{2} (۳ + ۱) (۱ + ۱) = ۲$ ہے۔

۱۲۳۔ صہ کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ $۲ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ = ۳۶$ ۔
 دو خطوط مستقیمہ کو تعبیر کر۔

۱۲۴۔ ثابت کرو کہ مساوات $۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ = ۰$ ۔
 دو خطوط مستقیمہ کو تعبیر کرتی ہے اور ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۲۵۔ اگر ایک متغیر خط مستقیمہ دو معلومہ تقاطع خطوط مستقیمہ پر ایسے حصے کا
 جن کے متکافوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ یہ ایک ثابت نقطہ میں سے
 گذرتا ہے۔

۱۲۶۔ اگر ایک متحرک خط مستقیمہ پر دو ثابت نقاط $(۳، ۴)$ اور $(۴، ۵)$ سے عمود
 نکالے جائیں تو ان کا مجموعہ اس عمود کا تین گنا ہوتا ہے جو ایک تیسرے ثابت
 نقطہ $(۱، ۳)$ سے اسی خط پر نکالا جائے گا ثابت کرو کہ یہ خط ایک اور ثابت نقطہ میں
 سے ہمیشہ گذرتا ہے اس نقطہ کے محدد معلوم کرو۔

۱۲۷۔ اگر ایک متساوی الساقین مثلث کے مساوی اضلاع ۱ ، ۱ ، ۱ ج = ۰
 نقاط ۱ اور ۱ تک اتنے خارج کئے جائیں کہ $۱ = ۱$ ج = ۰
 تو ثابت کرو کہ $۱ = ۱$ ج = ۰ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۲۸۔ ثابت کرو کہ مساوات

$۱۰ + ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ = ۰$ ۔
 تین ایسے خطوط مستقیمہ کو تعبیر کرتی ہے جو ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ ان کے
 مقامات کو شکل میں دکھاؤ۔

۱۲۹۔ محوروں کو حادہ زاویہ ۳۰° میں پھرانے کا ضابطہ لکھو۔
 ۱۳۰۔ مائل محوروں ۱ اور ۱ کا زاویہ میلان ۳۰° ہے اور ان کے

اگر ان مشاغل کے رقبوں کا مجموعہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ان کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۳۹۔ اگر ج ایک قائم الزاویہ مثلث ہے اور اس کا زاویہ (۱) قائمہ ہے،
اگر ج دو ایسے ثابت خطوط مستقیم پر حرکت کریں جو ایک دوسرے
سے زاویہ قائمہ بناتے ہوں تو اس کا طریق معلوم کرو۔

۱۴۔ ایک مثلث کا قاعدہ و درجہ کے قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق دیا
ہوا ہے، اس کا طریق معلوم کرو۔

۱۴۱۔ اسبج ذ ایک متوازی الاضلاع ہے، اگر زاویہ $\angle A$ اور اضلاع کا مجموعہ دونوں مستقل ہوں تو ثابت کرو کہ ج کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۱۴۲- ثابت کرد که $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$ را $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ بماند. این را وقتی $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$ را

(ا-ر-ب-ن) + م (ه-ن-ا-ق) (ه-ر-ب-ق) =

۱۴۳۔ اگر ایک متحرک خط مستقیم AB ثابت نقطوں سے عمود ٹکائے جائیں تو ان کا مجموعہ صفر ہوتا ہے، ثابت کرو کہ خط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۴۴۔ ثابت کرو کہ خطوط 1 اور 2 $1 + 2 = 3$ سے ایک خط اور خطوط 1 اور 3 $1 + 3 = 4$ سے ایک خط کے درمیان جو زاویہ بنتا ہے وہ باقی دو خطوط کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔

آزمائشی پرچہ

۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ AB اور راسی C دیاویہ اور معلوم ہے، راس C کا طریق دریافت کرو، ہندی طریق پر اس کی تصدیق کرو۔

۲۔ ذیل کی مساواتوں کے طریق مرسم کرو۔

(۱) r (جمع طه + $\overline{31}$ جیب طه) = $\overline{31}$ \downarrow

(۲) رجب طه = ۱

۴۰۔ ثابت کرو کہ مساوات

۱۔ لا + ب + ج + ک (لا + ب + ج) = ۰

ایک ایسے خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو خطوط لا + ب + ج + ک = ۰ اور لا + ب + ج = ۰ کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔ نیز ک کی یہی قیمت معلوم کرو کہ یہ خط مبدا میں سے ہی گزرے۔

۲۔ لا + ب + ج = ۱۔ اور لا + ب + ج + ک = ۲۔

کے نقطہ تقاطع کے محدود معلوم کرنے کے بغیر ان خطوط کی مساواتیں معلوم کرو جو اس نقطہ تقاطع کو (۱) مبدا سے (۲) نقطہ (۳، ۱) سے ملائیں۔

۵۔ قائم محوروں کی لحاظ سے خطوط

(۱، لا + ب + ج + ک) (۱۶ - لا + ۱ - ج + ۳۲) = کو شکل میں مرتب کر دو اور ان کے درمیانی زاویہ کا محاسب معلوم کرو۔

اگر ان خطوط کے درمیانی زاویوں کے منصفین محور لا سے نقاط ن اور ق پر ملیں تو ثابت کرو کہ ن ق کا طول ۵ اکائیوں ہے۔

۶۔ اس میں باعموم زیادہ سہولت ہے کہ پرانے محدودوں کو نئے محدودوں کی رقوم میں بیان کیا جائے بجائے اس کے کہ نئے محدودوں کو پرانے محدودوں کی رقوم میں بیان کیا جائے، اس کی وجہ بیان کرو۔

۷۔ اگر محوروں کو زوایا (۱) ۳۰° (۲) ۵۰° میں پھرا دیا جائے تو معلوم کرو کہ ہر صورت میں مساوات لا + ب + ج = ۰ کیا ہو جائے گی۔

۸۔ مثل محوروں لا اور ب کا درمیانی زاویہ ۱۵۰° ہے۔ ان محوروں کے لحاظ سے ایک نقطہ کے محدود (لا، ب) ہیں اور اسی نقطہ کے محدود محوروں

لا اور ب میں سے گزرنے والے عمود کے لحاظ سے (لا، ب) ہیں، شکل سے ثابت کرو کہ لا + ب + ج = ۰، جب کہ لا + ب + ج = ۰ اور اس سے

$$\frac{لا}{ب} = \frac{لا + ب + ج}{لا + ب + ج} = ۱$$

جب لا + ب + ج = ۰

۹۔ سوال ناقابل میں معلوم کرو کہ مساوات لا + ب + ج = ۰ اور لا + ب + ج = ۱ کیا ہو جائے گی اگر اسے لا، ب کی رقوم میں بیان کیا جائے اور اس سے

ثابت کرو کہ دو خط ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں گے اگر

۱۔ \angle ب - ۲ جم \angle سہ = ۰

۱۰۔ قائم محوروں کی صورت میں ثابت کرو کہ جو خط

۵ لا + ۱۲ لا ما - ۶ ما + ۴ لا - ۲ ما + ۳ = ۰ اور لا - ما - ۱ = ۰

کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملاتے ہیں وہ محوروں سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔



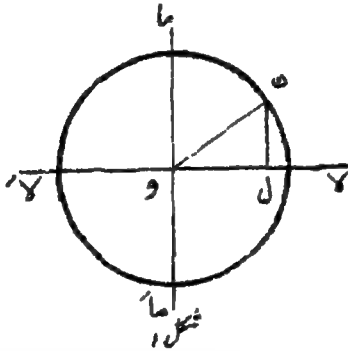
حصہ دوم

وائرہ اور مخروطی تراشیں

باب اول

دائرہ

۱۔ دائرہ کے محیط کی مساوات معلوم کرو جبکہ دائرہ کے مرکز کو مبدأ قرار دیا جائے۔
(۱) قائم محور۔ فرض کرو کہ O مرکز ہے، L نصف قطر اور N (لا، ما) محیط پر کوئی نقطہ ہے، N سے معین N لکھو۔



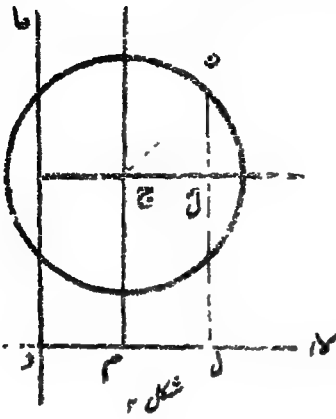
چونکہ $ON = L$ اسلئے جو ہندسی شرط پوری کرتا ہے وہ یہ ہے $OL + LN = L$
اس کو تجلیلی طریق پر اس طرح بیان کریں کہ $لا + ما = ل$ (۱)
جو دائرہ کی مساوات مطلوبہ ہے۔

(۲) مائل محور۔ اُسی قسم کے استدلال سے جو حصہ اول دفعہ ۲ میں اختیار کیا گیا
ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات مطلوبہ حسب ذیل ہے

$$لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا ما ج سہ = ل^۲ \dots\dots\dots (۲)$$

۲۔ دائرہ کی عام مساوات معلوم کرو (محور قائم ہیں)

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز J ہے اور اس کے محدود (حد تک) ہیں نیز
فرض کرو کہ دائرہ کا نصف قطر L ہے اور اس کے محیط پر کوئی نقطہ N (لا، ما) ہے۔



معین ن ل اور ج م کیجئے
اور ج ن کو ولا کے متوازی کیجئے
جو ن ل سے ل پرلے
نقطہ ن یہ ہندی شرط پوری کرتا ہے
ج ل + ل ن = لا
اور تحلیلی طریق پر ایسے ہم اس طرح بیان
کر سکتے ہیں کہ
(لا - ہ) + (ک - ا) = لا (۲)

مشقیں

۱۔ مساوات بالا کی حسب ذیل طریقہ پر تصدیق کرو ابتدائی محوروں کے متوازی مرکز میں سے
گزرنیوالے محوروں کے لحاظ سے دائرہ کی مساوات لا + ما = لا + ما حال کرد مہر محاور ولا اور و ما
کے لحاظ سے مساوات کی تئیں کرو۔ اب چونکہ ج کے محدد ولا اور و ما کے لحاظ
سے (ہ - ک) ہیں اس لئے یاد رہے کہ و کے محدد ج میں سے
گزرنیوالے متوازی محوروں کے لحاظ سے (- ہ - ک) ہیں۔

۳۔ مساوات (۲) کو پھیلا کر لکھتے ہیں

$$لا + ما - ۲ - لا - ۲ - ک + ما + ہ - ک - لا = ۰$$

پس معلوم ہوا کہ دائرہ کی عام مساوات قائم محوروں کے لحاظ سے درجہ دوم
کی ایک مساوات ہے جس میں لا اور ما کے سر مساوی ہوتے ہیں اور لا ما کا
سرفر ہوتا ہے۔ عام مساوات کو بالعموم اس شکل میں لکھتے ہیں

$$لا^۲ + ما^۲ + گ + لا + ما + ہ = ۰ (۳)$$

مساوات (۳) کو اس شکل (۳ + گ) + (لا + ما + ہ) = گ + لا + ما + ہ - ج میں لکھتے ہیں اور
مساوات (۳) کے ساتھ قائل کرنے سے جو دیکھتے ہیں کہ مساوات (۳) پر ایک ایسے
دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا مرکز نقطہ (گ، ہ) ہے اور نصف قطر گ + ہ - ج ہے۔
مساوات (۳) میں اگر مستقل رقم ج کو بدلا جائے تو اس پر اثر یہ ہو گا کہ دائرہ کا

نصف قطر بیگا لیکن اس سے مرکز کے مقام میں کوئی فرق نہیں آئیگا پس ج کو سلسلہ وار مختلف قیمتیں دینے سے ہم ہم مرکز دائروں کا ایک سلسلہ حاصل کر سکتے ہیں۔ عام صورتوں میں جلد گ + فن = ج مثبت ہوگا کیونکہ نصف قطر کے مربع کے مساوی ہے جب یہ جلد صفر کے مساوی ہوگا تو مساوات ایک ایسے دائرہ کو تعبیر کریگی جس کا نصف قطر صفر ہو اور مرکز (-گ - فن) یعنی اس صورت میں مساوات صفر و نہ خود نقطہ (-گ - فن) کو تعبیر کریگی۔ ایسی صورت میں طریق کو نقطہ دائرہ کہتے ہیں۔

جب گ + فن = ج منفی ہو تو علامت جذر کے اندر کی مقدار منفی ہوگی اور دائرہ بالتمام خیالی ہوگا یعنی اس صورت میں کسی حقیقی نقطہ کے محدود مساوات کو پورا نہیں کر سکتے۔

ہم نقطہ دائرہ - جب گ + فن = ج = ۰ تو مساوات ایک مسلسل منحنی کو تعبیر کرنے کی بجائے ایک نقطہ کو تعبیر کرتی ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ اس صورت میں مساوات ہو جاتی ہے (لا + گ) + (ما + فن) = ۰ جو فی الحقیقت دو مساواتیں ہیں کیونکہ ایک مربع منفی نہیں ہو سکتا اسلئے ہر خطوط وحدانی کو الگ الگ صفر ہونا چاہیئے۔

پس اس طرح ہمیں دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں لا + گ = ۰ اور ما + فن = ۰ جس سے نقطہ (-گ - فن) کی تعیین ہوتی ہے۔

۵۔ دائرہ کی عام مساوات معلوم کرو (مائل محور)

نقاط (لا، ما) (ھ، ک) کا درمیانی فاصلہ

(لا - ھ) + (ما - ک) + ۲(لا - ھ)(ما - ک) جم صفر

کے جذر کے مساوی ہے۔

اس لئے مائل محوروں کے لحاظ سے دائرہ کی عام مساوات ہے

(لا - ھ) + (ما - ک) + ۲(لا - ھ)(ما - ک) جم صفر = ۱

یا لا + ما جم صفر + ۲(ما - ک) جم صفر + لا - ھ(ما - ک) جم صفر +

۲(لا - ھ) جم صفر + ک - ھ = ۱ (۵)

نصف قطر بیگہ لیکن اس سے مرکز کے مقام میں کوئی فرق نہیں آئیگا پس ج کو سلسلہ وار مختلف قیمتیں دینے سے ہم ہم مرکز دائروں کا ایک سلسلہ حاصل کر سکتے ہیں۔ عام صورتوں میں جملہ گ + فن۔ ج مثبت ہوگا کیونکہ یہ نصف قطر کے مربع کے مساوی ہے جب یہ جملہ صفر کے مساوی ہوگا تو مساوات ایک ایسے دائرہ کو تعبیر کرے گی جس کا نصف قطر صفر ہو اور مرکز (گ۔ فن) یعنی اس صورت میں مساوات صفر و نہ خود نقطہ (گ۔ فن) کو تعبیر کرے گی۔ ایسی صورت میں طریق کو نقطہ دائرہ کہتے ہیں۔

جب گ + فن۔ ج منفی ہو تو علامت جذر کے اندر کی مقدار منفی ہوئی اور دائرہ با تمام خیالی ہوگا یعنی اس صورت میں کسی حقیقی نقطہ کے عدد مساوات کو پورا نہیں کر سکتے۔

م۔ نقطہ دائرہ۔ جب گ + فن۔ ج = ۰۔ تو مساوات ایک مسلسل منفی کو تعبیر کرنے کی بجائے ایک نقطہ کو تعبیر کرتی ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ اس صورت میں مساوات ہو جاتی ہے (لا + گ) + (ما + فن) = ۰ جو فی الحقیقت دو مساواتیں ہیں کیونکہ ایک مربع منفی نہیں ہو سکتا اسلئے ہر خطوط و عدائی کو الگ الگ صفر ہونا چاہیئے۔

پس اس طرح ہمیں دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں لا + گ = ۰ اور ما + فن = ۰ جس سے نقطہ (گ۔ فن) کی تعیین ہوتی ہے۔
۵۔ دائرہ کی عام مساوات معلوم کرو (مائل محور)
نقاط (لا، ما) (گ، ک) کا درمیانی فاصلہ
(لا۔ ص) + (ما۔ ک) + ۲ (لا۔ ص) (ما۔ ک) جم صہ
کے جذر کے مساوی ہے۔

اس لئے مائل محور کے لحاظ سے دائرہ کی عام مساوات ہے
(لا۔ ص) + (ما۔ ک) + ۲ (لا۔ ص) (ما۔ ک) جم صہ = ۰
یا لا + ۲ لا جم صہ + ما۔ ۲ (ص + ک جم صہ) لا۔ ۲ (ص جم صہ + ک) + ص + ۲ ص ک جم صہ + ک۔ ۰ = ۰۔۔۔۔۔ (۵)

پس اس صورت میں لا اور ما کے مساوی ہیں اور لا ما کا سر لا یا ما کے سر کا (۲ حجم سد) گنا ہے۔

۶۔ تین نقاط معلومہ میں سے گزرنے والے دائرہ کی مساوات

قائم محور۔ فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات $لا + ما + گ + ۲$ ف + ۲ ج =۔
 ہے، اس مساوات میں تین مستقل مقداریں گ، ف، ج شامل ہوتی ہیں جنہیں معلوم کرنا مقصود ہے۔ (اس سے ظاہر ہے کہ ایک دائرہ عام طور پر معلوم ہو سکتا ہے جو کسی تین نقاط معلومہ میں سے گزرے، اوپر کی مساوات میں ہر نقطہ کے حدود سد بیج کرنے سے گ، ف، ج میں تین ہمزاد سادہ مساواتیں حاصل ہونگی جن سے گ، ف، ج معلوم ہو سکتے ہیں۔ اس کے متعلق کوئی ضابطہ مرتب کرنا لا حاصل ہے، صرف طریق عمل کا یاد رکھنا ضروری ہے۔

ماثل محور۔ طریق عمل وہی ہے، صرف عام مساوات میں درجہ دوم کی ارقام $لا + ما + گ + ۲$ بجائے $لا + ما + ۲$ لا ما حجم سد ہونا چاہیے۔
 مثال اگر محور قائم ہوں تو اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقاط (۲، ۳)، (۱۹، ۸) اور (۲، ۹) میں سے گزرتا ہو۔

اگر دائرہ کی مساوات $لا + ما + گ + ۲$ ف + ۲ ج =۔ ہو تو محدود مندرجہ کرنے سے

$$۲۰۔ گ + ۲ ف + ۲ ج = ۴۰۹$$

$$۳۸۔ گ + ۱۶ ف + ۱ ج = ۴۲۵$$

$$۴۔ گ - ۱۸ ف + ۲ ج = ۸۵$$

جس سے گ =۔ ۷، ف =۔ ۳، ج =۔ ۱۱۱ پس دائرہ کی مساوات $لا + ما - ۱۴ لا - ۶ ما - ۱۱۱ =۔$ ہے، یا اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں (لا - ۷) + (ما - ۳) = ۱۶۹
 جو ایک دائرہ ہے جس کا مرکز (۷، ۳) ہے اور نصف قطر ۱۳۔

مشقیں

ذیل کی مشقوں میں سے ۶ تا ۹ قائم محوروں سے متعلق ہیں۔

۲- ذیل کے معطیات کی بناء پر دائروں کی مساواتیں معلوم کرو

(۱) مرکز $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ نصف قطر $\frac{1}{2}$ (ب) مرکز $(3, 2)$ نصف قطر ۳

(ج) مرکز $(0, -1)$ نصف قطر ۱

۳۔ ذیل کے دائروں کے دیکر اور نصف قطر معلوم کرو۔

(1) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
 (2) $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$
 (3) $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
 (4) $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

۴۔ اگر $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ ۔ ایک \triangle کو تعبیر کرے تو محوروں کا درمیانی زاویہ معلوم کرے اور اس دائرہ کا نصف قطر اور مرکز کے محدد معلوم کرے۔

۵۔ مثل خوروں کے لحاظ سے لا + لا + ما + جم + سہ + ما + ۲ + گی + لا + ۲ + ف + ما + ج = ایک دائرہ کی مساوات ہے، اس کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

۶۔ نقاط ذیل میں سے گزرنیوالے دائروں کی مساواتیں معلوم کرو اور ہر صورت میں دائرہ کے مرکز کو مبداء مان کر انہیں تبدیل کرو

(۱) (۱۰)، (۲، ۳)، (۳-۱)، (ب) (ص، ک)، (ص، -)، (۰، ک)

(ج) (۶'۱) (۴'۳) (۳'۲) (د) (۱'۲) (۱'۱) (ب'ب)

۷۔ ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو

(۱) جو (۰، ۰) میں سے گزرتا ہے اور محوروں پر حصے (۱، ۱) کا ثبوت ہے

(ب) جس کا مرکز (ھ، ک) ہے اور جو نقطہ (ف، ق) میں سے گزرتا ہے۔

۸۔ مبدأ سے ایک متحرک نقطہ کے فاصلہ کا مربع محور لا سے اس کے فاصلہ کا

گنا ہوتا ہے جہاں مستقل ہے، نقطہ کا طریق معلوم کرو نیز طریق کام کرنا اور نصف

قطر دریافت کرو۔

۹۔ مبداء سے ایک متحرک نقطہ کے فاصلہ کا مربع خط $= \frac{1}{2} t^2$ سے اس کے

فاصلہ کا ۲ گنا ہوتا ہے، ثابت کرو کہ طریق ایک نقطہ دائرہ ہے، اس کا مقام معلوم کرو۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ جو حصے دائرہ $(\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_3) + (\lambda_3 - \lambda_4) + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) + (\lambda_n - \lambda_1)$ حجم سے برابر ہے۔

مخردوں پر کٹتا ہے اُن کے حال ضرب باہم مساوی ہیں، اس سے اقلیدس

م ۳۳ شش ۳۶ کا نتیجہ حاصل کرو۔

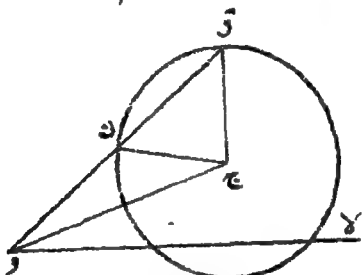
۱۱۔ اگر محور قائم یوں تو ثابت کرو کہ نقاط (۵، ۵) (۴، ۴) (۳، ۳) (۲، ۲) (۱، ۱) سب ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اس کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

۷۔ دائرہ کی قطبی مساوات معلوم کرو۔

اگر مرکز قطب ہو اور نصف قطر r تو مسادات صریحاً $r = \frac{1}{2}$ ہوگی اگر مرکز ج قطب نہ ہو تو فرض کرو کہ اس کے محدد (د) ہے ہیں فرض کرو کہ میٹا پر کوئی نقطہ (ر) ہے چے اور دائرہ کا نصف قطر r ہے۔

نقطہ ن ذیل کا ہندسی ربط یوں کرتا ہے

وج' + ون - ۲ وج × ون جم ج ون = ج ن



اور اس کو تخلیقی طریق پر اس طرح بیان کریں گے کہ $2 - 1 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $3 - 2 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $4 - 3 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $5 - 4 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $6 - 5 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $7 - 6 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $8 - 7 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $9 - 8 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $10 - 9 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $11 - 10 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $12 - 11 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $13 - 12 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $14 - 13 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $15 - 14 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $16 - 15 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $17 - 16 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $18 - 17 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $19 - 18 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $20 - 19 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $21 - 20 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $22 - 21 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $23 - 22 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $24 - 23 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $25 - 24 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $26 - 25 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $27 - 26 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $28 - 27 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $29 - 28 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $30 - 29 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $31 - 30 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $32 - 31 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $33 - 32 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $34 - 33 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $35 - 34 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $36 - 35 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $37 - 36 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $38 - 37 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $39 - 38 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $40 - 39 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $41 - 40 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $42 - 41 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $43 - 42 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $44 - 43 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $45 - 44 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $46 - 45 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $47 - 46 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $48 - 47 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $49 - 48 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $50 - 49 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $51 - 50 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $52 - 51 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $53 - 52 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $54 - 53 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $55 - 54 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $56 - 55 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $57 - 56 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $58 - 57 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $59 - 58 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $60 - 59 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $61 - 60 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $62 - 61 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $63 - 62 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $64 - 63 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $65 - 64 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $66 - 65 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $67 - 66 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $68 - 67 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $69 - 68 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $70 - 69 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $71 - 70 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $72 - 71 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $73 - 72 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $74 - 73 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $75 - 74 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $76 - 75 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $77 - 76 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $78 - 77 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $79 - 78 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $80 - 79 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $81 - 80 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $82 - 81 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $83 - 82 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $84 - 83 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $85 - 84 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $86 - 85 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $87 - 86 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $88 - 87 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $89 - 88 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $90 - 89 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $91 - 90 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $92 - 91 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $93 - 92 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $94 - 93 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $95 - 94 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $96 - 95 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $97 - 96 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $98 - 97 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $99 - 98 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $100 - 99 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $101 - 100 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $102 - 101 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $103 - 102 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $104 - 103 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $105 - 104 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $106 - 105 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $107 - 106 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $108 - 107 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $109 - 108 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $110 - 109 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $111 - 110 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $112 - 111 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $113 - 112 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $114 - 113 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $115 - 114 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $116 - 115 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $117 - 116 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $118 - 117 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $119 - 118 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $120 - 119 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $121 - 120 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $122 - 121 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $123 - 122 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $124 - 123 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $125 - 124 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $126 - 125 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $127 - 126 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $128 - 127 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $129 - 128 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $130 - 129 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $131 - 130 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $132 - 131 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $133 - 132 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $134 - 133 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $135 - 134 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $136 - 135 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $137 - 136 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $138 - 137 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $139 - 138 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $140 - 139 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $141 - 140 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $142 - 141 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $143 - 142 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $144 - 143 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $145 - 144 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $146 - 145 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $147 - 146 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $148 - 147 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $149 - 148 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $150 - 149 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $151 - 150 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $152 - 151 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $153 - 152 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $154 - 153 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $155 - 154 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $156 - 155 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $157 - 156 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $158 - 157 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $159 - 158 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $160 - 159 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $161 - 160 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $162 - 161 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $163 - 162 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $164 - 163 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $165 - 164 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $166 - 165 = 1$ (ط - ع) = 1 اور $$

۸۔ اگر قطب محیط پر واقع ہو تو $r = R$ اور مساحات ہو جائے گی

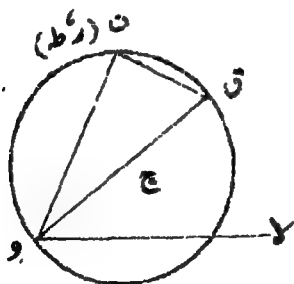
۱۲ = ۱ جم (طه - عه) (۴)

اور اگر علاوہ اس کے خط ابتدائی محی
مرکز میں سے گزرے تو مساوات ہو جائیگی

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

۹۔ طول و ان اور ذوق اور کی مساوات

(۶) میں رکی دو قیمتیں ہیں اس لئے $W \times \text{وق} = \text{دا} - \text{اے}$ پس یہ حاصل ضرب



مسئلہ نم

خط مستقیم و ن ق کی سمت پر منحصر نہیں ہے یہ محور طلب ہے کہ جب دائرہ کے اندر ہو تو و ن اور و ق مختلف العلامت ہوتے ہیں اس صورت میں حاصل ضرب و ن و ق منفی ہوتا ہے [مقابلہ کرو اقلیدس ص ۳۵ شکل ۳۵ اور ص ۳۶ شش ۳۶ کے ساتھ] جب دائرہ کے باہر ہو جیسا شکل میں تو و ن و ق سے گزرنیوالا قطر منحنی دائرہ سے اسی صورت میں حقیقی نقاط پر بیگا جبکہ مساوات (۶) میں ر کی قیمتیں حقیقی ہوں یعنی اگر $\sqrt{3}$ جم (ط - ط) - ۱ + ۱ - ۱ مثبت ہو۔ دوسرے الفاظ میں اگر $\sqrt{3}$ جب (ط - ط) - ۱ + ۱ - ۱ (جو ہندسی طریق پر بھی ظاہر ہے) جب دائرہ کے اندر ہو تو $\sqrt{3}$ (اس لئے جملہ $\sqrt{3}$ جم (ط - ط) - ۱ + ۱ - ۱ زاویہ ط کی تمام قیمتوں کے لئے مثبت ہوگا اور و ن سے گزرنیوالا ہر ایک خط دائرہ سے حقیقی نقاط پر بیگا۔

مشق

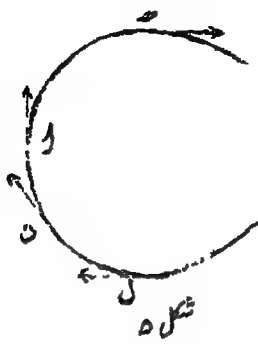
۱۲۔ ذیل کے دائروں کے مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

$$(۱) \quad ۱ - ۲ - ۶ \text{ رجم (ط - ط) - } ۱۶ = ۰$$

$$(ب) \quad ۲ - ۳۷ \text{ رجم (ط - ط) - } ۵ = ۰$$

۱۰۔ وتر اور مماس - تعریضات - ایک منحنی کا وتر ایسا خط مستقیم ہے جو اس پر کے دو نقطوں کو ملائے۔ ایک ایسے خط مستقیم کو منحنی کو کاٹتا ہو بعض اوقات منحنی کا قاطع بھی کہتے ہیں۔ طالب علم اتناک اقلیدس کی تعریف مماس سے مانوس ہے اُسے اب مماس کے لئے تخیل اور تعریف سے واقف ہونا چاہئے اور یہ تعریف صرف دائروں کی صورت میں ہی درست نہیں ہے بلکہ بالعموم سب منحنیات کی صورت میں درست ہے۔ پس ایک منحنی کے کسی نقطہ پر کا مماس فی الحقیقت ایک ایسا خط مستقیم ہے جو اس نقطہ سے گزرتا ہے اور اس نقطہ پر منحنی کی سمت کو ظاہر کرتا ہے۔

کرٹل سلیس لنڈن کی تماش میں جو الٹی سیدھی ریلوے، حال میں بنائی گئی ہے وہ مماس کے اس نئے تخیل کی بخوبی توضیح کرتی ہے۔ ریل کی سڑک سے جو منحنی بنتا ہے اس کے کسی نقطہ ن پر کا مماس اُس سمت کو تعبیر کریگا جس سمت میں کہ ریل کے پہلے ٹھیک ن میں سے گزرتے وقت حرکت کر رہے ہیں



یا یوں خیال کرو کہ ن میں سے گذرتے وقت
اگر سڑک کو ریل کے نیچے سے ایک لخت
الگ کر لیا جائے تو جس سمت میں پئے
سڑک کو چھوڑ کر فضا میں حرکت کرنا شروع
کریں گے وہی سمت ماس ہوگی۔

سب سے پہلے نقطہ ل پر یہ سمت
افقی ہے سب سے اونچے نقطہ ح پر یہ
افقی ہے لیکن متقابل سمت میں مگر ایک درمیانی نقطہ و پر صعود کے وقت یہ ہر انتصاباً
اوپر کی طرف ہوگی۔

اوپر ہم نے یہ بتایا ہے کہ ایک منحنی کے کسی نقطہ پر کا ماس اس نقطہ پر
منحنی کی سمت کا پتہ دیتا ہے اب یہ سمت اس نقطہ میں سے گذرنیوالے ایک خط مستقیم
سے ہی متین ہو سکتی ہے کیونکہ ایک خط مستقیم ہی کسی محدود فاصلہ تک اپنی سمت کو
تاکم رکھتا ہے لیکن ایک منحنی (عام تخیل کے مطابق) خواہ کتنا ہی تسلیل فاصلہ ہم اس پر
لے کریں ہر مقام پر ایک نئی سمت اختیار کرتا ہے۔ اس لئے قدرتی طور پر ماس کا
تخیل ہمارے ذہن میں یہ ہو سکتا ہے کہ یہ نقطہ ن میں سے گذرنیوالا ایک خط مستقیم
ہے جو ن پر منحنی کی سمت کا تعین کرتا ہے۔ اب ہمیں دیکھنا چاہئے کہ نقطہ ن پر
منحنی کی سمت سے کیا مراد ہے ظاہر ہے کہ جس سمت میں ہم ن سے چکر منحنی پر
اس سے اگلے ساتھ کے نقطہ ن پر جاتے ہیں وہی منحنی کی سمت نقطہ ن پر
ہو سکتی ہے پس جو خط مستقیم ن اور منحنی کے اگلے متصل نقطہ ن کو ملاتا ہے۔ یہ اگلی
سمت نقطہ ن پر منحنی کی سمت ہے۔ اس سمت کو حاصل کرنے کا آسان طریقہ یہ ہے
کہ ہم ایک وتر ن ق لیں اور نقطہ ق کو منحنی پر اس قدر حرکت دیں کہ نقطہ ق ملے
یہ ن پر پہنچ جائے جو منحنی پر اگلا متصل نقطہ ہے یا دوسرے الفاظ میں ہمیں ق کو
منحنی پر حرکت دینے سے ن کے اتنا قریب لے آنا چاہئے کہ یہ ن پر عین
منطبق ہو سکے۔ پس نقطہ ن پر منحنی کی سمت وتر ن ق کی سمت کا انتہائی
مقام ہے جبکہ دوسرا نقطہ تقاطع ق منحنی پر حرکت کرتے کرتے ن کے

اتنا قریب آجائے کہ یہ اس پر منطبق ہو نیکو ہو۔

نوٹ طالب علم دیکھے کہ جب قی فی الحقیقت ن پر منطبق ہوتا ہے تو سمت ن ق غیر متعین ہو جاتی ہے اس لئے پوری صحت کے لئے ہمیں یہ کہنا چاہئے کہ جب قی منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ن سے لا انتہائی مقام حاصل ہوتا ہے تو اس وقت ن ق کی سمت اپنے مذکورہ بالا انتہائی مقام پر ”جیکہ قی“ ن پر منطبق ہو ”حرکت کر کے آتی ہے یا اپنے ”انتہائی مقام“ کے ساتھ لا انتہائی مقام کا زاویہ بناتی ہے۔
اد پر کی تمہید اور قیود کے بعد طالب علم ذیل کی تعریف کو سمجھ سکیگا۔

۱۱۔ تعریف ایک منحنی کے کسی نقطہ پر کا مماس اس نقطہ میں سے گذرنیوالے وتر کا انتہائی مقام ہے جبکہ وتر کا دوسرا نقطہ تقاطع منحنی پر حرکت کرتے کرتے پہلے نقطہ پر منطبق ہو جائے۔

نوٹ مماس ایک خط مستقیم ہونے کی وجہ سے سر دو جانب غیر محدود تصور ہونا چاہئے،
۱۔ ایک مسلسل منحنی کی صورت میں ہمیں اس کے کسی ایک نقطہ پر وہی غیر محدود خط مستقیم بطور مماس حاصل ہوگا خواہ ہم منحنی کے کسی طرف جائیں۔

۱۲۔ اگر منحنی پر ایک نقطہ ن ہو اور اس کے محدود (لا، با) ہوں اور منحنی پر کے ایک اور نقطہ قی کے (لا، با) ہوں تو وتر ن ق کی مساوات $\frac{لا-با}{لا-لا} = \frac{لا-با}{لا-لا}$ (حصہ اول دفعہ ۱۰ ج) اب ن پر کے مماس کی مساوات معلوم کر کے اس کا سوال صحت یہ ہے کہ ہم جملہ $\frac{لا-با}{لا-لا}$ کی انتہائی صورت میں معلوم کریں جبکہ نقطہ (لا، با) منحنی پر حرکت کرتے کرتے نقطہ (لا، با) کے نہایت ہی قریب آجائے اور اس پر عین منطبق ہو نیکو ہو اس عمل میں یہ ضرور یاد رہے اور اسے لازماً استعمال کیا جائے کہ دونوں نقطوں کے محدود منحنی کی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

۱۳۔ دائرہ لا + ا + ا + گ لا + م + ف + ج = کے محیط پر ایک نقطہ (لا، با) ہے اس نقطہ پر مماس کی مساوات دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ ن (لا، با) ہے اور اس کے پاس ایک نقطہ دائرہ کے محیط پر

قی (لا، با) ہے ن ق کی مساوات ہے $\frac{لا-با}{لا-لا} = \frac{لا-با}{لا-لا}$ (۱) (حصہ اول دفعہ ۱۰ ج)

اب چونکہ ن اور ق دائرہ کے محیط پر واقع ہیں اس لئے

$$لا + با + رگ + لا + ف + با + ج = ۰$$

$$لا + با + رگ + لا + ف + با + ج = ۰$$

تفہیم کرنے سے

$$لا - لا + با - با + رگ - رگ + لا - لا + ف - ف + با - با = ۰$$

$$یا (لا - لا) + (با - با) + (رگ - رگ) + (لا - لا) + (ف - ف) + (با - با) = ۰$$

$$\therefore \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{با - با}{لا - لا} = \frac{رگ - رگ}{لا - لا} = \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ف - ف}{لا - لا} = \frac{با - با}{لا - لا} \dots \dots (۱)$$

اس لئے وترن ق کی مساوات ہے

$$(لا - لا) : (لا + لا + رگ + با + ف + با) = (۰) : (۰) \dots \dots (۹)$$

اب ہمیں وتر کی مساوات ایسی پیش میں حاصل ہوئی ہے جو غیر متعین نہیں ہو جاتی جب
لا + با حرکت کر کے (لا + با) پر منطبق ہو جاتا ہے۔

اس لئے لا کو لا کے اور با کو با کے مساوی رکھنے سے نقطہ (۰) پر
ماس کی مساوات ہو جاتی ہے

$$(لا - لا) : (لا + رگ + با + ف + با) = (۰) : (۰) = ۰$$

یعنی لا : (لا + رگ + با + ف + با) = (۰) : (۰) = ۰
یا چونکہ لا + با + رگ + لا + ف + با + ج = ۰ اس لئے اس کی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$لا : (لا + رگ + با + ف + با) = (۰) : (۰) = ۰ \dots \dots (۱۰)$$

اس مساوات کو اس شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$لا : لا + با + رگ + لا + ف + با + ج = ۰ \dots \dots (۱۱)$$

اور یہ شکل دائرہ کی مساوات سے لا کی بجائے لا + با کی بجائے ماس کی مساوات سے حاصل ہو سکتی ہے

مشقیں

۱۳۔ متشابه طریق سے ثابت کر دکھائی کہ لا + با + رگ + لا + ف + با + ج = ۰

کے نقطہ (لا، با) پر مماس کی مساوات ہے

لا (لا + لا + لا + با + گ) + ما (لا + با + ب + ف + ت) + ج =
۱۳۔ نقطہ (۲، ۲) پر لا + با + ما = لا + با + ج = ۰۔ کے مماس کی مساوات
معلوم کرو۔

۱۵۔ ان نقاط پر دائرہ لا + با = ۱۳ کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو
جہاں لا = ۲

۱۶۔ جن نقاط پر لا + با = ۲۵، لا + با = ۲۵ - لا - با = ۲۳ کو قطع کرتا
ہے ان پر کے مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا + با = ۲۵ اور لا + با + ما = ۸ - لا - با = ۷۵۔
ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا + با = ۲۵ پر کے نقاط (لا، با) اور (لا، با) کو
ملانے والے قاطع کی مساوات اس طرح نکلی جاسکتی ہے

$$لا (لا + لا + لا + با) + ما (لا + با) = لا (لا + با + با + لا)$$

۱۹۔ اگر دائرہ کی مساوات لا + با + ما + با + گ + لا + ف + ج = ۰ ہو
تو قاطع کی مساوات ہوگی

لا (لا + لا + لا + با + گ) + ما (لا + با + با + ف + ت) + ج = لا (لا + با + با + لا + ج)
۲۰۔ اگر دائرہ لا + با + ما + با + گ + لا + ف + ج = ۰ کے نقاط (لا، با)

اور (لا، با) پر کے مماس ایک دوسرے پر عمود ہوں تو ذیل کا ربط ثابت کرو
لا (لا + با + با + گ) + ما (لا + با + با + ف + ت) + ج = ۰

۲۱۔ دائرہ لا + با = ۲۵ کے نقطہ ن پر کا مماس عمود لا اور ما سے بالترتیب
ف اور ت پر پڑتا ہے اور ن ن م ان محوروں پر عمود کھینچ گئے ہیں ثابت کرو کہ

ج ل × ج ت = لا اور ج م × ج ت = لا جہاں ج مرکز ہے۔
۲۲۔ عکاو۔ تعریف ایک منحنی سے سی نقطہ پر کا عمود ایک ایسا خط مستقیم ہے

جو اس نقطہ میں سے گزرتا ہے اور مماس پر عمود ہو۔

۱۵۔ دائرہ لا + با + ما + با + گ + لا + ف + ج = ۰ کے نقطہ

اس کی اعلیں مساوی ہوں۔
 خط مستقیم $ما = م لا + ب کے$ دائرہ $لا^۲ + ما^۲ = لا$ کو مس کرنے کیلئے
 جو شرط ضروری ہے اسے یاد رکھنا چاہئے
 لاکے لئے حل کرنے سے $لا + (م لا + ب) = لا^۲ + (م + ۱) ما^۲ = م لا + م + ۱$ جب $لا$
 اگر اس مساوات کی اعلیں برابر ہوں تو ضروری ہے کہ
 $(م + ۱) (ب - لا) = م لا + م + ۱$ یا $ب = لا$ یا $ب = لا + (م + ۱) ما^۲$ اس لئے
 خط مستقیم $ما = م لا + ۱$ یا $لا + ۱ = م$ کی تمام قیمتوں کے لئے دائرہ
 $لا^۲ + ما^۲ = لا$ کو مس کرتا ہے۔

مشقیں

۲۵۔ ثابت کرو کہ دائرہ $لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا (لا + ما) = لا$ کا در کو مس
 کرتا ہے نقاط تماس معلوم کرو۔
 ان دائروں کی مساواتیں معلوم کرو جن کے مرکز مبدأ پر ہوں اور جو خطوط ذیل کو
 بالترتیب مس کریں۔

۲۶۔ $ما = لا + \frac{۱}{۳}$ ۲۷۔ $۲۴ - ۳ لا + ما^۲ = ۱۰$
 ۲۸۔ ثابت کرو کہ ذیل کے خطوط مستقیم اور دائرے ایک دوسرے کو مس
 کرتے ہیں ہر صورت میں نقاط تماس معلوم کرو۔

(ا) $لا^۲ + ما^۲ + لا + ما = ۰$ اور $لا + ما + ۲ = ۰$

(ب) $لا^۲ + ما^۲ = ۱$ اور $لا + ما = ۳$

۲۹۔ ثابت کرو کہ خط $ما = م لا + ۱$ یا $لا + ۱ = م$ کے دائرہ
 $لا^۲ + ما^۲ = لا$ کو مس کرتا ہے۔

۱۹۔ اس کے لئے کیا شرط ہے کہ خط مستقیم $لا + م + ما + ن = ۰$ دائرہ
 $لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا (لا + ما + ج) = ۰$ کو مس کرے۔

جو خطوط مستقیم مبدأ کو خط مستقیم اور دائرہ کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں انکی مساوات ہے
 $ن (لا + ما) - ن (لا + ما) + ج (لا + ما) = ۰$... (ا)

اگر خط مستقیم دائرہ کو مس کرتا ہے تو یہ دائرہ کو ایسے تقاطع پر ملیگا جو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہوں۔ اس صورت میں مساوات (د) دو ایسے خطوط کو تعبیر کرتی ہے جو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور اس کا دایاں رکن لازماً مربع کامل ہے۔ اس کے لئے ضروری شرط یہ ہے کہ

$$\begin{aligned} & (ج ل - ۲ گ ن ل + ن) (ج م - ۲ ف م ن + ن) \\ & = (ج ل م - گ م ن - ف ن ل) (ج م ن - ف ن ل) \text{ جو تحویل کے بعد ہو جاتی ہے} \\ & ج (ل + م) + ن - ۲ - (ف ن ل - گ ن ل) - ۲ ف م ن \\ & - ۲ گ ن ل = ۰ \end{aligned}$$

۲۰۔ نوٹ اوپر کی مساوات متماثل نہیں ہے اسے یاد رکھنے کی ضرورت نہیں صرف طریق عمل کا یاد رکھنا ضروری ہے۔ اس طریقہ کی مزید توضیح کے لئے طالب علم آواز شرح ثابت کرے کہ اگر خط مستقیم ل لا + م + ن = ۰ منحنی ل لا + م + ن = ۰ ہے یہ شرط ضروری ہے

$$\begin{aligned} & (ج ل - ۲ گ ن ل + ن) (ج م - ۲ ف م ن + ن) \\ & + (گ ل - ۲ ف م ن + ن) (ج م - ۲ ف م ن + ن) \\ & + (ج م - ۲ ف م ن + ن) (ج ل - ۲ گ ن ل + ن) \end{aligned}$$

۲۱۔ مساوات (ج) متماثل ہے اور مساوات (ب) اس سے حاصل ہو سکتی ہے اگر اس میں رکھا جائے ۱ = ا ب = ا' = ۰۔

مشقیں

۳۰۔ دائرہ لا + م + ن = ۰ کے اُن مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا کے ساتھ ۵۴ کا مخالف سمت ساعت) زاویہ بنائیں۔

۳۱۔ دائرہ لا + م + ن = ۲۵ کے اُن مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو م لا + م + ن = ۰ کے متوازی ہوں۔

۳۲۔ دائرہ لا + م + ن = ۲ کے اُن مماسوں کی مساواتیں دریافت کرو جو محور لا کے ساتھ بالترتیب زاویے (د) ۹۰ (ب) ۹۰ (ج) ۹۰ (د) ۹۰ بنائیں۔

۳۳۔ دائرہ لا + ما = ج اور خط لا + با = ا کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے جو خط ملاتے ہیں اُن کی مساداتیں معلوم کرو۔

اگر یہ خط دائرہ کو مس کرے تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{لا} = \frac{1}{با} + \frac{1}{ج}$ = $\frac{1}{ج}$ ۔
 ۳۴۔ ثابت کرو کہ جو خطوط دو دائر لا + ما = لا اور لا + ما + ۲ (گ لا + ف ما) کے نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملاتے ہیں اُن کی مسادات

(لا + ما) = ۲ (گ لا + ف ما) = بے
 ۳۵۔ دو دائر لا + ما = ۲۵ اور لا + ما + ۲۶ = ۲۵ کے نقاط تقاطع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ دائرے ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

باب اول پر متفرق مثالیں

۳۶۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ نقاط (۱) اور (۲) سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ۲ ب کے مساوی ہوتا ہے اس کا طریق معلوم کرو۔
 ۳۷۔ دو دائر لا + ما = ۹ اور لا + ما = ۱۰ + ۹ = ۱۰ کے نقاط تقاطع معلوم کرو۔ ان نقاط تقاطع پر دونوں دائروں کے مماسوں کی مساداتیں معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ ہر نقطہ پر کے دو مماس علی القوائم ہیں۔

۳۸۔ عام صورت میں ثابت کرو کہ دو دائر لا + ما = لا اور لا + ما + ۲ (گ لا + ف ما) = ۲۵ علی القوائم ہیں۔

۳۹۔ دائرہ لا + ما + ۲ لا + ۲ با + ج = ۰ کے اُن مسادات کی مساداتیں معلوم کرو جو ۳ لا + ما + ۷ = ۰ کے متوازی ہوں۔

۴۰۔ دائرہ لا + ما = ۲۵ کے اُن دو مماسوں کی مساداتیں معلوم کرو جو محور لا کے ساتھ ۳۰ کا زاویہ بنائیں۔

۴۱۔ کسی طریقہ سے ثابت کرو کہ ع کی تمام قیمتوں کے لئے خط مستقیم رجم (ط - ع) = رجم ع + لا دائرہ ر - ۲ رجم ط + ڈ - لا = ۰ کو مس کرتا ہے۔

۴۲۔ خط مستقیم رجم ط = ۳ اور دائرہ ر = ۲ رجم ط کے نقاط تقاطع معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ یہ نقطے مبدأ کے ساتھ ملکر ایک مثلث متساوی الاضلاع بناتے ہیں۔

- ۴۳۔ ثابت کرو کہ دائرہ لا + ما = ل کے دو نقاط (لا) بار اور (لا) کے ورسیانی فاصلہ کا مربع ۲ (لا) - (لا) - (لا) ہے۔
- ۴۴۔ ایک خط مستقیم ایک دائرہ کو ایسے نقاط پر قطع کرتا ہے جن کے فاصلے محیط کے ایک نقطہ (لا) کے مساوی ہیں اور د کے برابر ہیں ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کی مسادات لا + ما با - ل + ل = د ہے اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے (لا) با پر کے ماس کی مسادات معلوم کرو۔
- ۴۵۔ مائل محوروں کے لمحات سے ایک ایسے دائرہ کی مسادات معلوم کرو جو محیط میں سے گزرے اور محوروں پر نقطہ ف ق کاٹے۔
- ۴۶۔ اگر خط مستقیم لا + ب ما = دائرہ ر = ک جم ط کو مس کرے تو اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے۔
- ۴۷۔ جو دائرہ نقاط (ب) (ل) (ع) (ب) میں سے گزرتا ہے اس کے نصف قطر کا طول معلوم کرو۔
- ۴۸۔ ایک دائرہ کی مسادات سے ثابت کرو کہ جو زاوے ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہوں وہ مساوی ہوتے ہیں۔



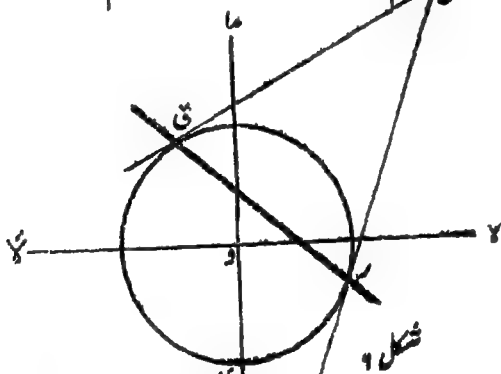
باب دوم

دائرہ مسلسل

۲۱۔ ایک دائرے ہوئے بیرونی نقطہ سے ایک دائرہ کے تماس کیلئے کئے گئے ہیں انہیں
دائرہ تماس کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ بیرونی نقطہ A ہے اور دائرہ کے مماس AC نقطہ C سے کہیں گئے ہیں۔

عمل کے اختصار کی خاطر ہم دائرہ کی مسادات بلحاظ قائم محوروں کے لینگے جبکہ مرکز یہاں ہے۔



اس لئے نہ دوں کے دو جوڑے (ھ'ک) اور (ھ'ک) مساوات لا لا ہا = لا کو پورا کرتے ہیں یعنی نقاط قی اور ر دونو خط مستقیم

$$لا لا + ما با = لا (۱)$$

پر واقع ہوتے ہیں اور اس لئے یہ قی ر کی مساوات ہے۔

جب ن دائرہ کے اندر واقع ہوں تو ن سے دائرہ کے محاس نہیں کھینچ سکتے اس لئے ہمیں اس صورت میں مساوات (۱) کی نئی ہندی تعبیر معلوم کرنی چاہئے۔

(۱) اگر دو محاس قی ر ایک ثابت نقطہ (ھ'ک) میں سے گذرتا ہو جہاں یہ ثابت نقطہ دائرہ کے اندر واقع ہے یا باہر تو مجدد (ھ'ک) مساوات (۱) کو پورا کریں گے

اس لئے لا ھ + ہا ک = لا جس سے علوم ہوتا ہے کہ ن ایک ایسے ثابت خط مستقیم پر واقع ہے جس کی مساوات لا ھ + ما ک = لا ہے۔ اس سے ہم مساوات لا ھ + ما ک = لا

کی ہندی تعبیر حاصل ہوتی ہے چونکہ (ھ'ک) کے مقام پر جو خط نکلتا ہے کیونکہ اس صورت میں یہ نقطہ دائرہ کے باہر سے کہیں اندر یا باہر واقع ہو سکتا ہے پس یہ معلوم ہوگا

کہ اگر ایک ثابت نقطہ میں سے دائرہ کے دو کھینچ جائیں تو ان میں سے ہر ایک کے سروں پر جو محاسوں کا جوڑا کھینچ سکتا ہے ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

اس خط مستقیم کو ثابت نقطہ کا قطبی کہتے ہیں اور مساوات لا ھ + ما ک = لا نقطہ (ھ'ک) کے قطبی کو بلحاظ دائرہ لا + ما = لا کے تعبیر کرتی ہے ایک بیرونی

نقطہ کا قطبی وہ وتر ہے جو اس نقطہ میں سے گذر نیوالے محاسات کے نقاط تماس کو ملاتا ہے۔

(۲) نیز مشاہدہ ہو کہ اگر ن (لا'ہا) ثابت خط مستقیم لا ھ + ما ک = لا پر واقع ہو (اور خواہ یہ خط دائرہ کو حقیقی نقاط پر کاٹے یا نہ کاٹے) تو لا ھ + ما ک = لا جس سے

معلوم ہوتا ہے کہ خط مستقیم قی ر جس کی مساوات لا لا + ما با = لا ہے ثابت نقطہ (ھ'ک) میں سے گذر لیتا ہے۔ اس لئے اگر ایک ثابت خط مستقیم پر کے نقطہ سے

دائرہ کے محاس کھینچ جائیں تو ایسے ہر ایک جوڑے کے نقاط تماس کو ملانے والا وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے گا۔ اس نقطہ کو معلوم خط مستقیم کا قطب کہتے ہیں اور

ہم دیکھتے ہیں کہ خط مستقیم لا ھ + ما ک = لا کے قطب کے مجدد بلحاظ دائرہ

لا + ۲ = ۱ (۱) ہے (دھک) ہیں۔ اگر ایک خط مستقیم دائرہ کو حقیقی نقاط پر کاٹتا ہو اور ان نقطوں پر دائرہ کے ماس کیچے جائیں تو ان ماسات کا نقطہ تقاطع خط منفرض کا قطب ہوگا۔

(۳) خط مستقیم لا + ۱ = ۱ کا قطب بلحاظ دائرہ لا + ۱ = ۱ کے نقطہ (دھک) ہے اس لئے خط مستقیم لا + ۱ = ۱ کا قطب نقطہ (لا + ۱ = ۱) ہوگا۔ اگر ن قطب ہوئی ر قطبی و مرکز تو ظاہر ہے کہ اس عمود کی سمت جو دے ق پر نکالا جائے و ن ہوگی۔ اگر و ن ق کو ن پر قطع کرے تو و ن = ع کیونکہ و ن عمود ہے مبداء سے خط مستقیم لا + ۱ = ۱ کا قطب = ع پر۔

نیز و ن = ۱ (لا + ۱ = ۱) + (لا + ۱ = ۱) اور اس لئے و ن = ۱ = ۱

اگر ن دائرہ کے باہر واقع ہو تو یہ تجزیہ ہندی طریق پر حسب ذیل حاصل ہو سکتا ہے۔ فرض کریں ن سے ماس ن ق کیچھا گیا ہے تب و ن ق اور و ن ق ن مشابہ قائم الزاویہ

شکل ہیں اور اس لئے و ن : و ن ق = و ن ق : و ن

مثال و ن دائرہ کو لا اور ب پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}}$$

مشقیں

۱۔ نقاط ذیل کے قطبیوں کی مساواتیں بلحاظ دائرہ لا + ۱ = ۱ کے لکھو

(۱) (۲۱-۲۵) (ب) (۱۲-۱۳) (ج) (۱۰-۱۱)

۲۔ بلحاظ دائرہ لا + ۱ = ۱ کے ذیل کے خطوط کے قطب معلوم کرو

(۱) لا - ۱ = ۱ (ب) لا - ۱ = ۱ (ج) لا - ۱ = ۱

۳۔ خط مستقیم لا + ۱ = ۱ کا قطب بلحاظ دائرہ لا + ۱ = ۱ کے

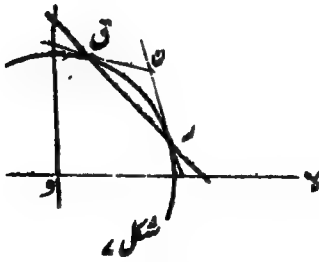
معلوم کرو۔

۲۲۔ اگر ن کا قطبی ت میں سے گذرنا ہو تو ثابت کرو کہ ت کا قطبی ن میں سے گذرنا ہے
فرض کرو کہ ن کے محدود (لا، با) ہیں اور ت کے (لا، با) نیز دائرہ
کی مساوات لا + ما = لڑ ہے۔

ن کے قطبی کی مساوات لا لا + ما + ما = لڑ ہے چونکہ نقطہ (لا، با) اس خط پر
واقع ہے اس لئے لا لا + با + با = لڑ
اس لئے نقطہ (لا، با) خط لا لا + ما + ما = لڑ پر واقع ہے یعنی ن، ت کے
قطبی پر واقع ہوتا ہے۔

۲۳۔ قطبی کی عام مساوات۔ اوپر کے عمل میں ہم نے دائرہ کی مساوات سادہ سے
سادہ شکل میں لی ہے تاکہ طالب علم کی توجہ اصل مقصد سے منحرف نہ ہو اس طرح
کے عمل سے معلوم ہوگا کہ نقطہ (لا، با) اور خط مستقیم
لا (لا + گ) + ما (لا + ن) + گ لا + ف + با + ج = ۔
بلحاظ دائرہ لا + ما + گ لا + ف + با + ج = ۔ کے بالترتیب
ایک دوسرے کے قطب اور قطبی ہیں۔

نوٹ طالب علم غور سے دیکھے کہ قطبی کی مساوات بعینہ اسی شکل کی ہے جس
شکل کی کہ ماس کی مساوات ہے اس لئے ایسے الگ یاد رکھنے کی ضرورت
نہیں۔ این دو خطوط میں ضروری فرق یہ ہے کہ ماس کی صورت میں نقطہ (لا، با)
منفی پر واقع ہوتا ہے لیکن قطبی کی صورت میں اسکے مقام پر ایسی کوئی قید نہیں۔
البتہ یہ ظاہر ہے کہ جب ایک نقطہ منفی پر واقع ہو تو اس کا قطبی وہی ہے جو اس کا ماس ہے۔



نیز یہ امر ہندسی تخیلات کی بنا پر بھی
ظاہر ہے کیونکہ جیسے بیرونی نقطہ ن
منفی کے قریب آتا جاتا ہے ویسے نقاط
تاس ق اور لہ ایک دوسرے کے
تدریج قریب آتے جاتے ہیں اور جب
نقطہ ن منفی پر واقع ہوتا ہے تو بالآخر

ق اور ر کو ملانے والا خط منفی کا ماس ہو جاتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ ماس قطبی کی

ایک خاص صورت ہے۔

مشقیں

۴۔ نقطہ (۵، ۴) کا قطبی بلحاظ دائرہ لا^۱ + ما^۲ - ۴ - لا - ۳ = ۸ کے معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ ہر کا قطبی بلحاظ دائرہ

$$لا^۲ + ما^۲ + گ - لا + ۲ - ف + ما + ج = ۰$$

کے خط مستقیم گ لا + ف + ما + ج = ۰ ہے۔

۶۔ ایک نقطہ معلوم دین سے گزرنیوالا خط مستقیم ایک دائرہ کو نقاط لا اور

ب پر کاٹتا ہے اور بلحاظ دائرہ کے و کا جو قطبی ہے اس کو د پر ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{دو} + \frac{1}{دب} = \frac{1}{دو}$$

و کو مبدا قرار دو اور فرض کرو کہ قائم محوروں کے لحاظ سے دائرہ کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ + گ - لا + ۲ - ف + ما + ج = ۰ \text{ ہے۔}$$

فرض کرو کہ د = ۱، ب = ۱، و = ۱

$$دو = ۱$$

فرض کرو کہ خط مستقیم و ب محور لا ب

سے زاویہ ط بنا تا ہے۔

اب پ پر سستی نیم قطر ر کی

دویمیں ہیں جن کے لئے کارڈینری محدود

(رجم ط، رجب ط) دائرہ کی مساوات کو

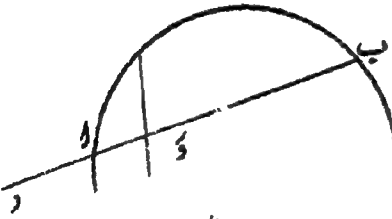
پورا کرتے ہیں پس دائرہ کی مساوات میں لا کی بجائے رجم ط اور ما کی بجائے رجب ط

تھپنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ پ مساوات

$$۲ + ر (گ رجم ط + ف رجب ط) + ج = ۰$$

کی اچلیں ہیں۔

$$\text{اس لئے } \frac{۲}{ج} = \frac{۱+۱}{۱} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$



شکل ۸

اسی طرح سے دہمتی نیم قطر کی وہ قیمت ہے جس کے لئے محدود (رجم ط + رجب ط) مساوات گ لا + ف + م + ج = کو پورا کرتے ہیں یعنی 'ر' کی وہ قیمت ہے جس کے لئے ر (گ جم ط + ف جب ط) + ج =۔
 اس لئے $\frac{1}{د} = \frac{گ جم ط + ف جب ط}{ج}$

اس لئے $\frac{1}{د} = \frac{1}{پ} + \frac{1}{د} = \frac{1}{د} - \frac{1}{و} + \frac{1}{و} = \frac{1}{و} - \frac{1}{و} + \frac{1}{و} = \frac{1}{و}$
 اس ضروری نتیجہ کو بالعموم اس طرح بیان کرتے ہیں کہ ایک نقطہ معلومہ میں سے گزرنیوالے خط مستقیم کو ایک دائرہ اور (بلحاظ اس دائرہ کے) نقطہ و کا قطبی موسیقی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۲۵۔ ایک نقطہ معلومہ میں سے ایک دائرہ کے تماس کھینچے گئے ہیں ان کے طول معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ معلومہ ن (لا، ما) ہے اور دائرہ کی مساوات

$$لا^۲ + ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ \text{ ہے۔}$$

اگر نقطہ ن میں سے ایک خط مستقیم ن ب محور لا سے زاویہ ط بنا لیا جائے اور یہ دائرہ کو ل اور ب پر کاٹے تو (حصہ اول دفعہ) ایک نتیجہ مربع کی رو سے ن ل اور ن ب دہمتی نیم قطر کی وہ قیمتیں ہوں گی جن کے لئے محدود (لا + رجم ط، ما + رجب ط) مساوات کو پورا کرتے ہیں یعنی ن ل ن ب مساوات

$$لا^۲ + رجم ط + (ما + رجب ط) + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

$$یا ۲ ل + ۲ ر (لا + گ) جم ط + (ما + ف) ب ل + لا^۲ + ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$

..... (۱)

میں رکھتے ہیں۔

اس لئے ن ل × ن ب = لا^۲ + ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج (ب)

جس سے ظاہر ہے کہ یہ حاصل ضرب ن میں سے گزرنیوالے وتر کی

سمت پر منحصر نہیں۔ (مقابلہ کرو اقلیدس ص ۳۶ شش ۳۶)

جب ن میں سے مرکزہ ریوالا خط مستقیم دائرہ کو مس کرے تو ل اور ب ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے اور ن ل ب میں سے ہر ایک اس تماس کے مساوی ہوگا جو ن سے دائرہ تک کھینچا گیا ہو۔

اس لئے تماس کے طول کا مربع ہے

$$لا^۲ + ما^۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ \quad (۲)$$

اور ظاہر ہے کہ نتیجہ ن کے محدودوں کو دائرہ کی مسادات کے بائیں مرکز میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے (یاد رہے کہ محدود مندرج کرنے سے قبل لا اور ما میں سے ہر ایک کا سر ایک ہونا چاہئے)

[جملہ لا + ما + ۲گ لا + ۲ف ما + ج اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$(لا + گ) + (ما + ف) - (گ + ف - ج)$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ تماس کا مربع = نقطہ معلوم اور مرکزہ دائرہ کے درمیانی فاصلہ کا مربع - دائرہ کے نصف قطر کا مربع

نوٹ اس طریقہ کو پورے طور پر ذہن نشین کرنے کی غرض سے طالب علم کو چاہئے کہ ذیل کے منحنی کی صورت میں جو عام مسادات

$$لا + ۲ف + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰$$

متعین ہوتا ہے ایسا ہی عمل کرے جو اوپر دیکھا گیا ہے۔

اگر نقطہ ن (لا، ما) میں سے وتر ن ل ب لے جائے جو محور لا سے زاویہ ط اور ط بنائیں اور منحنی سے ل ب اور ل ب پر ملیں تو معلوم ہوگا

$$کن ل \times ن ب = لا + ۲ف + ۲گ لا + ۲ف ما + ج$$

$$لجم ط + ۲فجم ط + ۲گجم ط + ۲فجم ط$$

$$اور کن ل \times ن ب = لا + ۲ف + ۲گ لا + ۲ف ما + ج$$

$$لجم ط + ۲فجم ط + ۲گجم ط + ۲فجم ط$$

پس نسبت $\frac{کن ل \times ن ب}{ن ل \times ن ب}$ صرف متقاطع وتروں کی سمتوں پر منحصر ہے اور نقطہ

ن (لا، ما) کے مقام پر منحصر نہیں۔ [دیکھو دفعہ ۱۳۲]
 اگر نقطہ ن دائرہ کے اندر ہو تو جملہ لا + ما + گ لا + ف + ما + ج
 منفی ہوگا (کیونکہ اس صورت میں ن لا اور ن ب کی علامتیں مختلف ہیں)
 اور طوں لا ن اور ن ب کی سطح کو تعبیر کریگا جس کے پہلے منفی علامت
 ثبت کرنی چاہئے۔

مشقیں

۱۔ ان مساوات کا طول معلوم کر دو (۱) نقطہ (۳، ۶) سے دائرہ لا + ما = ۲۰
 تک (ج) مبدأ سے دائرہ (لا - ۱) + (ما - ۲) = ۲ تک اور (ج) نقطہ
 (۳، ۲) سے دائرہ لا + ما = ۲ - ۵ لا - ۴ ما + ۶ = ۶ تک کھینچے جائیں۔
 ۲۔ اگر ایک نقطہ سے دو ہم مرکز دائروں کے ماس کھینچے جائیں تو ثابت کر دو کہ
 اُنلے مربعوں کا فرق نقطہ مذکورہ کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔
 ۳۔ دائرہ کی صورت میں متوازی وتروں کا ایک نظام دیا گیا ہے ان وتروں
 کے نقاط نصف کا طریق معلوم کرو۔

فرض کر دو کہ وتر محور لا سے زاویہ ملہ بناتے ہیں اور دائرہ کی مساوات ہے
 لا + ما + گ لا + ف + ما + ج = ۰ (۱)
 فرض کر دو کہ کسی ایک وتر کا وسطی نقطہ (لا، ما) ہے تب رکی وہ دو غمبتیں
 جن کے لئے کہ محدود (لا + رجب ط، ما + رجب ط) مساوات (۱) کو پورا کرتے
 ہیں مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونی چاہئیں کیونکہ وتر کے
 دونوں مساوی حصے نقطہ (لا، ما) سے متقابل سمتوں میں کھینچے گئے ہیں۔
 اس لئے مساوات (۱) دفعہ ۲۵ میں اصلوں کا مجموعہ صفر ہونا چاہئے یعنی
 (لا + گ) + جم ط + (ما + ف) + جب ط = ۰

اس لئے مطلوبہ طریق خط مشقیم

(لا + گ) + جم ط + (ما + ف) + جب ط = ۰ (۳)
 ہے جو مرکز (گ - ف) میں سے گزرتا ہے نیز ظاہر ہے کہ یہ خط متوازی

وتروں پر عمود ہے کیونکہ اگر مبدا میں سے خط (۳) پر عمود نکالا جائے تو یہ محور لا سے زاویہ طہ بنائے گا (مقابلہ کرد اقلیدس م ۳ شش ۳ کے ساتھ)

مشق

۸۔ دائرہ لا + ما = ۱۳ کے ایسے وتروں کے وسطی نقاط کا طریق معلوم کر دو جو
۳ لا + ۲ ما = ۵ کے متوازی ہوں۔

۹۔ دو دائروں لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = اور لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = کے وتر مشترک کی مساوات معلوم کرو۔

مساوات (لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج) - (لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج) =
ذیل کی مساوات میں تحویل ہوتی ہے

۲ (گ - گ) (لا + ۲ (ف - ف) (ما + ج - ج) = ۰ (۴)
یہ ایک خط مستقیم کی مساوات ہے نیز لا + ما کی ایسی تمام قیمتیں اسکو پورا کرتی ہیں جو دونوں دائروں کی مساواتوں کو پورا کریں اس لئے مساوات (۴) ایک ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو دائروں کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے یعنی (د) وتر مشترک کی مساوات ہے جب دائرے ایک دوسرے کو حقیقی نقاط پر نہ قطع کریں تو اس صورت میں بھی (د) کسی خط مستقیم کو تعبیر کریں دفعہ ۲۹ میں ہم اس خط مستقیم کی ہندی تعبیر معلوم کریں گے۔

۲۸۔ بنیادی محور تحریف دو دائروں کا بنیادی محور ایسے نقطوں کا طریق ہے جن سے اتران دائروں کے تماس کھینچے جائیں تو یہ تماس باہم مساوی ہوں۔

۲۹۔ دو دائروں کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔

اگر نقطہ (لا) ما بنیادی محور پر واقع ہو اور دائروں کی مساواتیں حسب بالا ہوں تو دفعہ ۵ کی رو سے

لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج
یا ۲ (گ - گ) (لا + ۲ (ف - ف) (ما + ج - ج) = ۰
اس لئے ان دو دائروں کے بنیادی محور کی مساوات ہے

۲ (گ-گ) لا + ۲ (مٹ-مٹ) ما + (ج-ج) = (۵)
 اس سے معلوم ہوتا ہے کہ دفعہ ۲ کی مساوات (۴) دو دائروں کے بنیادی
 محور کی مساوات ہے اور یہ تعبیر ہندی نقطہ نظر سے کچھ معنی رکھتی ہے خواہ دائرے
 ایک دوسرے کو حقیقی تقاطع پر قطع کریں یا نہ کریں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ وتر مشترک کی مساوات وہی ہے جو بنیادی محور کی اس سے معلوم
 ہوتا ہے کہ دو متقاطع دائروں کا بنیادی محور ان کا وتر مشترک ہوتا ہے یا با لفاظ
 دیگر اگر ان دائروں کے وتر مشترک کے کسی نقطہ سے دائروں کے تماس کھینچے
 جائیں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔ ہندی طریق پر یہ اقلیدس ص ۳۶ شس ۳۶ سے
 ظاہر ہے، بالخصوص یاد رہے کہ وتر مشترک مشترک تماسوں کی تنصیف کرتا ہے۔
 یہ بھی ملاحظہ ہو کہ جو خط مرکزوں (-گ-مٹ) اور (-گ-مٹ) کو ملاتا
 ہے اس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} + \text{گ}}{\text{گ} - \text{گ}} = \frac{\text{ما} + \text{مٹ}}{\text{مٹ} - \text{مٹ}}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ بنیادی محور مرکزوں کے ملانے والے خط پر عمود ہے
 ۳۰۔ مختصر طریق کتابت میں (دیکھو حصہ اول دفعہ ۲) اگر ص ۱ اور ص ۱ بالترتیب
 جملات لا + ما + ۲ گ لا + ۲ مٹ ما + ج اور لا + ما + ۲ گ لا + ۲ مٹ ما + ج کو
 تعبیر کریں تو دائروں ص = اور ص = کے بنیادی محور کی مساوات اس طرح
 لکھی جاسکتی ہے ص = ص =، لیکن بخوبی یاد رہے کہ اس اختصار میں یہ تسلیم
 کر لیا گیا ہے کہ دائرہ کی مساوات میں سب قسمن بائیں جانب منتقل کر دی گئی
 ہیں اور مختصر طریق کتابت اختیار کرنے سے قبل لا اور ما کے سروں کو ایک کے
 مساوی بنایا گیا ہے۔

۳۱۔ ان سب دائروں کی عام مساوات جن کا بنیادی محور وہی ہو جو دو معلوم دائروں کا ہے
 ان سب دائروں کی عام مساوات جو ایک ہی مشترک بنیادی محور رکھتے ہوں ص = ص =،
 ہوگی جہاں ص = اور ص = نظام دو دائرے کسی دو دائروں کی مساواتیں ہیں۔
 کیونکہ ص = اور ص = کا بنیادی محور ص = ہے اور چونکہ جملہ

سن + لہ سن میں لہا، اس سرائلہ ہے اس نے سن = اور سن + لہ سن =۔ یہاں دو دائروں کے
 سن = لہ سن =۔ یا سن = سن =۔ سے [دیکھو یادداشت درجہ بالا]
 یعنی سن = لہ اور سن + لہ سن =۔ کا بنیادی محور وہی ہے جو دو متعلقہ دائروں کا ہے۔
 اس مساوات سن + لہ سن =۔ کسی ایسے نقطہ کے محدود دن = سن پوری
 ہوتی ہے جو دونوں مساواتوں سن =۔ اور سن =۔ کو پورا کرتے ہیں۔
 اسلئے اگر دائر سن =۔ اور سن =۔ کے نقاط تقاطع حقیقی ہوں تو تمام
 دائرے حقیقی نقاط کے ایک ہی جوڑے میں سے گزریں گے۔

جب سن =۔ اور سن =۔ حقیقی نقاط پر ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو
 اُس صورت میں بھی انکی مساواتوں کو ایک ساتھ حل کرنے سے ہمیں لہا کی دو خیالی
 قیمتیں اور اُن کے جواب میں ما کی دو خیالی قیمتیں مل سکتی ہیں اور انہیں ہم دولہے
 خیالی نقاط کے محدود تصور کر سکتے ہیں جو مساواتوں سن =۔ اور سن =۔ اور
 اس لئے سن + لہ سن =۔ کو پورا کرتے ہیں۔ اس لئے اسی صورت میں
 اگرچہ ہم ان نقاط کو شکل میں نہیں دکھا سکتے تاہم ہم یہ خیال کرنے میں نہ نظام
 مذکور کے تمام دائرے اُن دو خیالی نقاط میں سے گزرتے ہیں جو سن =۔ اور سن =۔
 کے نقاط تقاطع ہیں۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ اُن سب دائروں کے مرکز جو ایک ہی مشترک محور
 رکھتے ہوں یا بالفاظ دیگر ہم محور دائروں کے ایک نظام کے سب مرکز ایک ہی خط
 میں واقع ہوتے ہیں کیونکہ کسی دو مرکزوں کو ملانے والا خط مشترک بنیادی محور پر عمود ہوتا ہے۔

۳۲۔ تین دائروں کے تین بنیادی محور جبکہ

دو د دائروں کو الگ الگ لیا جائے

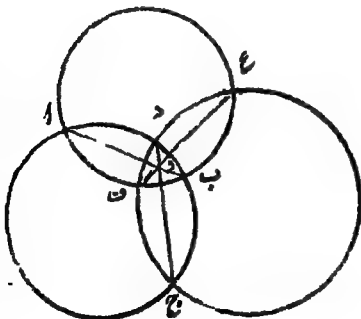
ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

فرض کرو کہ دائروں کی مساواتیں

مختصر طریق کتابت کے موافق

سن =۔ سن =۔ سن =۔ ہیں

بنیادی محوروں کی مساواتیں ہیں



شکل ۹

$$\begin{aligned} \text{میں} - \text{میں} &= 0 \\ \text{میں} - \text{میں} &= 0 \\ \text{میں} - \text{میں} &= 0 \end{aligned}$$

چونکہ جب ان مساواتوں کے دائرے طرے کے رکنوں کو اکٹھا جمع کیا جاتا ہے تو یہ شرط بقا صفر ہوتے ہیں اس لئے ثابت ہو کہ تینوں بنیادی محور ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں [حصہ اول دفعہ ۲۳]
اس نقطہ کو ان تین دائروں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

مشقیں

۹۔ دو دائرے $لا' + ما' = ۲$ اور $لا + ما = ۱$ کے وتر مشترک کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ دائروں $لا' + ما' + ۲ = ۰$ ، $لا + ما + ۱ = ۰$ اور $لا' + ما' + ۲ = ۰$ کا مشترک بنیادی محور ایک ہی ہے اسے معلوم کرو۔

۱۱۔ دائروں $لا' + ما' + ۲ = ۰$ اور $لا + ما + ۱ = ۰$ کے بنیادی محور کی مساوات معلوم کرو۔

۱۲۔ دائروں $لا' + ما' + ۲ = ۰$ اور $لا + ما + ۱ = ۰$ کے بنیادی محور معلوم کرو اور دکھاؤ کہ یہ دائروں کے مرکزوں کو ملانے والے خط پر غلیظہ داغ ہے۔

۱۳۔ دائرے $لا' + ما' = ۳$ اور $لا + ما = ۲$ کے بنیادی مرکز معلوم کرو۔

۳۳۔ انتہائی نقطے۔ مساوات $لا' + ما' = ۳$ کے لئے مناسب قیمت دینے سے ہم دائرہ $لا' + ما' = ۳$ کے نصف قطر کو صفر بنا سکتے ہیں اور اس طرح دائروں کے ہم محور نظام کا ایک نقطہ دائرہ حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ جس مساوات سے $لا' + ما' = ۳$ کی مطلوب قیمت یا قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

وہ مساوات درجہ دوم ہے اس لئے معلوم ہوا کہ دائروں کے کسی ہم محور نظام میں دو نقطے دائرے (حقیقی یا خیالی) ہوتے ہیں جو باقی دائروں کی طرح اس نظام کے رکن ہیں۔ ان کو نظام مذکور کے "انتہائی نقطے" کہتے ہیں۔

ثابت کرو کہ دائروں کے ایک ہم محور نظام کے انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں جب دائرے حقیقی نقاط پر ایک دوسرے کو قطع کریں اور حقیقی ہوتے ہیں جب دائرے خیالی نقاط پر قطع کریں۔

ہندسی نقطہ نظر سے پہلا حصہ عیاں ہے کیونکہ کوئی نقطہ دائرہ دو ایسے نقطوں میں سے نہیں گذر سکتا جو ایک دوسرے سے محدود فاصلہ پر واقع ہوں۔

مگر دونوں حصے تجلیلی طریق پر اس طرح ثابت ہو سکتے ہیں۔ دائروں کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو محور لا مقرر کرد اور بنیادی محور کو محور مسا (اگر اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے ہم دائرہ کی تمام مساوات لیں تو ہم دیکھیں گے کہ عمل طولانی اور پریشان کن ہوگا)

فرض کرو کہ نظام کے ایک دائرہ کا مرکز (ھء) ہے اور نصف قطر $\frac{1}{2}$

اس دائرہ کی مساوات ہوگی (لا - ھء) + ما = لا = ۰ (۱)

بنیادی محور کی مساوات ہے لا = ۰ (ب)

نظام دو دائرہ کا ہر ایک دائرہ (۱) اور (ب) کے نقاط تقاطع حقیقی یا خیالی

میں سے گذرتا ہے اس لئے اس نظام کے کسی دائرہ کی مساوات اس شکل کی

ہونی چاہئے

(لا - ھء) + ما - لا + لا = ۰ (ج)

یا لا + ما + (لا - ھء) + لا - ھء - لا = ۰

اگر اس دائرہ کا نصف قطر صفر ہو تو

(۱/۲ - ھء) - (ھء - لا) = ۰

یا (لا - ھء) - ھء = (لا - ھء) = ۰ (د)

مساوات (د) میں لا کی قیمتیں حقیقی یا خیالی ہوں گی اگر ھء بالترتیب بڑا ہو یا چھوٹا ہو اسے

یعنی اگر دائرہ (۱) کے مرکز کا فاصلہ بڑا ہو یا چھوٹا ہو دائرہ کے نصف قطر سے

بالآخر $\text{م} = \text{س}$ بنطبق ہو جاتا ہے۔
 اس صورت میں ک $\text{س} - \text{م} = ۰$ ایک ایسے منہی کو تعبیر کرتی ہے جس کی
 مساوات درجہ دوم کی ہے اور جو دائرہ کے نقطہ ق پر منطبق ہونیوالے نقاط
 میں سے نیز نقطہ ر پر کے دو منطبق ہونیوالے نقاط میں سے گذرنا ہے یعنی معلوم
 ہوا کہ منہی ایسا ہے کہ مساوات $\text{ع ق اور ع ر اس کو ق اور} - \text{پر مس}$
 کرتے ہیں۔

اب خطوط مستقیم ع ق ع ر کا جوڑا خود ایک ایسا منہی ہے جو ان شرائط کو
 پورا کرتا ہے اس لئے یہ نظام ک $\text{س} - \text{م} = ۰$ کا ایک رکن ہے جو ک کو
 ایک خاص قیمت دینے سے حاصل ہوتا ہے۔ اب ک کی قیمت مطلوبہ وہ ہوگی جو
 منہی ک $\text{س} - \text{م} = ۰$ کو نقطہ $(\text{لا}، \text{با})$ میں سے گذار سکے کیونکہ اس صورت
 میں خط $\text{ع ق منہی س} = ۰$ کو تین نقطوں پر کاٹے گا (نقطہ ع ر اور دو منطبقہ نقاط پر)
 اور اس طرح ع ر بھی تین نقطوں پر اسے قطع کرے گا لیکن درجہ دوم کا منہی ایسا نہیں کر سکتا
 جب تک کہ یہ خطوط مستقیم کے ایک جوڑے (ع ق اور ع ر) پر متلا نہ ہو۔
 اس لئے ک کی مطلوبہ قیمت مساوات ک $\text{س} - \text{م} = ۰$ ۔

میں $(\text{لا}، \text{با})$ کی بجائے $(\text{لا}، \text{با})$ مندرجہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔
 اس اندراج کے بعد س اور م دونوں بالترتیب س اور م ہو جاتے ہیں

ک $\text{س} - \text{س} = ۰$ یا ک $\text{س} = ۰$
 اس لئے نقطہ $(\text{لا}، \text{با})$ سے مساوات کا جو جوڑا پچھ سکتا ہے ابکی مساوات ہے

س $\text{س} - \text{م} = ۰$

(۶)
 طالب علم پر واضح ہو کہ اوپر کا استدلال خاص اہمیت رکھتا ہے وہ اس پر
 پورا جوہر حاصل کر لے۔ ک کی قیمت اس شرط (حصہ اول دفعہ ۳۲) کو استعمال
 کرنے سے بھی حاصل ہو سکتی ہے کہ مساوات ک $\text{س} - \text{م} = ۰$ دو خطوط مستقیم کو
 تعبیر کرتی ہے لیکن اس صورت میں حسابات طولانی اور تکلیف دہ ہونگے۔

۳۵۔ مسئلہ بالا کی اہمیت کے لحاظ سے اس کا ایک اور حل یہاں دیا جائیگا۔
 اس نقطہ کے محور جو $(\text{لا}، \text{با})$ اور $(\text{لا}، \text{با})$ کے ملانے والے خط کو نسبت

ک : ل سے تقسیم کرتا ہے کہ $(\text{لا} + \text{ل})$ ، کہ $(\text{ما} + \text{ل})$ ہیں (حصہ اول دفعہ ۳)۔
اگر اس نقطہ کے محدود دائرہ کی مسادات میں مندرج کئے جائیں تو کہ میں ایک
مسادات درجہ دوم حاصل ہوگی اور اس مسادات سے وہ تین حاصل ہوگی جن کے
موافق دائرہ نقاط $(\text{لا} + \text{ل})$ ، اور $(\text{لا} + \text{ما})$ کے ملانے والے خط کو تقسیم کرتا ہے۔
اگر $(\text{لا} + \text{ل})$ کسی ایک ماس پر واقع ہو جو نقطہ $(\text{لا} + \text{ل})$ سے کیلچا گیا ہے تو مسادات
درجہ دوم کی اصلیں مساوی ہوگی۔

مسادات زیر بحث یہ ہے

$$\text{دک} (\text{لا} + \text{ل}) + (\text{دک} \text{ما} + \text{ل}) + \text{دک} (\text{لا} + \text{ل})$$

$$+ ۲ (\text{دک} \text{ل}) (\text{دک} \text{ما} + \text{ل}) + \text{ج} (\text{دک} \text{ل}) = ۰$$

$$\text{یا ک} + \text{س} + \text{ک} \text{ل} + \text{م} + \text{ل} + \text{س} = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{جہاں س} = \text{لا} + \text{ما} + \text{ل} + \text{گ} + \text{لا} + ۲ \text{ف} + \text{ل} + \text{ج}$$

$$\text{س} = \text{لا} + \text{ل} + \text{ما} + \text{گ} + \text{لا} + ۲ \text{ف} + \text{ل} + \text{ج}$$

$$\text{م} = \text{لا} + \text{ل} + \text{ما} + \text{گ} + \text{لا} + \text{ف} + (\text{ما} + \text{ل}) + \text{ج}$$

اگر مسادات (۱) کی اصلیں مساوی ہوں تو اس کے لئے شرط یہ ہے

$\text{س} + \text{س} = ۰$ پس لا اور ما میں آخر کے ہندسوں کو حذف کرنے سے
ان ماسوں کے جوڑے کی مسادات جو نقطہ $(\text{لا} + \text{ل})$ سے دائرہ کے محیط تک
پہنچ سکتے ہیں

$$\text{س} + \text{س} = ۰ \dots \dots \dots (۲)$$

جہاں پہلی جہاں $\text{س} + \text{س}$ اور م کا مفہوم وہی ہے جو اوپر بیان ہوا۔

مشقیں

۱۵۔ دفعات ۳۴ اور ۳۵ کے ضابطہ کی مدد کے بغیر اوپر کے کسی طریقہ سے
ثابت کرو کہ نقطہ $(\text{لا} + \text{ل})$ سے دائرہ $\text{لا} + \text{ما} = ۰$ کے مسادات کی
مسادات ہے

$$(لا + ما - ل) (لا + با - ل) - (لا + لا + ما - با - ل) =$$

۱۶ - نقطہ (۵) سے دائرہ لا + ما - ل - لا - با + ما = ۱۴ -
کے جو دو ماس کھینچ سکتے ہیں انکی مساوات معلوم کرو۔

۳۶ - محدودوں کو ایک متبادل کی رقوم میں بیان کرنا۔

اگر محور قائم ہوں تو دائرہ لا + ما = لا کے محیط پر کے کسی نقطہ کے محدود (لاجم ع + ل جب ع) سے تعبیر ہو سکتے ہیں جہاں ع دہ زاویہ ہے جو نقطہ مذکورہ میں سے گزرنیوالا نصف قطر محور لا سے بناتا ہے۔ اگر محدودوں کو ایک مجہول مقدار ع کی رقوم میں اسطرح بیان کر لیا جائے تو بعض اوقات وہ مساواتیں جن سے ہمیں بالعموم سابقہ پڑتا ہے نہایت سادہ اور مختصر صورت میں لائی جاسکتی ہیں۔ بالخصوص نقطہ (لاجم ع + ل جب ع) پر جسے ہم آئندہ "نقطہ ع" کہیں گے ماس کی مساوات ہے

$$لاجم ع + ل جب ع = ل$$

مشقیں

۱۷ - ثابت کرو کہ دائرہ لا + ما = لا کے نقطہ ع پر کے ماس کی مساوات ما = لا ماس ہوگی
۱۸ - ثابت کرو کہ نقاط ع اور ہ کو ملانے والے وتر کی مساوات ہے

$$لاجم ع + ل جب ع = ل$$

۱۹ - ثابت کرو کہ ع اور ہ پر کے ماسات کا نقطہ تقاطع

$$(لاجم ع + ل جب ع) \text{ قط } ع - ل = ل جب ع + ل جب ع - ل$$

۲۰ - اگر ق اور ر پر کے ماسات ن پر ملیں، و مرکز ہو اور ون ق ر کو ن پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ون × ون = وق
۳۷ - تعریف تعریف فرض کرو کہ و ایک نقطہ معلوم ہے اور ن ایک اور نقطہ ایک معلوم منحنی پر واقع ہے ون پر ایک نقطہ ن ایسا نو کہ

دن x ون = ک جہاں ک ایک مستقل مقدار ہے۔ جیسے ن معلوم منشی پر حرکت کرتا ہے ن بھی شرط بالا کے ماتحت ایک منشی مرتسم کرتا ہے ن کے اس طریق کو معلوم منشی کا مقلوب کہتے ہیں بلحاظ نقطہ و اور نصف قطر تقلیب ک کے۔
 دائرہ کا مقلوب بلحاظ کسی نقطہ کے معلوم کر دو۔

نقطہ معلومہ کو مبدأ مانو اور فرض کرو کہ دائرہ کی مساوات قطبی محدودوں میں

(1) $\therefore \dots J = 5 + (ط - ع)$

ہے جہاں (د، ع) مرکز کے قطبی محدد ہیں اور نصف قطر ہے۔ اگر دائرہ کے نقطہ (ر، ط) کے جواب میں مطلوب منحنی پر نقطہ (ر، ط) ہو تو $r = k$

۱۰۰ = ۱۰۰

رہی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کرنے اور ر کی زبردوں کو حذف کرنے سے
 جم دیکھتے ہیں کہ مطلوب کی مساوات دائرہ کی مساوات (۱) میں ر کی بجائے
 کے رکھنے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے یہ مساوات حسب ذیل ہے

$$J = \frac{K}{r} - \left(\frac{K}{r} \right)' + (p - c) = \frac{K}{r} + (p - c)$$

$$(۲) \dots \frac{K^2}{(2-1)} = \frac{K^2}{(2-1)} + (ط-ع) \text{ حجم } \frac{K^2}{2-1} \quad ۲-۱$$

اسلئے دائرہ کا مقلوب ایک دائرہ ہے جس کا مرکز

(کد، ط) ہے اور جس کا نصف قطر $\frac{1}{2} \frac{1}{1-2}$ ہے

ابن مسادات کا ہندی مفہوم یہ ہے فرض کر دو کہ نقطہ ن کا مقابلہ ہے اور ون دائرہ معلومہ کو دوبارہ قی قطع کرتا ہے اب ون \times ون = ک اور ون \times وق = اُس فاس کا مربع جو سے کھینچا جائے = ج - ا

وَنَ = نَزَلَ وَقِي

پس مقلوب معنی اصلی دائرہ کاشی ہے پیمانہ کی پڑجہاں ن ق کا جواب ہے اور ق (جو ق کا مقلوب ہے) ن کا جواب ہے۔

اگر مرکز تقییب و دائرہ کے محیط پر واقع ہو تو دائرہ کی مسادات ہوگی
 $r = ۲$ (ط - ع) اور مقلوب کی رجم (ط - ع) = $\frac{۱}{۲}$ کی اس
 صورت میں دائرہ کا مقلوب ایک خط مستقیم ہے جو ویں سے گزرنیوالے نصف
 قطر پر عمود ہے۔ اگر تقییب کا نصف قطر r ہو تو مقلوب ویں سے گزرنیوالے
 قطر کے دوسرے سرے پر کا ماس ہوگا۔

مشق

۲۱۔ اگر ن کا مقلوب ن ہو تو ثابت کرو کہ ن کے نقط ن اور مقلوب کے نقط
 ن پر کے ماسات خط ون سے مساوی زاوے بناتے ہیں۔

توضیح مثالیں

(۱) اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے کہ دائرہ
 $لا + ۲$ لا ما جم سہ + ما + ۲ گ لا + ۲ ف + ما + ج =
 جو حصہ خط مستقیم لا + ص ما = اسے کاٹے اس کے سامنے مبدأ پر زاویہ قائمہ
 اگر ن اور م نقط نقط ہوں تو ویں ون اور وق کی مسادات معلوم
 کر کے ان کے باہم علی القوائم ہونی کی شرط معلوم کرنی چاہئے۔
 پہلی مسادات کی مدد سے دوسری مسادات کو متجانس بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ
 ون اور وق کی مسادات ہے

$لا + ۲$ لا ما جم سہ + ۲ گ لا + ۲ ف + ما (لا + ص ما)
 + ج (لا + ص ما) =

یا $لا + ۲$ گ لا + ج لا + ۲ لا ما جم سہ + گ م + ف لا + ج لا + م
 + م لا + ۲ ف + ج م =

اگر یہ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو حصہ اول دفعہ ۲ کی رو سے

$لا + ۲$ گ لا + ج لا + ۲ لا + ۲ ف + ج م + ج م =

۲ - (جم سہ + گ م + ف لا + ج لا + م) جم سہ =

یا اختصار کے بعد

$$۲ \text{ جب } س + ل (گ - ف \text{ جم } س) + ۲ م (ف - گ \text{ جم } س) \\ + ج (ل + م - ل م \text{ جم } س) = ۰$$

جو شرط مطلوبہ ہے۔

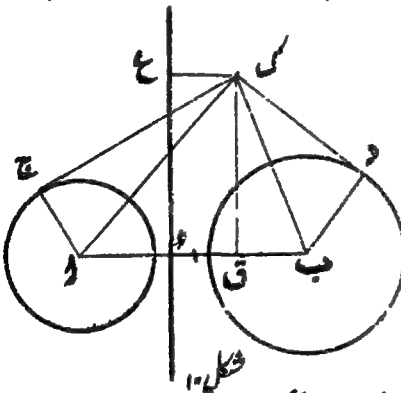
(۲) ثابت کرو کہ اگر کسی نقطہ کے سے دو معلومہ دائروں کے تماس کیجئے جائیں تو ان کے مرکزوں کا فرق دو چند سطح کے ح یا ل ب کے مساوی ہے جہاں کہ ع نقطہ کے بنیادی محور پر عمود ہے اور ل ب دائروں کے مرکز ہیں۔

فرض کرو کہ ک کے محدود (ل، ل) میں اور دائروں کے مساواتیں

$$س = ۰ \text{ اور } س = ۰ \text{ میں جہاں}$$

$$س = لا + ما + ۲ گ ل + ۲ ف ب + ج$$

$$\text{اور } س = لا + ما + ۲ گ ل + ۲ ف ب + ج$$



نیز فرض کرو کہ س اور س
ان نتائج کو تعبیر کرتے ہیں جو ک
کے محدودوں کو جملات س اور س
میں مندرجہ کرنے سے حاصل ہوں
نیز فرض کرو کہ نقطہ کے سے دائروں
کے تماس کے ج اور ک د کیجئے
گئے ہیں تب کہ ج = س، ک د = س

۱. کہ ج = ک د = س - س - س (۱)
بنیادی ہر کی مساوات ہے س - س = جس میں لا کا سر ۲ (گ - گ) ہے
اور ما کا سر ۲ (ف - ف)

$$\text{اس لئے کہ } ع = \frac{س - س}{۲ (گ - گ) + (ف - ف)} \dots (۲)$$

(حصہ اول دفعہ ۱۷)

ہیں کہ ع کی علامت سے تعلق نہیں ل کے محدود (گ - گ - ف) ہیں

اور ب کے (- گ) - فن

$$\therefore \text{ا ب} = \sqrt{(\text{گ} - \text{گ}) + (\text{ف} - \text{ف})} \dots\dots\dots (۳)$$

(۱) (۲) اور (۳) سے ک ج - ک د = ۲ ک ع x ا ب
(۴) کسی نقطہ ف سے ایک ہم محور نظام کے دو معلومہ دائروں کے تماس
ف م اور ف م کہنے گئے ہیں ثابت کرو کہ جب ف م اسی نظام کے کسی
تیسرے دائرہ کے بیابا ہوگا تو نسبت ف م : ف م مستقل رہتی ہے۔

بطریقہ - بٹ - سب مثال بالا فرض کرو کہ م = . اور م = .
دو معلومہ دائروں کا بیابا ہوگا۔ اسی نظام کے کسی اور دائرہ کی مساوات
اس شکل کی ہوگی

$$\text{م} + \text{ل} = \text{س} \dots\dots\dots (۱)$$

جس کی ہندی تعبیر (دفعہ ۲۵) - ہے کہ

$$\text{ف م} + \text{ل} = \text{ف م}$$

یعنی جب نقطہ ف دائرہ (۱) کے محیط پر حرکت کرتا ہے تو

$$\frac{\text{ف م}}{\text{ف م}} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}} \text{ کہ مستقل ہے۔}$$

[ملاحظہ ہو کہ لہ کو منفی ہونا چاہئے اگر ف م اور ف م حقیقی ہوں]
(۴) ثابت کرو کہ دائرہ بیابا وتر دائرہ سے جو قوس کا ہوتا ہے اس کے نقطہ تقیض پر کا
ماس وتر کے متوازی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ل + م = ر دائرہ کی مساوات ہے اور قوس کے سرے ل
اور ب ہیں اور وسطی نقطہ ط۔

دفعہ ۳۶ کے طریق کتابت کے موافق فرض کرو کہ ل نقطہ عم ہے اور ب
نقطہ بیابا تب ط نقطہ ۱ (ع + بی) ہوگا۔ ط پر کے تماس کی مساوات ہے
لاجم ۱ (ع + بی) + مابج ۱ (ع + بی) = ر (۱)

وتر لب کی مساوات ہے ملاحظہ ہو مثال ۱۸ صفحہ ۲۸۔

لاجم $\frac{1}{4}$ (عہ + یہ) + ماجب $\frac{1}{4}$ (عہ + یہ) = رجم $\frac{1}{4}$ (عہ - یہ) (۲۰).....
ان دو مساواتوں میں لا اور ما کے سر وہی ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ یہ ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

(۵) لب ر در ایک ذوال بعد الاضلاع ہے جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتا ہے۔ لب ر نقطہ و پر پڑتا ہے لب ر جب در نقطہ ن پہ اور لب ر جب در نقطہ ق پر ثابت کر دے ن ق نقطہ و کا قطبی ہے۔
و لب اور و و ر کو محاذ لا اور ما فرض کرو۔

فرض کر دے کہ ان کا درمیانی زاویہ سہ ہے اور دائرہ کی مساوات ہے
لا + ۲ لا ماجم سہ + ما + ۲ گ لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰..... (۱)
تب و لا اور و ب مساوات درجہ دوم لا + ۲ گ لا + ۲ ج = ۰ کی اصلیں ہیں
اور و ر و مساوات لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰ کی اصلیں ہیں ج کی بجائے
ت لکھو اور فرض کر دے کہ و ل = م ت، و ر = ل ت

تب و ب = $\frac{م}{ل}$ اور م گ = - ت (م - $\frac{1}{ل}$)

نیز و د = $\frac{م}{ل}$ اور م ف = - ت (ل + $\frac{1}{ل}$)

اس لئے دائرہ کی مساوات ہو جاتی ہے

لا + ۲ لا ماجم سہ + ما + ۲ گ لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰..... (۲)
اور مبدأ و کا قطبی بلحاظ (۱) کے کمال م صفحہ ۲۲ کی رو سے ہے

$\frac{1}{ل}$ (م + $\frac{1}{ل}$) (لا + $\frac{1}{ل}$ + دل + $\frac{1}{ل}$) - ما - ت = ۰..... (۳)
اب چونکہ ن ق خطوط لا ر اور

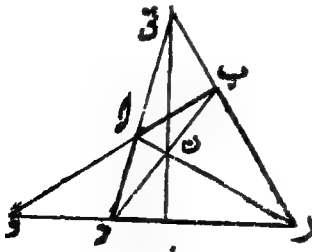
ب د کے نقطہ تقاطع میں ہے

اور نیز لا د اور ب ر کے نقطہ

تقاطع میں سے گزرتا ہے اس لئے

(حصہ اول دفعہ ۲۲ کی رو سے)

اس کی مساوات ذیل کی صورتوں میں پیش ہونی چاہئے



شکل ۱۱

۲۸۔ تین دائروں $لا + ما = ۹$ ، $لا + ما = ۲$ ، $لا - ما = ۵$ اور $لا + ما + لا + ما = ۱۹$ کے بنیادی مرکز کے محدد معلوم کرو۔

۲۹۔ ثابت کرو کہ دائرے $ر = ۲$ (جم - طہ - عہ) اور $ر = ۲$ (ج - طہ - یر) ایک دوسرے کو زاویہ عہ - بہ پر کاٹتے ہیں۔

۳۰۔ محیط پر کے کسی ایک نقطہ میں سے جتنے وتر گزرتے ہیں ان کے وسطی نقاط کا طریقی دریافت کرو۔

۳۱۔ ایک ایسے دائرہ کی مسادات معلوم کرو جو مبدا میں سے گزرنے کے علاوہ خط مستقیم $۲ لا + ۲ ما + ۲ = ۰$ اور دائرہ $لا + ما + ۲ لا + ۳ ما + ۲ = ۰$ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

۳۲۔ ان مسادات کی مسادات معلوم کرو جو مبدا سے دائرہ $لا - ن + (ما - ق) = ۰$ تک اکھینچے جائیں۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ کسی دو دائروں کی مساداتیں ہمیشہ اس طرح لکھی جاسکتی ہیں $لا + ما + ن + ج = ۰$ ، $لا + ما + ق + ج = ۰$ ۔

۳۴۔ اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے کہ شق ۳۳ کے دائروں میں سے ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالتمام اندر واقع ہو۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ نقطہ $ن$ (ق) کا قطبی بلحاظ دائرہ $لا + ما = ۰$ کے (لا - ج) + (ما - د) = ۰ (ب) کو مس کرتا ہے اگر $ب = (ن + ق)$ ، $د = (ج - ن - دق)$ ۔

۳۶۔ ایک خط مستقیم کا قطب بلحاظ دائرہ $لا + ما = ۰$ کے خط مستقیم $لا + ب + ما = ۰$ پر واقع ہوتا ہے ثابت کرو کہ خط مستقیم کی مسادات $لا - د = ۰$ (ج - ما - ج) ہے جہاں $ج$ مستقل ہے۔

۳۷۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے مرکز سے دو نقطوں کے فاصلوں میں جو نسبت ہے وہ ان عمودوں کی نسبت کے مساوی ہے جو ہر نقطہ سے دوسرے کے قطبی پر نکالے جائیں۔

۳۸۔ نقطہ $(ن، ق)$ سے دائرہ $لا + ما = ۰$ کے مس اکھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ جو مثلث ان مسادات اور $(ن، ق)$ کے قطبی سے بنا ہے اس کا قیہ $(ن + ق) - (لا + ج)$ ہے۔

- ۳۹۔ دو دائرہ (لا + ج) + (د + د) = ر اور (لا + ج) + (ما + ج) = ر کے مشترک کا طول معلوم کرو۔
- ۴۰۔ ایک ایسے دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو قائم محوروں کو مس کرے۔
- ۴۱۔ دو دائرہ لا + ما = لا + ما = لا + ما = ج لا = کے مشترک ماسوں کی مساوات معلوم کرو۔
- ۴۲۔ اُس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جو دو دائرہ لا + ما + گ لا + ما + گ لا + ما + گ لا + ما + گ لا + ما + ج = کے ساتھ ہم محور ہو اور مبدائیں سے گزرے۔
- ۴۳۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور اضلاع کی باہمی نسبت معلوم ہے ثابت کرو کہ اُس کا طریق ایک دائرہ ہے۔
- ۴۴۔ ایک ہم محور نظام دو دائرہ کے ماس ایک ہی سمت میں کیچے گئے ہیں اُن کے نقاط ماس کا طریق معلوم کرو۔
- ۴۵۔ اگر ایک سلسلہ کے دائرے ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر مس کریں تو ان کے قطبی نقاط ایک نقطہ معلوم کے مشترک ہوں گے۔

آزمائشی پرچہ ۱

- ۱۔ ایک خط مستقیم کا طول ۲ معلوم ہے اور یہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے سرے ہمیشہ محوروں پر واقع ہوتے ہیں اس کے وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو، محور قائم ہیں۔
- ۲۔ ایک نقطہ کا جو فاصلہ ہے اس کا مربع خط لا = پ = ل سے اس کے فاصلے کا ۲ لگنا ہے ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک نقطہ دائرہ ہے۔
- اس کا مقام معلوم کرو جو محور قائم ہیں۔
- ۳۔ اس کی بالتفصیل تشریح کرو کہ ”ایک منحنی کے ماس“ سے کیا مراد ہے۔
- ۴۔ دائرہ لا + ما = لا کے نقطہ ن پر کا ماس محاور لا اور ما سے بالترتیب
- ۵۔ دو م پر ملتا ہے ن ل اور ن ل ان محوروں پر عمود کھینچے گئے ہیں ثابت کرو:

ج ل × ج م = ل اور ج ل × ج م = ل جہاں ج دائرہ کا مرکز ہے۔

$$۵۔ \text{دائرہ ل}^۲ + \text{م}^۲ = ۲۵ \text{ اور ل}^۲ + \text{م}^۲ = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹ = ۷^۲$$

کے تقاطع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

۶۔ ف کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ خط مستقیم ل ا جم عہ + م ا جب عہ = ف دائرہ ل^۲ + م^۲ = ۲ ل ل = کو مس کرے۔

۷۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم م = ل ل دائرہ

$$\text{ل}^۲ + \text{م}^۲ = ۲ ل ل = ۲ م + ۱۸ م + ۱۸ = ۲ م + ۱۸$$

$$\text{اور ل}^۲ + \text{م}^۲ = ۲ ل ل = ۲ م + ۱۸ م + ۱۸ = ۲ م + ۱۸$$

کو مس کرتا ہے۔

اس سے حاصل کرو کہ دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اگر ل = ± م د

۸۔ ایک دائرہ کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں (اس نقطہ کو قطب مانکر) ان سے وسطی تقاطع کا طریق معلوم کرو ثابت کرو کہ اگر مرکز کا مقام نہ بدلتے تو یہ طریق دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہے۔

۹۔ اگر ایک خط مستقیم کا قطب بلحاظ دائرہ ل^۲ + م^۲ = ج کے دائرہ ل^۲ + م^۲ = ۹ ج پر ہو تو قطبی دائرہ ل^۲ + م^۲ = ج کا مس ہے۔

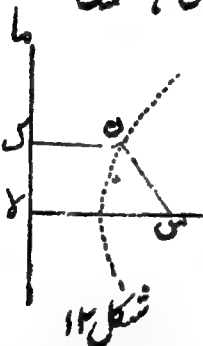
۱۰۔ نقطہ دین سے ایک خط کسی سمت میں کھینچا گیا ہے اور یہ ایک ثابت خط مستقیم سے نقطہ ن پر ملتا ہے اگر و ن پر ایک نقطہ قی ایسا لیا جائے کہ سطح و ن × و ق مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔



باب سوم

قطع مکانی

۳۸۔ مکانی تعریفات جب ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اثنائے حرکت میں اس کے فاصلے ایک ثابت نقطہ اور ایک ثابت خط مستقیم سے ہمیشہ مساوی رہتے ہیں تو اس کے طریق کو قطع مکانی یا اختصاراً مکانی کہتے ہیں۔



نوٹ ۱۔ اوپر کی تعریف میں "فاصلہ" سے مراد چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے، ثابت خط مستقیم کی صورت میں یہ اس عمود کے طول سے تعبیر ہوگا جو متحرک نقطہ کے کسی مقام سے ثابت خط مستقیم پر گھنچا جائے۔

نوٹ ۲۔ نقطہ کی حرکت ہمیشہ اس سطح

مستوی میں وقوع پذیر ہوتی ہے جس میں نقطہ اور خط واقع ہیں، اس کتب میں شروع سے آخر تک تمام نقطے، خط، اور منحنی ایک ہی سطح میں واقع ہیں۔

ثابت نقطہ کو ماسکہ کہتے ہیں اور ثابت خط مستقیم کو مرتب۔ ماسکہ کو بالعموم حرف م سے تعبیر کرتے ہیں اور م سے مرتب پر جو عمود نکالا جائے اس کے پایہ کو لا کہتے ہیں۔

مثلاً اگر منحنی پر کوئی نقطہ ن ہو اور ن سے مرتب پر عمود ن ک نکالا جائے

$$\text{تو } م ن = ن ک$$

محور مائل اور فرض کر دو کہ اس لاکھ طول ۲۱ ہے، اگر منحنی پر کوئی نقطہ

ن (لا) ہو تو جو کہ میں ن = ن گ

اس لئے $n^2 = n(n-1) + 1$ $n^2 = n + 1$ $n^2 = 1$

تحويل کے بعد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} (1 - \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{r^2})$

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۴۔ مساوات مکانی کی تحویل شکل $\mu = \nu$ و λ لائیں۔

اگر ہم بنیامبہ نقطہ ع (۱، ۰) یعنی اس کے نقطہ وسطی پر لیں اور نیچے

محور اصلی محوروں کے متوازی ہوں تو نئی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہمیں پیرامیٹری مساوات

میں لاکھ بچائے لا + ۱ اور ماکھ بچائے ماکھ بچائے۔ (دیکھو حصہ اول دفعہ ۳۱)

اس طرح مساوات ہو جائے گی

$$f \circ \gamma = (f - f + f) \circ \gamma = f$$

(1) لا $\gamma = 1$

۱۔ ہم رلا مساوات مکانی کی سادہ سے سادہ شکل ہے اور ضروری اور کھنی

چاہئے اُنے مجھ کو منتخب کئے گئے ہیں انہیں اصلی محور کہتے ہیں۔

۴۲۔ مکانی کی شکل کا اس کی مساوات سے حاصل کرنا۔

ع گد سید امانو (شکل ۱۵) اب س ع = ع لا = ا

اور مکانی کی مساوات ہے $m = \frac{1}{c^2}$ و لا

یعنی $1 = \pm 2$ اولاً

پس لاکھ ہر ایک مثبت قیمت کے لئے ماکی دوساوی اور مختلف علامت

نہایتیں حاصل ہوتی ہیں، نیز اگر ر کو مثبت قرار دیا جائے تو لا کے منفی ہونے کی

صورت میں لا سٹھی ہوگا اور اس کے ماغیر حقیقی ہوگا۔

اس سے ہم نتائج ذیل اخذ کرتے ہیں

(۱) منفی با تمام محسوس می آید و این جانب واقع ہے۔

(۲) ع م کے متوازی کوئی خط منحنی سے ایسے دو نقاط پر ملتا ہے جو خط ع ک سے

دوبارہ ن پرے تو ن د و ہر معین کہلاتا ہے، ماسکہ میں سے جو دہرا معین خ میں خ گذرتا ہے اسے وتر خاص کہتے ہیں، اس کا طول ۴ لا ہے کیونکہ مساوات

$$۴ = ۴ لا سے خ س = ۴ لا \times ع س = ۴ لا$$

$$خ س = ۲ لا اس لئے خ س خ = ۴ لا$$

مشقیں

۱۔ ثابت کرو کہ مکانی ما = ۴ لا پر کے نقطہ ن (لا، ما) کا فاصلہ ماسکہ سے لا + لا ہے۔

۲۔ ذیل کے ہر ایک مکانی کے وتر خاص کا طول معلوم کرو

$$(۱) ما = ۲ لا (۲) ما = ۷ لا (۳) ما = لا = -$$

۳۔ ایک مکانی کے رأس سے اس کے ماسکہ کا فاصلہ ۳ ہے، سادہ سے سادہ شکل میں اس کی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ مکانی ما = ۱۰ لا پر ایک نقطہ ن ایسا ہے کہ ان محمد لا سے بالترتیب زاوے (۱) ۵۴ (۲) ۳۰ بناتا ہے، ن کے محدود معلوم کرو۔

(۱) میں ن کا سین اس کے فاصلہ کے مساوی ہے]

۵۔ مکافیون کا مرسم کرنا

دفعہ ۳۹ میں بیان ہو چکا ہے کہ سب مکانی ایک ہی شکل کے ہوتے ہیں لیکن ناپ (اور البتہ محل) کے لحاظ سے مختلف ہوتے ہیں، طالب علم کو چاہئے کہ مربع دار کاغذ پر چند مکافیون کو نقطہ نقطہ مرسم کرنے سے انکی شکل سے بخوبی واقف ہو جائے، ملاحظہ ہو مثال ذیل۔

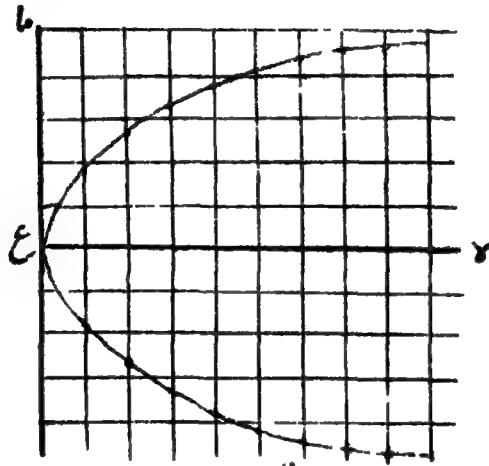
مثال مخفی ما = ۳ لا کو مرسم کرو

اگر ہم لا کو بالترتیب حسب ذیل قیمتیں دیں

$$۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰$$

تو ما کی متناظر قیمتیں حاصل ہوں گی

$$\begin{aligned} & ۳۱ \pm ۱, ۳۱ \pm ۱, ۱۸ \pm ۱, ۱۵ \pm ۱, ۱۲ \pm ۱, ۹ \pm ۱, ۶ \pm ۱, ۳ \pm ۱. \\ & یا ۰ \pm ۱, ۱۵ \pm ۳, ۲۵ \pm ۳, ۳۵ \pm ۳, ۴۵ \pm ۳, ۵۴ \pm ۳, ۶۴ \pm ۳, ۷۴ \pm ۳. \end{aligned}$$



شکل ۱۶

ان نقاط کی شکل میں نشان دہی کرنے اور ان میں سے ایک منحنی کھینچنے سے ہمیں مکانی کی شکل کا کچھ اندازہ ہوتا ہے۔
نوٹ حسابات میں آسانی ہوگی اگر ما کو قیمتیں $۰, ۱ \pm ۱, ۲ \pm ۱, \dots$
دیکر لا کی متناظر قیمتیں $۰, ۱, ۲, ۳, \dots$ معلوم کی جائیں۔

مشقیں

اسی طرح ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو۔

$$۵ - (۱) \text{ ما} = ۲ \text{ لا} \quad (۲) \text{ ما} = ۹ \text{ لا}$$

$$۶ - (۱) \text{ ما} = - \text{لا} \quad (۲) \text{ ما} = -۷ \text{ لا}$$

۴۴۔ مکانی کی مساوات بلحاظ ایسے محوروں کے جو اس کے اصلی محوروں کے متوازی ہوں۔

ہم یہ مان لیتے ہیں کہ طالب علم منحنی کی عام شکل سے واقف ہے، اب ہم مکانی کو مرتسم کرنے کی کوشش کرتے ہیں جبکہ اس کی مساوات ایسے محوروں کے لحاظ سے دی گئی ہو جن میں سے ایک، مکانی کے محور اور دوسرا اس پر کے مماس کے متوازی ہو۔

مثال (۱) منحنی $۲ - لا = ۵ + ۶۲$ کو مرتسم کرو۔
مساوات کو اس طرح ترتیب دو کہ دو رقبے جن میں ۲ شامل ہوتا ہے مربع کامل کی صورت میں رکھی جاسکیں

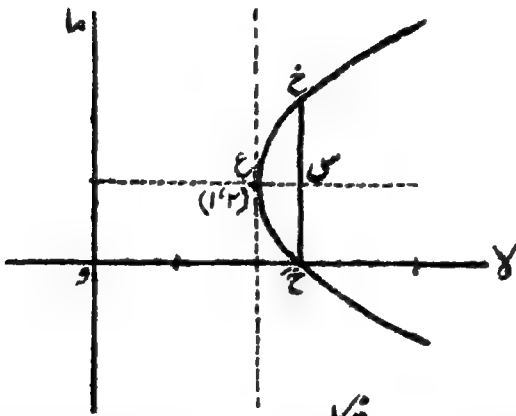
$$۱ - ۲ = ۶۲ - لا - ۵$$

$$۱ - ۲ = ۶۲ - لا - ۵ \quad (۲ - لا)$$

اب مبدأ کو نقطہ $(۱, ۲)$ پر منتقل کرو تو مساوات ہو جاتی ہے

$$۲ = لا$$

[ظاہر ہے کہ جس نقطہ پر ہم نے مبدأ کو منتقل کیا ہے وہ منحنی کا رأس ہے]



شکل ۱۷

منحنی مذکور ایک مکانی ہے جس کا وتر خاص ۲ ہے اس کو ہم باسانی مرتسم کر سکتے ہیں دیکھو شکل ۱۷۔

طالب علم کو یہ دیکھنے سے اپنے عمل کی تصدیق کرنی چاہئے کہ منحنی ابتدائی محوروں سے کہاں ملتا ہے۔ مثلاً جب $۱ = ۰$ تو $لا = ۲$ اور جب $لا = ۰$ تو

۲-۵+۵=۔ جس سے ماکہ خیالی قیاس حاصل ہوتی ہیں۔
 انتباہ۔ یاد رہے کہ مبدأ کو منتقل کرنے سے منحنی کی شکل اور ناپ میں فرق نہیں آتا، صرف اس کا مقام بلحاظ محوروں کے بدلتا ہے، ظاہر ہے کہ منحنی کا مقام بلحاظ نئے محوروں کے وہی نہیں ہے جو اس کا مقام بلحاظ پرانے محوروں کے ہے۔

مثال ۲۔ منحنی لا' = ۴ را کو مرتسم کرو۔
 مساوات لا' = ۴ را کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات لا' = ۴ را مادہ ہی ہے جو مساوات لا' = ۴ را اگر ہم محاور کا اور ماکہ

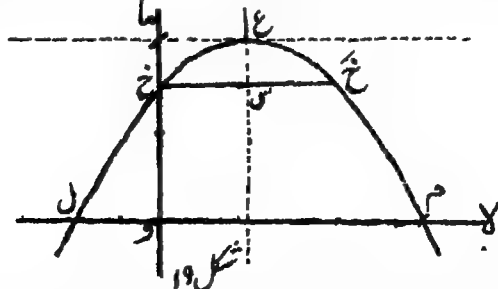
باہم تبادلہ کر دیں، یعنی یہ ایک ایسا مکانی ہے جس میں محور کا رأس پر کا ماس ہے (اور منحنی کا محور نہیں ہے) اور محور ماس منحنی کا محور ہے (اور رأس پر کا ماس نہیں ہے) اس لئے اسکی شکل منحنی شکل ۱۸ کی طرح ہوگی۔

مثال ۳۔ منحنی لا' = ۲+۲+۳=۔ کو مرتسم کرو۔

چونکہ مساوات میں لا' واقع ہوتا ہے اور لا شامل نہیں ہوتا، اس لئے ہمیں ان رقموں کو جن میں لا شریک ہوتا ہے مربع کامل بنانا چاہئے

$$\text{پس } (لا-۱) = ۲+۲+۳=۱+۳+۲=۲(لا-۱)$$

مبدأ کو نقطہ (۱، ۲) پر منتقل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا' = ۲-۲



اس لئے یہ ایک مکانی ہے جس کا وتر خاص ۲ ہے۔
 نیا محور لاؤ اس پر کاماس ہے اور نئے محور ماس کا منحنی حصہ منحنی کا محور ہے۔
 مکانی ابتدائی محور لاؤ وہاں قطع کرتا ہے جہاں $ما = ۰$ اور $لا = ۲$ - $۳ = ۳$ -
 یا $لا = ۳$ یا $۱ (م' ل)$ اور ابتدائی محور ماس کو جہاں $لا = ۰$ -
 اور $ما = ۳ (خ)$ - اس لئے منحنی کی شکل حسب بالا ہے دیکھو شکل ۱۹ -

مشقیں

- ۷۔ منحنی $ما = ۲$ - $لا = ۲$ کو مرتسم کرو۔
- ۸۔ ثابت کرو کہ مکانی $ما = ۲$ - $لا = ۲$ منحنی $ما = ۲$ - $لا = ۲$ کے بالکل مساوی ہے لیکن اس کا رخ مقابل کی جانب میں ہے۔
 [ملاحظہ ہو کہ $لا = ۲$ - $د$ سے ایک مکانی میں دہی معین حاصل ہوتا ہے جو $لا = ۲$ - $د$ سے دوسرے میں]
- ۹۔ $ما = ۲$ - $لا = ۳$ کو مرتسم کرو، ثابت کرو کہ اس کے وتر خاص کا طول ۳ ہے۔
- ۱۰۔ $ما = ۲$ - $لا = ۱۸$ - ۲۷ کو شکل میں کھینچو اور اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو۔
- ۱۱۔ مکانی $لا = ۲$ - $لا = ۸$ - ۱۲ کو مرتسم کرو اور اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو۔
- ۱۲۔ منحنی $ما = ۲$ - $لا = ۳$ کا راس کہاں ہے اس کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔
- ۱۳۔ منحنی $(ما + ۲) = ۲$ - $لا$ کا راس معلوم کرو، راس پر کے ماس کی مساوات معلوم کرو۔
- ۱۴۔ ثابت کرو کہ نقطہ $(لا، ما)$ مکانی $ما = ۲$ - $لا$ کے اندر یا اوپر یا باہر واقع ہوگا اگر $ما$ بالترتیب کم ہو، مساوی ہو یا بڑا ہو $ما$ - $لا$ سے۔
- ۱۵۔ معلوم کرو کہ نقطہ $(۲، ۱)$ مکانیوں $ما = ۲$ - $لا$ اور $لا = ۲$ - $ما$ کے اندر ہے یا باہر اس کی توضیح کے لئے شکل کھینچو۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ مخفی (ما۔ ف) = ق (لا۔ ر) کا اُس (ر، ف) ہے اور وتر خاص ق ہے۔

۱۷۔ ذیل کے مخفیات کے راس، ماسکے اور مرتب معلوم کرو۔

۴۵۔ حوالہ کے محور خواہ کوئی ہوں مکانی کی مساوات ہمیشہ درجہ دوم کی ہوگی اور لا، ما میں جو درجہ دوم کی رقتیں ہیں وہ ایک مربع کامل بنائیں گی۔
سادہ سے سادہ صورت میں مکانی کی مساوات ہے

$$y = 2x$$

اب اگر کسی نے محوروں کے لحاظ سے ہم اس مساوات کو بدلنا چاہیں خواہ یہ محور قائم ہوں یا مائل ہیں لا، ما کی بجائے نئے محددوں کے قطعی درجہ اول سے) چلے لکھنے ہوں گے (حصہ اول دفعہ ۳۵)

فرض کرو کہ لا کی بجائے ہم ل، لا + م + لا + م + لا اور ما کی بجائے
 ل + لا + م + لا + م + لا کہتے ہیں، اس طرح اوپر کی مساوات ہو جائے گی

$$(ل + لا + م + ن) = (ل + لا + م + ن)$$

جو درجہ دوم کی مساوات ہے۔

اس میں درجہ دوم کی رقمیں (ل، لا، م، ما، ن، نہ) ہیں اور یہ مریچ کامل بناتی ہیں۔

۴۶۔ اگر نئے محور قائم ہوں تو اس مسئلہ کو ہم ایک اور طرح ثابت کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ (لا، ما) ماسکہ میں کے محدود ہیں اور

تب س ن' = (لا-لا') + (ما-ما')

اور $n_k = \frac{(l, m, n)}{l + m}$ (مضامین و فصل ۱)

$$\frac{(ل, لا + م, ما + ن, نا)}{ل^۲ + م^۲} = (لا - لا') + (ما - ما') =$$

یہ 'لا' میں درجہ دوم کی مساوات ہے۔
کسوں کو خارج کرنے سے یہ ہو جاتی ہے

$$(ل, لا + م, ما + ن, نا) - \{(لا - لا') + (ما - ما')\} = (ل, لا + م, ما + ن, نا) -$$

اب 'لا' میں درجہ دوم کی رقیس ہیں

$$(ل, لا + م, ما) - (لا' + ما') = (ل, لا + م, ما) - (ل, لا - م, لا) \text{ اور}$$

یہ مربع کامل ہے۔

پس اگر درجہ دوم کی مساوات

۱ لا' + ۲ لا + ۳ ما + ۴ ب + ۵ گ + ۶ لا + ۷ ف + ۸ ج =
ایک مکانی کو تعبیر کرے تو رقوم ۱ لا' + ۲ لا + ۳ ما + ۴ ب + ۵ گ + ۶ لا + ۷ ف + ۸ ج میں
مربع کامل ہونا چاہئے اس کے لئے شرط یہ ہے کہ ۱ ب = ۴
ہم دفعہ ۵۲ میں دیکھئے کہ اس کا عکس بھی درست ہے یعنی
اگر درجہ دوم کی رقیس ایک مربع کامل بنائیں تو منہی مکانی ہوگا۔
مثال - ایک مکانی کا ماسکہ (۱'۱) ہے اور اس کے مرتب کی مساوات
۳ لا + ۴ ما = ۱ ہے اس کی مساوات اور اس کے وتر خاص کا طول دریا
کرے۔

اگر (لا', ما) کوئی نقطہ منہی پر ہو تو اس کا فاصلہ نقطہ (۱'۱) سے وہی
ہوگا جو اس کا عمودی فاصلہ خط ۳ لا + ۴ ما = ۱ سے ہے۔

$$\text{اس لئے } \sqrt{(لا - ۱)^۲ + (ما - ۱)^۲} = \frac{۳ لا + ۴ ما - ۱}{۲}$$

جس سے مساوات

ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$۲۵ لا - ۵۰ لا + ۲۵ ما - ۲۵ ما + ۲۵ لا + ۲۵ ما - ۱۶ ما - ۱۶ لا - ۸ ما - ۸ لا$$

∴ ۱۶ لا - ۲۴ لا + ۶ ما - ۴ لا - ۴ لا - ۶ ما + ۴ لا = ۰
و ترخاص اس عمود کا دو چند ہے جو ماسکہ سے مرتب پر کھینچا جائے اس لئے

$$۲ = \frac{۱ - ۱ \times ۴ + ۱ \times ۳}{۲۵۷} = \frac{۱۲}{۵}$$

مشقیں

۱۸ - اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۱۶) ہو اور مرتب

$$= ۱ + لا$$

۱۹ - اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۲۱) ہو اور مرتب

$$= ۲ - لا + ۶$$

۲۰ - اوپر کی مشقوں ۱۸ اور ۱۹ میں جو مکانی ہیں ان کے و ترخاص معلوم کرو۔

۲۱ - خط مستقیم مکانی سے دو نقاط پر ملتا ہے۔

فرض کرو کہ خط مستقیم ما = لا + ج ہے اور مکانی کی مساوات ما = لا + لا ہے، ان دونوں کے نقاط تقاطع معلوم کرنے کی غرض سے ہمیں ان دو مساواتوں کو ایک ساتھ لا، ما کے لئے حل کرنا پائے۔

ما کے لئے لا کی رقوم میں مندرج کرنے سے

$$(م لا + ج) = ۲ لا + لا \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{یعنی } م لا + ۲ لا (م ج - ۲) + ج = ۰$$

جو لا میں مساوات درجہ دوم ہے اس لئے اس کی دو اصلیں ہیں۔ اگر یہ

اصلیں لا، لا ہوں تو یہ نقاط تقاطع کے نقطے ہوں گے اور ان کے برابر

میں معین ہوں گے ما = م لا + ج، ما = م لا + ج اس طرح سے دو نقاط

تقاطع (لا، ما) اور (لا، ما) حاصل ہوتے ہیں۔

اگر م = ۰ تو مساوات درجہ دوم کی ایک اصل لامتناہی ہوگی اس صورت میں بھی

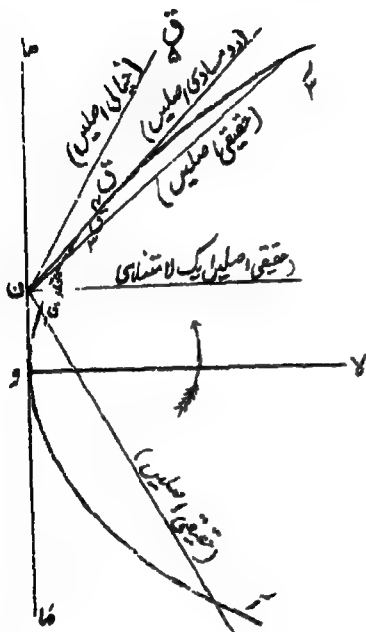
نقاط تقاطع دوہیں مگر ایک لامتناہی فاصلہ پر ہے۔

نوٹ۔ جب (ا) کی اصلیں خیالی ہوں تو خط مستقیم منحنی سے دو خیالی نقطوں پر ملے گا۔

اس مسئلہ کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے،
فرض کرو کہ ω ما پر کوئی نقطہ N ہے
اور N میں سے ایک خط NQ ر
کھینچا گیا ہے، نیز فرض کرو کہ یہ خط مقام
 N ما سے مقابل سمت ساعت
حرکت کر کے مقام N ما پر پہنچتا ہے
یعنی اس خط کا "م" ایسا کرتے ہیں
۔۔۔ سے (صفر میں سے گزر کر) ∞
تک بدلتا ہے، یہ خط ابتدا میں مکانی سے
دونقاط Q ، P پر ملے گا اور M کی
اُس قیمت کے لئے جو مقام NQ ر

۳۸۔ اس کی شرط معلوم کرو کہ خط $a = m$ لا + ج ستانی $a = m$ لا کو
میں کرے۔

اگر خط $a = m$ لا + ج منحنی کو مس کرے تو دونوں نقاط تقاطع ایک دوسرے



شکل ۲۰

منطبق ہوں گے اور لا میں جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے اسکی اصلیں مساوی ہوں گی۔ مساوات مذکورہ یہ ہے

$$(م لا + ج) - ۲ - ۴ لا = ۰$$

$$یا لا \times م + ۲ لا (ج م - ۲) + ج = ۰$$

اس لئے مساوی اصلوں کے لئے شرط ہے

$$(ج م - ۲) = ج م$$

$$یا - ۲ - ج م + ۲ = ۰$$

$$ج م = ۲ - ج = \frac{۲}{م}$$

$$اس لئے خط ما = م لا + \frac{۲}{م} \dots \dots (۲)$$

م کی تمام قیمتوں کے لئے مکانی کو مس کرتا ہے۔

انتباہ - جب م = ۰ یعنی جب خط محور ما کے متوازی ہو تو ثبوت بالا ناکام رہتا ہے کیونکہ مساوات کی شکل اس صورت میں لا = ج ہوتی ہے اور اس کے ذریعہ ہم ما کو ساقط نہیں کر سکتے، اس صورت میں ہمیں لا کی ایک قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی اور مختلف العلامت قیمتیں ملتی ہیں اور خط لا = ج منحنی کا ما میں نہیں ہو سکتا جب تک کہ ج صفر کے مساوی نہ ہو۔

۴۹ - چونکہ مکانی بند منحنی نہیں ہے اس لئے بعض خط اس کو ایسے نقاط پر ملیں گے جو بند اسے لا انتہا فاصلے پر ہوں۔

اس صورت میں لا کے لئے جو مساوات درجہ دوم ہے اس کی اصلوں میں سے ایک یا دونوں غیر متناہی ہوں گی، یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$لا \times م + ۲ لا (ج م - ۲) + ج = ۰$$

اور اس مساوات کی ایک اصل لامتناہی ہوگی اگر
 $m^2 = 0$ یعنی اگر $m = 0$ ۔ [نیوٹنریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۶۶]
 پس ایک ایسا خط مستقیم جو مکانی کے محور کے متوازی ہو منحنی سے دو نقاط
 پر ملتا ہے جن میں سے ایک لامتناہی فاصلہ پر ہوتا ہے۔
 اگر مساوات درجہ دوم کی دونوں اصلیں غیر متناہی ہوں
 تو $m^2 = 0$ اور $m = 2$ ۔
 جس سے یا 0 ۔ جو مفروضات کے خلاف ہے
 یا 2 ۔ اگر یہ درست ہو تو لامتناہی پر ہوگا۔
 اس لئے کوئی ایسا خط جو میوڈنا سے پر ہو منحنی سے ایسے دو نقاط پر

نہیں ملتا جو غیر متناہی فاصلہ پر ہوں۔
 ۵۰۔ اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ اس شکل $m^2 = 0$ یا 2 ب م کی
 مساوات ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔
 یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

ب م = $m^2 = 0$ یا 2
 یا لمحاذا م کے مربع کامل بنانے سے

$$(m - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + (2 - \frac{1}{4})$$

اور $(\frac{1}{4} - \frac{1}{4})$ کو نیا مبدأ مقرر کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

ب م = $m^2 = 0$ یا 2 [حصہ اول دفعہ ۳۱]
 جو اسی قسم کی مساوات ہے جو دفعہ ۳۱ میں حاصل کی گئی، اس لئے یہ مکانی
 کو تعبیر کرتی ہے۔

۵۱۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک خط مستقیم پر اس کے عمود
 کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے اس کا عمود ایک اور خط پر، ثابت کرو کہ نقطہ کا
 طریق مکانی ہے۔

خطوط کے نقطہ تقاطع کو مبدأ اور پہلے خط کو محور لا مانو، تو دوسرے خط کی مساوات اس شکل کی ہوگی $ما - م لا =$ ۔

اس لئے مساوات ہے $ما = ک$ $\frac{ما - م لا}{ما + م لا}$ [حصہ اول دفعہ ۱]

جہاں ک مستقل ہے، لیکن یہ مساوات صرفاً $ما = ن لا + ق$ کی شکل کی ہے، اس لئے یہ ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔

۵۳۔ اگر مساوات $لا + م لا + م + ب + م + ک + لا + م + ج =$ میں درجہ دوم کی رقتیں (یعنی $لا + م لا + م + ب + م + ک + لا + م + ج =$) مربع کامل بنائیں تو مساوات ایک مکانی کو تعبیر کرے گی۔

فرض کرو کہ $لا + م لا + م + ب + م = (عہ لا + ب + م)$

تب $(عہ لا + ب + م) = (ک + لا + م + ج)$

اب نقطہ $(لا، م)$ سے خط $عہ لا + ب + م =$ پر جو عمود کھینچ سکتا ہے

اس کا مربع $\frac{(عہ لا + ب + م)}{عہ + ب + م} =$

اور خط $ک + لا + م + ج =$ پر کا عمود اسی نقطہ سے

$\frac{ک + لا + م + ج}{ک + م + ج} =$

اس لئے انہی کے تقاطع کے لئے پہلے عمود کے مربع کی نسبت دوسرے عمود کے ساتھ

$\frac{ک + لا + م + ج}{ک + م + ج} \div \frac{(عہ لا + ب + م)}{عہ + ب + م} =$

$\frac{ک + لا + م + ج}{عہ + ب + م} =$ جو مستقل ہے۔

اس لئے دفعہ ۵۴ کی رو سے مساوات سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے وہ مکانی ہے۔

مشقیں

۲۱۔ ثابت کرو کہ مساوات $ا^۲ = لا + ما$ ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے، اس کے راس کے محدود معلوم کرو۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ مساوات $ا^۲ = لا + ما + ا$ ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے، اس کے راس کے محدود معلوم کرو، نیز اس کے محور اور راس پر کے حماس کی مساواتیں معلوم کرو۔

[مبدأ کو بدلنے سے ہم مساوات کو شکل $ا^۲ = لا + ما$ میں لا سکتے ہیں، اب $لا = ۰$ اور $ما = ۰$ ۔ بالترتیب راس پر کے حماس اور محور کی مساواتیں ہیں، پس یہ مساوات کو پرانے مبدأ کے لحاظ سے بدلو]

۲۳۔ ثابت کرو کہ $ا^۲ = لا + دب$ ماکہ شکل کی مساوات ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور و ماکہ متوازی ہے۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ مثال ۲۳ میں مکانی کا راس نقطہ $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ پر ہے۔

۲۵۔ مکانی $ا^۲ = لا + ما$ کا راس، ماسکہ، مرتب معلوم کرو۔

[سب سے پہلے راس اور وتر خاص کا طول معلوم کرو، پھر شکل کو استعمال کرو]

۲۶۔ ثابت کرو کہ مکانی $(عہ لا + بہ ما) + گ لا + ف ما + ا = ۰$ کا محور خط استقیم عہ لا + بہ ما = ۰ کے متوازی ہے۔

باب سوم پر متفرق مشقیں

۲۷۔ اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(-۱, ۱)$ ہو اور مرتب $لا + ما + ۲ = ۰$ ۔

۲۸۔ مشق ۲۷ کے مکانی کا وتر خاص معلوم کرو۔

۲۹۔ مکانی $ا^۲ = لا + ۵$ اور خط استقیم $لا + ما = ۳$ کے نقاط تقاطع کے

تقاطع میں سے ایک لاتنا ہی پر ہوگا، اس لئے لا + ما =۔ محور کے متوازی ہے۔
 ۳۹۔ مکانی کا محور لا جم عہ + ماجب عہ = ع۔ ہے، رأس پر کاماس
 لاجب عہ۔ ماجم عہ =۔ اور وتر خاص م اور، ثابت کرو کہ مکانی
 کی مساوات

(لا جم عہ + ماجب عہ - ع) = م + م (لا جب عہ - ماجم عہ)
 ہے جہاں علامت اس امر پر منحصر ہے کہ مکانی رأس پر کے مماس کے ایک
 طرف واقع ہے یا دوسری طرف -

[ضابطہ ن م = م اس م x م استعمال کرو جہاں ن م محور پر
 عمود ہے اور م اس عمود کے مساوی ہے جو رأس پر کے مماس پر
 کھینچا جائے۔]

۴۰۔ اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جس کا محور لا + ما - ۲ =۔ ہے
 رأس پر کا مماس لا - ما =۔ اور وتر خاص م، مکانی رأس پر کے
 مماس کے اس طرف واقع ہے جس طرف نقطہ (۱، ۲) ہے۔
 ۴۱۔ اس مکانی کی مساوات معلوم کرو جس کے محور، رأس، اور وتر خاص
 سب وہی ہوں جو اوپر کی مشق میں لیکن یہ رأس پر کے مماس کی دوسری
 جانب واقع ہو۔

۴۲۔ ثابت کرو کہ اگر خط مستقیم لہ لا + مہ ما + نہ =۔ مکانی
 مہم ن لا + م ن ق =۔ کو مس کرے تو لازماً
 لہ ق + لہ نہ = ن مہ =۔

آزمائشی پرچہ ۱

۱۔ جو خطوط مبرا کو لا + ب + م + گ لا + م ن ما =۔ اور ما = م لاج
 کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں ان کی مشترک مساوات معلوم کرو اور اسے
 اس کی شرط معلوم کرو کہ ما = ج، لا + ب + م + گ لا + م ن ما =۔ کا
 مماس ہو۔

۲۔ ا ب ج ایک مثلث ہے، د ع ایک متغیر خط ہے جو ب ج کے متوازی ہے اور ا ب کو د پر ا ج کو ع پر قطع کرتا ہے، ب ع اور ج د کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۳۔ اگر محور قائم ہوں تو بتاؤ کہ ان کو کس زاویہ میں سے پھرایا جائے کہ $ا + لا + ۲$ صہ $لا + ما + ب$ ما جملہ $ا + لا + ب$ ما میں تحویل ہو جائے ایک سادہ ربط $ا + ب$ ، $ا$ ، $ب$ میں حاصل کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ محوروں کی کسی تبدیلی سے مساوات کا درجہ نہیں بدلتا۔

۵۔ مثال دفعہ ۴ کی مانند (۱) مکانی $لا + ۳ = ما + ۷$

(۲) منحنی $۱۰۰ = ما + ۴ لا + لا$ کو مرتب کرو۔

۶۔ منحنی $لا + ۲$ $ا + لا + ۳$ $ا + ما + ۱$ کو گھنچو اور (۱) مرتب کی مثال

(۲) وتر خاص کے سروں کے محدد، معلوم کرو نیز محور کا پر کا منقطعہ معلوم کرنے سے اپنے کام کی تصدیق کرو۔

۷۔ ایک مکانی کا اسکے $(ا - ۱)$ ہے اور مرتب $لا + ما + ۲ = ۱۰$ اسکے وتر خاص کا طول اور اسکی مساوات معلوم کرو۔

۸۔ ثابت کرو کہ خط استقیم $لا + ن + ما + ا$ $ن = ۲$ مکانی $ما = ۴ لا$ کو مس کرتا ہے، اس کا نقطہ تماس معلوم کرو۔

۹۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$ا + لا + ۲ صہ لا + ما + ب + ۲ گ لا + ۲ ن + ما + ج = -$$

ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے اگر صہ $ا + ب$

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کا رقبہ جو مکانی $ما = ۴ لا$ کے اندر بنایا جائے ہے

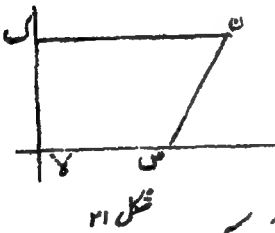
$$\frac{1}{8} (ل - م) (م - ن) (ن - ل)$$

جہاں ل، م، ن، راسوں کے معین ہیں۔

باب چہام

قطع ناقص

۴۳۔ قطع ناقص، تعریفات۔ جب ایک نقطہ اسطرح حرکت کرے کہ اس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے ہمیشہ مستقل نسبت رکھتا ہو (جو ایک سے کم ہو) اُس عمودی فاصلہ کے ساتھ جو متحرک نقطہ اور ایک ثابت خط مستقیم کے درمیان ہے تو اس نقطہ کے طریق کو قطع ناقص کہتے ہیں۔



ثابت نقطہ کو ماسکہ اور ثابت خط مستقیم کو مرتب کہتے ہیں اور مستقل نسبت خروج المرکز کہلاتی ہے۔

خروج المرکز کو بالعموم حرت "ز" سے تعبیر کرتے ہیں قطع ناقص کی صورت میں نسبت ز ایک سے کم ہوتی ہے۔ مثلاً اگر ن کوئی نقطہ منحنی پر ہو اور ن ک عمود ہو مرتب پر تو

$$س ن = ز \times ن ک \dots \dots \dots (۱)$$

۴۴۔ قطع ناقص کی مساوات معلوم کریں۔

فرض کرو کہ س ماسکہ ہے، لاک مرتب اور س لا اُس پر عمود ہے (دیکھو شکل ۲۱)

لا کو مبدأ اور لا س لاک کو محور مانو

فرض کرو کہ خروج المرکز ز ہے اور س لا = د

تب آگ نقطہ ن (جس کے محدود ل) مائیں) منحنی پر ہو تو

$$س ن = ز \times ن ک$$

$$\therefore \text{سن} = \text{ز} \times \text{نک}$$

یعنی (۱-۲) + ۱ = ۱ = ۱

$$\therefore \text{لا} (۱-۱) + ۱ = ۱ = ۱$$

جو ناقص کی مساوات مطلوبہ ہے۔

$$۵۵- \text{ناقص کی مساوات کی تحویل شکل} \frac{\text{لا}}{\text{ز}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱ \text{ میں}$$

سب کو بدلنے سے ہم مساوات دفعہ ۵ کو سادہ شکل میں لاسکتے ہیں جو عام طور پر استعمال ہوتی ہے، مساوات مذکورہ اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$(۱-۱) \text{ ز} \left\{ \frac{\text{لا}}{\text{ز}} - ۲ \right\} + \text{ما} + \text{ب} = ۱$$

لا کے لگانے سے مربع کامل بنانے سے

$$(۱-۱) \text{ ز} \left\{ \frac{\text{لا}}{\text{ز}} - ۲ \right\} + \text{ما} + \text{ب} = ۱$$

اب اگر ہم بنیاداً سن کے ایک ایسے نقطہ پر لیں جو لا سے فاصلہ $\frac{\text{ب}}{\text{ز}}$ پر ہو اور نئے محور پر لانے محوروں کے متوازی ہوں تو حصہ اول دفعہ ۳۱ کی رو سے اوپر کی مساوات ہو جائیگی

$$(۱-۱) \text{ ز} \left\{ \frac{\text{لا}}{\text{ز}} - ۲ \right\} + \text{ما} + \text{ب} = ۱$$

$$\text{یا } \frac{\text{لا}}{\text{ز}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$$

اب $\frac{\text{لا}}{\text{ز}}$ کو $\frac{\text{لا}}{\text{ز}}$ کے مساوی رکھو

تو $\frac{\text{لا}}{\text{ز}}$ پر دونوں جانب تقسیم کرنے سے اوپر کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{لا}}{\text{ز}} = \frac{\text{لا}}{\text{ز}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$$

اور $\frac{\text{لا}}{\text{ز}}$ (۱-۱) کو جب کے مساوی رکھنے سے یہ مساوات ہوگی

$$\frac{\text{لا}}{\text{ز}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱ \quad (۲)$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ز}} = ۱ - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}$$

مثال۔ اس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسک (۱، ۱) جو

مناظر مرتب ۲ لا - ما + ۱ = ۰ اور خروج المکرز $\frac{\text{لا}}{\text{ز}}$ ہے۔

یہاں اگر ن کے محل لا ما ہوں تو

س ن = (لا - ۱) + (۱ - ما) ن ک نقطہ ن سے مرتب پر
 عمود ہے = $\frac{۲ - لا - ما}{۱ + ما}$
 لیکن س ن = ر × ن ک = $\frac{۱}{۲}$ ن ک
 اسلئے (لا - ۱) + (۱ - ما) = $\frac{۱}{۲}$ (ما - لا - ۱ + ۱)
 مطلوبہ مساوات ہے مختصر کرنے اور رقموں کو ایک طرف بجانے سے
 $۲ لا + ما - لا ما + ۱ - ۲ - ۲ ما - لا - ۱۸ + ۱۹ = ۰$

مشقیں

- ۱۔ اس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۱۰) ہو مرتب
 لا + ما = ۰ اور خروج المرکز $\frac{۱}{۲}$
- ۲۔ اس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ (۱۰ - ب) ہو مرتب لا = $\frac{۱}{۲}$ اور خروج المرکز $\frac{۱}{۲}$ - ب

۵۶۔ قطع ناقص کی شکل

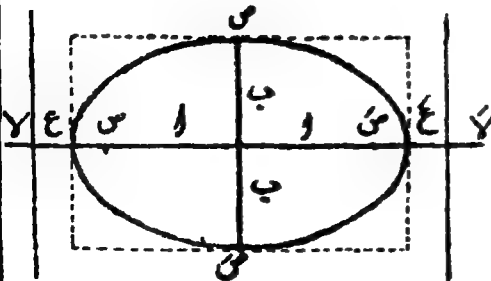
ناقص کی مساوات کی سادہ ترین صورت $\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{ب} = ۱$
 سے اس کی شکل باسانی مائل ہو سکتی ہے۔
 مساوات سے ما = (۱ - $\frac{۲}{۳}$)
 اور چونکہ ما کو لازماً مثبت ہونا چاہئے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$۱ - \frac{۲}{۳} > ۰$$

یعنی لاکہ عددی قیمت اسے بڑی نہیں ہے
 اس طرح ماکہ قیمت ب سے زیادہ نہیں ہوتی۔
 اوپر کی مساوات سے

$$ما = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

اس لئے (۱) لا تعداداً اسے
 بڑا نہیں ہو سکتا۔



شکل ۳۲

(۲) لا \pm ل سے حاصل ہوتا ہے ما = ب؛ اب چونکہ خطوط لا = \pm ل سے ماکہ دونوں قیمتیں صفر کے مساوی حاصل ہوتی ہیں اس لئے یہ دونوں خط حماس ہیں۔
 (۳) لا کی کسی ایسی قیمت کے جواب میں جو ل سے کم ہو ماکہ دو مساوی اور مختلف علامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

پس منحنی بالتمام خطوط لا = + ل اور لا = - ل کے درمیان واقع ہے اور اگر اس کا کوئی وتر محور ما کے متوازی کیجنا جائے تو محور لا پر اس کی تصنیف ہوتی ہے یعنی منحنی محور لا کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

ای طرح مساوات لا = \pm ب $\sqrt{\frac{ب}{ا}}$ - ب سے ہم حاصل کرتے ہیں کہ منحنی بالتمام خطوط ما = + ب اور ما = - ب کے درمیان واقع ہے اور محور ما کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ جب ایک محدود تعداد بڑھتا ہے تو دوسرا تعداد ا کم ہوتا ہے لہذا انہی بیضوی شکل کا ہے ملاحظہ ہو شکل بالا۔

اگر محور لا پر نقطہ ع اور ع ایسے لئے جائیں کہ ج ع = ج ع = ل جہاں ج مبداء ہے اور محور ما پر نقطہ ص اور ص لئے جائیں جہاں ج ص = ج ص = ب

تو ع اور ص کو بالترتیب ناقص کے محور اعظم اور محور اصغر کہتے ہیں نقطہ ج مرکز کہلاتا ہے۔

نتیجہ صریح منحنی لا = $\frac{ب}{ا}$ + $\frac{ب}{ا}$ = ا میں اگر ب < ل تو صریحاً ناقص کا محور اعظم ب محور ما پر واقع ہوتا ہے اور محور اصغر ل محور لا پر اس صورت میں ناقص کے ماسکے محور ما پر واقع ہیں دونوں مرتب محور لا کے متوازی ہیں اور خروج مرکز مساوات لا = ب (۱ - ل) سے حاصل ہوتا ہے۔

مشقیں

۳- ذیل کے منحنیات کو ایک ہی شکل میں کیجیو۔

$$(۱) \frac{لا}{ا} + \frac{ب}{ا} = ۱ \quad (۲) لا + ب = ۱ \quad (۳) م لا + ما = ۱$$

۴۔ مشق ۳ میں جو منحنی دئے گئے ہیں اُن میں سے ہر ایک کی صورت میں نیم محور اعظم (ج ع) کے نقطہ نصف پر جو منحنی کا معین ہے اس کا طول معلوم کرو۔
 ۵۔ ثابت کرو کہ نقطہ (طھ، ک) ناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے باہر واقع ہوگا اگر بالترتیب

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

۶۔ معلوم کرو کہ نقطہ $(\frac{3}{10}, \frac{2}{10})$ منحنیات

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (2) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

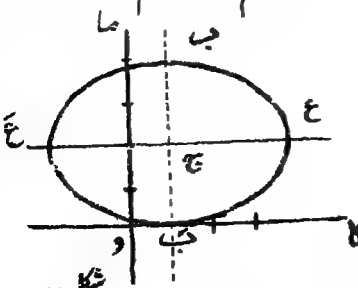
کے باہر یا اندر واقع ہے اور شکل کے ذریعہ اپنے جواب کی توضیح کرو۔
 ۷۔ ناقص کی مساوات ایسے محوروں کے لحاظ سے جو اصلی محوروں کے متوازی ہوں۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

میں ناقص کا مرکز مبداء ہے اور منحنی کے محور حوالہ کے محور ہیں۔

اکثر اوقات منحنی کی مساوات ایسے محاور کے لحاظ سے دی جاتی ہے جو منحنی کے محوروں کے متوازی ہوتے ہیں لیکن اُن پر منطبق نہیں ہوتے۔ اس صورت میں منحنی کا مرتسم کرنا ایسا مشکل نہیں ہوتا۔ کافی کی صورت میں ہم نے مبداء کو کافی کے رأس پر منتقل کرنے سے مرتسم حاصل کی قطع ناقص (۱) اور قطع زائد باب پنجم کو مرتسم کرنے کے لئے ہم مبداء کو منحنی کے مرکز پر منتقل کر نیکی ترکیب عمل ذیل نشانی مثالوں سے بخوبی واضح ہوگی۔

مثال ۱۔ منحنی $\frac{x^2}{(1-a)^2} + \frac{y^2}{(2-b)^2} = 1$ کو مرتسم کرو۔ اگر ہم مبداء کو نقطہ



ج (۱) پر منتقل کریں تو مساوات ہو جائیگی
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ [حصہ اول دفعہ ۳۱]
 یہ صریحاً قطع ناقص ہے جس کے محور ۳ اور ۲ ہیں۔

ابتدائی محوروں پر مقطوعات کا طول

معلوم کرنے سے شکل کی تصدیق کرو۔

$$لا = ۰ \text{ سے حاصل ہوتا ہے } (۲-۲) = \frac{۲}{۲} = ۱ - ۱ = \frac{۲}{۲} = ۱$$

$$یا \quad ۲ = ۲ \pm ۲ = ۴ \text{ یا } ۰ \text{ یا } ۱۲$$

$$اگر \quad ۲ = ۰ \text{ تو } (۱-۱) = \frac{۲}{۲} = ۱ - ۱ = ۱$$

مثال ۲- منحنی $لا + ۲م - ۲ - لا - ۱۶ + ۸ = ۰$ کو مرتسم کرو۔
یہاں $لا$ اور ۲ کی رقوم میں کوئی عددی مقدار صحیح کرنے سے انہیں مربع کامل بناؤ، اسطرح ۲ اور ۲ کی رقوم کو بھی مربع کامل بناؤ

$$تب \quad (لا - ۲) + (۱ + ۲ - ۲) + (۲ - ۲) + (۲ - ۲) = ۰$$

$$یا \quad (لا - ۲) + (۲ - ۲) = ۰$$

$$یا \quad ۱ = \frac{(لا - ۲)}{۲} + \frac{(۲ - ۲)}{۲}$$

مبدأ کو نقطہ $(۲, ۱)$ پر منتقل کرنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$۱ = \frac{لا}{۲} + \frac{۲}{۲}$$

جو مربعاً قطع ناقص ہے جس کے نصف محور ۳ اور ۲ ہیں ملاحظہ ہو شکل۔

یہ ابتدائی محور $لا = ۰$ کو کاٹتا ہے

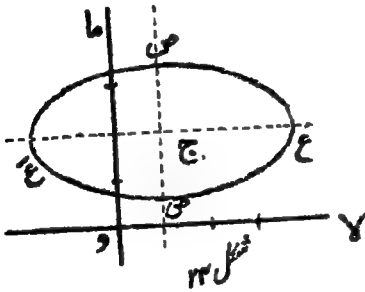
$$جہاں \quad ۲ = ۲ - ۱۶ + ۸ = ۰$$

$$یا \quad ۲ = ۲ \pm ۲ = ۴ \text{ یا } ۰$$

اور یہ محور $۲ = ۰$ کو کاٹتا ہے

$$جہاں \quad لا - ۲ = ۸ + ۲ = ۱۰ \text{ یعنی}$$

نیائی نقاط پر۔



مثال ۳- منحنی $لا + ۲م - ۲ - لا - ۱۶ + ۸ = ۰$ کو مرتسم کرو۔

مثال ۲ کی طرح ہم رقوم کو اسطرح اکٹھا کرتے ہیں

$$۲ = ۲ - (۱ + ۲ - ۲) + (۲ - ۲) = ۰$$

$$یا \quad ۲ = (۱ - ۲) + (۲ - ۲)$$

$$۱ = \frac{(۱ - ۲)}{۲} + \frac{(۲ - ۲)}{۲}$$

مبدأ کو نقطہ $(۱, ۰)$ پر منتقل کرنے سے یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

(۱) خروج المركز (۲) محور اعظم کے سروں کے محدود (۳) محور اصغر کے سروں کے محدود معلوم کرو۔

۵۸۔ ناقص کی قطبی مساوات جبکہ مرکز قطب ہو۔
قطبی مساوات حاصل کرنے کیلئے ہمیں (حصہ اول دفعہ ۶) کی رو سے مساوات

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

میں لا = رجم ط، ما = رجب طہ مندرج کرنا چاہئے۔
اس طرح حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sin \theta$
یا $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \dots \dots \dots (۳)$

جو قطبی مساوات مطلوبہ ہے۔
۵۹۔ قطبی مساوات سے منحنی کی شکل کا حاصل کرنا۔

مساوات (۳) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \sin \theta$$

اب چونکہ $\frac{1}{r}$ کے جب اس لئے $\frac{1}{r_1}$ اور $\frac{1}{r_2}$ کے
اس لئے جب زاویہ طہ صفر سے $\frac{1}{r_1}$ تک بڑھتا ہے تو بائیں طرف کا
جلہ بھی بڑھتا ہے اس لئے $\frac{1}{r}$ بڑھتا ہے یعنی ر کم ہوتا ہے پس جیسے
زاویہ طہ صفر سے $\frac{1}{r_1}$ تک بڑھتا ہے ر بالترتیب کم ہوتا ہے اور ہر برج
میں بھی واقع ہوتا ہے یعنی محور اعظم کے ایک سرے سے محور اصغر کے سرے تک
پہنچنے میں مسلسل کم ہوتا جاتا ہے۔

اس سے ہم منحنی کو ترسیم کرنے کی ایک آسان ترکیب حاصل ہوتی ہے کیونکہ
جہاں مرکز میں سے گزرنیوالا کوئی خط منحنی کو کاٹتا ہے اُن نقاط کا فاصلہ مرکز
سے ہم باسانی معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک ناقص کے نیم محور ۲ اور ۱ ہیں اس سمتی قطر کا طول معلوم کرو
جو محور اعظم سے ۵۴° کا زاویہ بنائے۔

منحنی کی کارٹیزیسی مساوات جبکہ محور اعظم اور اصغر حوالہ کے محور مانے جائیں
 $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \sin \theta$

اس لئے اگر مرکز قطب ہو تو قطبی مساوات سے

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{\text{جیب}^2 \text{ ط}}{r} + \frac{\text{جیب}^2 \text{ ط}}{p} = \frac{5}{8}$$

اس لئے $r = \sqrt{\frac{8}{5}}$ مثال ۲۔ قطع ناقص میں جو کسی نیم قطر علی القوائم ہوں اُن کے مربعوں کے شکافیوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی نیم قطر یہ ہیں r جو ج ع سے زاویہ ط بناتا ہے اور p جو ج ع سے زاویہ $(\frac{\pi}{2} + \text{ط})$ بناتا ہے تب

$$\frac{\text{جیب}^2 \text{ ط}}{r} + \frac{\text{جیب}^2 (\frac{\pi}{2} + \text{ط})}{p} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\text{جیب}^2 \text{ ط}}{r} + \frac{\text{جیب}^2 (\frac{\pi}{2} + \text{ط})}{p} = \frac{1}{a} \quad \text{جمع کرنے سے}$$

$$\frac{\text{جیب}^2 \text{ ط} + \text{جیب}^2 (\frac{\pi}{2} + \text{ط})}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{a}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مشقیں

۱۹۔ مشق ۳ دفعہ ۵۶ کے منجیات میں اُن کسی نیم قطروں کا طول مرکز سے دریافت کرو جو محور اعظم سے (۱) ۴۵° (۲) ۶۰° کے زاویے بنائیں۔

۲۰۔ ایک ہی شکل میں منجیات $\frac{1}{a} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$ اور $\frac{1}{a} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$ کو کہیں اُس زاویہ کا محاس معلوم کرو جو مشترک کسی نیم قطر نو. لا کے ساتھ بناتا ہے اور اس نیم قطر کا طول معلوم کرو۔

۶۰۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص ایک دوسرا ماسکہ اور ایک دوسرا مرتب رکھتا ہے۔

چونکہ منحنی بطاقلع ج ع اور ص ج ص کے متشاکل ہے اس لئے اگر ہم ج ع ج ع پر نقاط ملے اور لا ایسے ہیں کہ ج س = ج س اور ج لا = ج لا اور لا ک ج لا پر عمود کھینچیں تو ظاہر ہے کہ س دوسرا ماسک ہے اور لا ک دوسرا مرتب ہے اور ان کی مدد سے تمام قطع ناقص یعنی اسی طرح مرتب ہو سکتا ہے جس طرح کہ س اور لا ک کی مدد سے۔

۶۱۔ ثابت کرو کہ ج لا = $\frac{1}{2}$ اور ج س = $\frac{1}{2}$ اور

(۱) چونکہ ج ع اور ع منحنی پر واقع ہیں اس لئے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{س ع} = \text{ز ع} \times \text{لا} \\ \text{س ع} = \text{ز ع} \times \text{لا} \end{array} \right. \text{شکل ۲۶} \dots\dots\dots (۱)$$

$$\frac{\text{س ع}}{\text{ز ع}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = ۱$$

شکل ۲۶

ان دو نتائج کو جمع کرنے سے

$$\text{س ع} + \text{س ع} = \text{ز ع} (\text{لا} + \text{لا})$$

$$\text{لیکن } \text{س ع} + \text{س ع} = \text{ع ع} = \text{ع}^۲$$

$$\text{اور } \text{ع}^۲ = \text{لا} + \text{لا} = \text{لا} + \text{لا} = \text{لا} + \text{لا} = ۲ \text{ ج لا}$$

$$\therefore ۲ \text{ ج لا} = ۲ \text{ ج لا}$$

$$\therefore \text{ج لا} = \frac{۱}{۲} \dots\dots\dots (۲)$$

(۲) نیز (۱) سے عمل تفریق

$$\text{س ع} - \text{س ع} = \text{ز ع} (\text{لا} - \text{لا})$$

$$\therefore \text{س ع} - \text{س ع} = \text{ز ع} (\text{لا} - \text{لا})$$

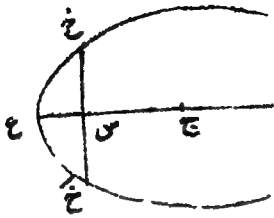
$$\text{یعنی } \text{س س} = \text{ز ع} \times \text{ع ع} \text{ یا } ۲ \text{ ج س} = ۲ \text{ ج لا}$$

$$\therefore \text{ج س} = \text{ج لا} \dots\dots\dots (۵)$$

نتیجہ صریح۔ ج لا \times ج س = $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} = \text{ج ع}^۲$

۶۲۔ وتر خاص تعریف۔ وتر خاص جس کو ماسک میں سے

محور پر عمود دار کھینچا جائے ناقص کا وتر خاص کہلاتا ہے اس کو بالعموم



شکل ۳۷

۲ ل سے تعبیر کرتے ہیں۔

$$\frac{ب^2}{ا} = \frac{ل}{نیم وتر خاص ل}$$

وتر خاص 'خ' 'خ' کی نصف 'س' پر ہوتی ہے اور چونکہ ج 'س' = 'وز' اس لئے

خ کے محدود (وز' ل) ہیں

$$اس لئے \frac{ل}{وز} + \frac{ل}{وز} = ۱$$

$$\therefore \frac{ل}{ب} = ۱ - \frac{ل}{وز} = \frac{ب^2}{ا}$$

$$\therefore \frac{ل}{ب} = \frac{ب^2}{ا} \dots \dots \dots (۶)$$

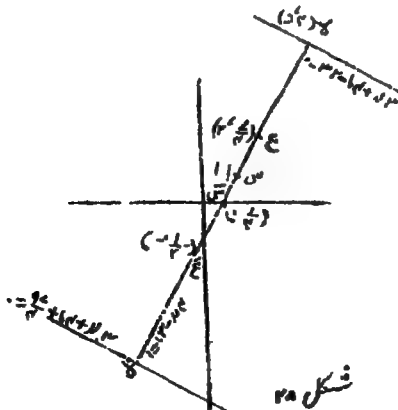
مثال۔ ایک قطع ناقص کا ماسکہ (۱۱) ہے مرتب ۳ + ۲۴ - ۳۲ = ۰ اور خروج مرکز 'س' ہیں نقاط 'ع' 'ع' اور ج کے محدود 'س' کے محاور کے طول اور دوسرے ماسکہ اور مرتب کے مقام معلوم کرو نیز ناقص کی مساوات دریافت کرو۔

سب سے پہلے ناقص کی مساوات صریحاً

$$\left[\frac{(۱-۱)}{۱} + \frac{(۱-۱)}{۱} \right]^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۱} = \frac{۳۲-۶۴+۲۴}{۲۵۶}$$

$$پس ۲۲۵ = \left\{ \frac{(۱-۱)}{۱} + \frac{(۱-۱)}{۱} \right\} (۳۲-۶۴+۲۴)$$

$$یعنی ۲۱۶ - ۲۴ - ۲۴ + ۶۴ - ۲۰۹ - ۱۶۵ - ۱۹۳ - ۵۷۴ = ۰$$



شکل ۳۸

نیز ع اور غ خط س لا کو داخلا اور خارجاً نسبت ۳:۱ سے تقسیم کرتے ہیں اس لئے ہیں لا کا مقام معلوم کرنا چاہئے۔

اب چونکہ س لا خط ۳ لا + م - م = ۳۲ پر عمود ہے اس کی مساوات اس شکل م لا - م + م = ک کی ہے اور چونکہ یہ (۱،۱) میں سے گزرتا ہے اس لئے یہ م لا - م = ۳۲ ہے اب نقطہ لا اس خط اور ۳ لا + م - م = ۳۲ کا نقطہ تقاطع ہے اس لئے اس کے محدد (۵،۴) ہیں۔

اس لئے ع کے لئے لا = $\frac{۲ \times ۱ + ۱ \times ۳}{۲ + ۱} = \frac{۵}{۳}$ ، $\frac{۴}{۳} = \frac{۵ \times ۱ + ۱ \times ۳}{۵ + ۱}$ [حصہ اول دفعہ ۳]

اسی طرح ع کے محدد ہیں $(\frac{۱}{۲}, ۱)$

نیز ج خط ع کا نقطہ تنصیف ہے اور اس لئے یہ ہے $(\frac{۵}{۲}, \frac{۱}{۲})$

محوروں کے طول معلوم کرنے کے لئے ج ع = $\sqrt{(\frac{۵}{۲} - ۱)^2 + (\frac{۱}{۲} - ۲)^2}$

∴ $\frac{۵}{۲} = ۱$ اور $\frac{۱}{۲} = ۱$ $\frac{۵}{۲} = ۱$ اور $\frac{۱}{۲} = ۱$ $\frac{۵}{۲} = ۱$ اور $\frac{۱}{۲} = ۱$

اگر دوسرا مسکہ (لا، ہا) ہو تو ج نقطہ (۱،۱) اور (لا، ہا) کا نقطہ تنصیف ہوگا پس $\frac{۵}{۲} = ۱ + ۱ = ۲$ ∴ $\frac{۵}{۲} = ۱$ $\frac{۱}{۲} = ۱$ $\frac{۵}{۲} = ۱$ $\frac{۱}{۲} = ۱$

اس لئے دوسرا مسکہ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ ہے

دوسرا مرتب پہلے مرتب کے متوازی ہے اور اس کا فاصلہ مرکز سے پہلے مرتب کے فاصلے کے مساوی ہے لیکن علامت میں مختلف ہے۔ پس اسکی مساوات م لا + م = ک ہے اور

$\frac{۳}{۲} = \frac{۳۲ - ۱۲ + ۱۲}{۲} = ۱۲$ جہاں لا = $\frac{۵}{۲}$ اور م = $\frac{۱}{۲}$

اس لئے ک = $\frac{۹}{۲}$ اور دوسرا مرتب ہے $\frac{۳}{۲} = ۱۲ + م + م = ۱۲ + ۱ + ۱ = ۱۴$

مشقیں

- ۲۱۔ دفعہ ۵۶ کی شکل سے ثابت کرو کہ

$$س ص = ع ج، ج س = ا ز، ا ب$$
- ۲۲۔ ایک ناقص کے نیم قطر $م$ اور $س$ ہیں، اُن سمتی نیم قطروں کے طول معلوم کرو جو محور اعظم سے بالترتیب زاویے ۳۰° ، ۵۰° اور ۹۰° بنائیں۔
- ۲۳۔ اسی ناقص کا خروج مرکز اور وتر خاص معلوم کرو۔
- ۲۴۔ اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(ا، ۲)$ ہے، مرتب $لا + ما + ا = ۰$ اور خروج مرکز $\frac{۱}{۲}$ ہے، اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو
 $[ل = ز \times ماسکہ سے مرتب پرستہ عمود کا طول]$
- ۲۵۔ مشق ۲۴ میں جو قطع ناقص حاصل ہوتا ہے اس کے محور اعظم اور محور اصغر کے طول معلوم کرو۔
- ۲۶۔ اسی ناقص کے محور اعظم کے سروں کے محدودوں کے طول معلوم کرو۔
- ۲۷۔ اوپر کے ناقص کا دوسرا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔
- ۲۸۔ اُس ناقص کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(۰، \frac{۱}{۲})$ ہے، مرتب $لا + م + ا = ۰$ اور خروج مرکز $\frac{۱}{۲}$ ہے۔
- ۲۹۔ اگر ایک ناقص کے نیم محوروں کے طول اور ان کے مقام دئے ہوئے ہوں تو بتاؤ کہ ماسے اور مرتب کس طرح معلوم ہو سکتے ہیں۔
- ۳۰۔ ناقص پر کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ محور اعظم کے مساوی ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ $ن$ کے محدود $(لا، ما)$ ہیں، $ن$ م میں ہے اور $ن$ ک' $ن$ ک' مرتبوں پر عمود ہیں، تب

$$س ن = ز \times ن ک = ز \times م لا = ز (ج لا + لا)$$

$$= ز (لا + \frac{۱}{ز}) \text{ چونکہ ج لا} = \frac{۱}{ز}$$

ترتیب بدلتے اور ہم پر تقسیم کرنے سے ہیں حاصل ہوتا ہے

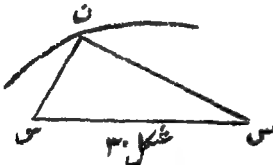
$$\frac{1}{2} \sqrt{(a-b)^2 + c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} \\ \text{دوبارہ مربع لینے سے } \frac{1}{4} (a-b)^2 + \frac{1}{4} c^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{2} ab \cos C + \frac{1}{4} c^2 \\ \text{یعنی } \frac{1}{4} (a-b)^2 + \frac{1}{4} c^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{2} ab \cos C \quad (1)$$

$$1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} - \frac{2ab}{c^2} \cos C$$

چونکہ $\frac{1}{2} \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$ اس لئے یہ ایک ناقص ہے جس کے ماسکے (۱)۔

اور (۱) سے (۲) ہیں (دیکھو دفعہ ۶۱)
۶۵۔ ناقص کی آلی رسم۔ دفعہ ۶۴ سے ہیں ناقص کے ترسم کرنیکی
آلی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

ایک تاگہ SN میں N کو اور اسکے سروں S میں کو دو کیلوں کیساتھ
جو ایک کاغذ پر ثابت کر دئے گئے ہیں مضبوطی سے باندھ دو۔ پھر ایک انتصابی
پنسل کے ذریعہ تاگے کو تانے رکھو پنسل کو حرکت
دینے سے ایک ناقص ترسم ہوگا جس کے ماسکے
میں اور SN ہیں اور جس کا محور SN ہے



$SN + SN = N$ تاگے کا طول
نوٹ ناقص کے نیچے حصہ کو ترسم کرنے کے لئے تمام تاگے کو SN میں
کے نیچے لانا پڑیگا اور پنسل اس صورت میں تاگے کے اوپر رہیگی۔

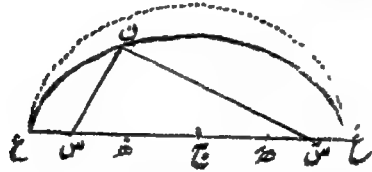
مشقیں

۳۰۔ ایک نقطہ اسطرح حرکت کرتا ہے کہ دو نقاط SN اور SN سے اس کے
فاصلوں کا مجموعہ ہمیشہ ۱۰ رہتا ہے اور $SN = ۸$ اس نقطہ کے طریق کی
سادہ سے سادہ مساوات معلوم کرو۔

۳۱۔ مثال ۳۰ میں جو منحنی حاصل ہوتا ہے اس کا ضلع انفرز اور اسکے نیم وتر خاص کا
طول معلوم کرو۔

۶۶۔ سب قطع ناقص ایک ہی شکل کے نہیں ہوتے (مقابلہ کر دیجیے ص ۳۹ کے ساتھ)
 فرض کرو کہ تاگے $س ن$ کے ذریعہ اور ماسکوں $س$ ، $س$ کے
 لحاظ سے ہم نے ناقص $ع ن ع$ کو مرتب کر لیا ہے اور اب ہم تاگے کے
 سروں کو $س$ ، $س$ پر کے دو نقاط $ھ$ اور $ھ$ پر باندھتے ہیں جہاں
 $س ھ س ھ$

تب ظاہر ہے کہ $ھ ن ھ$ بالعموم $س ن$ + $س ن$ کے
 مساوی نہیں ہے اور اس لئے $ھ$ ، $ھ$ کو ماسکے مان کر جو نئی کھینچا جائیگا وہ
 بالعموم $ن$ میں سے نہیں گزریگا۔



شکل ۳۱

اسی طرح یہ ناقص $ع ن ع$ کے کسی اور نقطہ میں سے نہیں گزریگا سوائے
 $ع$ اور $ع$ کے [اس لئے مثنیٰ ایک دوسرے کو قطع نہیں کریں گے]
 اس لئے نیا مثنیٰ ایک اور قطع ناقص ہوگا جس کا محور اعظم $ع$ ہوگا اور جو
 ناقص $ع ن ع$ کے بالتمام اندر یا باہر واقع ہوگا سوائے نقاط $ع$ اور $ع$ پر
 جہاں یہ مثنیٰ ایک دوسرے کو مس کریں گے اس سے معلوم ہوا کہ یہ ناقص ایک ہی
 شکل کے نہیں ہیں۔

نوٹ: نیا مثنیٰ اندر واقع ہوگا اگر $ھ$ خط $س$ ، $س$ ، $ھ$ پر واقع ہوں اور باہر ہوگا اگر
 $ھ$ ، $ھ$ خط $س$ ، $س$ کے اندر ہوں۔ یہ امر $ن$ کے اُس مقام پر غور کرنے سے ثابت ہو سکتا
 ہے جبکہ $ن$ محور اصغر پر واقع ہو یعنی $س$ کے دونوں حصے میں $س$ کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔
 ۶۷۔ دائرہ ناقص کی انتہائی صورت ہے۔

اگر دفعہ ۶۴ کے دو ثابت نقطے ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تو طریق صرفاً $ل$ کے
 نصف قطر کا ایک دائرہ ہے اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ
 اگر ایک ناقص کے ماسکے ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تو ناقص ایک ایسا دائرہ

بن جاتا ہے جس کا مرکز نقطہ انطباق پر ہوتا ہے۔
 دفعہ ۶۴ کی مسادات سے بھی یہ ظاہر ہے کیونکہ اگر ثابت نقطہ منطبق ہو جائیں تو ج = ۰۔
 اور مسادات ہو جاتی ہے لا + ما = لا جو نصف قطر لا کا ایک دائرہ ہے اور
 جس کا مرکز مبدأ پر ہے۔

نیز چونکہ ج س = لا اور دائرہ کی صورت میں ج س = ۰۔
 ہم دیکھتے ہیں کہ

دائرہ کی صورت میں خروج المرکز صغر ہوتا ہے

نیز دائرہ کیلئے ج لا = $\frac{1}{2}$ اور اس لئے

دائرہ کے مرتب مرکز سے غیر متناہی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

۶۸۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم ما = م لا + ج ناقص $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ = ۱
 سے دو نقاط (حقیقی یا خیالی) پر ملتا ہے۔ نیز وہ شرط معلوم کرو کہ خط مذکور ناقص کو مس کرے
 ان طریقوں کے نقاط مشترک معلوم کر نیکیے لئے ہیں۔ مساداتوں

$$ما = م لا + ج \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

کو ایک ساتھ حل کرنا چاہئے۔

دوسری مسادات میں ما کو م لا + ج کے مساوی رکھنے سے ہیں ذیل کی

$$مسادات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (ج + لا) = ۱$$

$$یا \quad لا \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (ج + لا) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (ج + لا) - ۱ = ۰$$

اس مسادات سے لا کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور لا کی ہر قیمت کے جواب

میں مسادات ما = م لا + ج سے ما کی ایک قیمت نکلتی ہے

پس خط مستقیم ما = م لا + ج اور ناقص $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ = ۱ کے
 دو نقاط تقاطع ہوئے۔

لا کی قیمتیں حقیقی، منطبق یا خیالی ہوں گی اگر بالترتیب

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (ج + لا) \right) (ج + لا) \leq ۰$$

[یٹوئریل الجبر حصہ دوم دفعہ ۱۵۹]

یعنی اگر $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}$

یا اگر $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$

اس لئے اگر $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$

تو یہ نقاط تقاطع ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اس لئے خطوط

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ (۸)

م کی تمام قیمتوں کے لئے ناقص کو مس کرتے ہیں۔ دوسری علامت یہ تعبیر کرتی

ہے کہ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ کے متوازی دو ماس ہیں۔

چونکہ ناقص ایک بند منحنی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ کوئی حقیقی خط اس کو غیر منہای فاصلہ پر قطع نہیں کر سکتا۔

یہ امر ادھر کی مساوات درجہ دوم سے بھی ظاہر ہے کیونکہ لا میں اگر اس کی

ایک اصل لا متناہی ہو تو

$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ [یوٹوریل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۶۶]

جس سے $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ جو خیالی ہے۔

مشقیں

۳۲۔ ابتدائی اصولوں سے وہ شرط معلوم کرو کہ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ ج ناقص لا $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ کو مس کرے اور نقطہ تماس کے محدد معلوم کرو۔

۳۳۔ لا $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ کے اُن ماسات کی مساواتیں معلوم کرو جو محور اعظم سے

۵۴۔ کا زاویہ بناتے ہیں۔

۳۴۔ لا $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ کے اُن ماسات کے نقاط تماس کے محدد معلوم کرو

جو محور اعظم سے ساتھ زاویہ θ بناتے ہیں اور ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملانے والا

خط مرکز میں سے گزرتا ہے۔

۶۹۔ ثابت کرو کہ ناقص کی مساوات درجہ دوم کی مساوات ہے خواہ حوالہ کے

محور کچھ ہی ہوں اور اگر درجہ دوم کی قیمتیں حسب معمول

۱ا + ۲ھ لا + ما + جب ما

ہوں تو اب < ھ
 مساوات کی سادہ سے سادہ شکل $\frac{1}{پ} + \frac{1}{ع} = 1$ ہے اب
 کسی نئے محوروں کے لحاظ سے مساوات کو تبدیل کرنے کے لئے ہمیں 'لا' ما کی بجائے
 نئے محوروں کے خطی تعامل مندرجہ کرنے چاہئیں اس لئے نئی مساوات اس
 شکل کی ہوگی

$$1 = \frac{(ل + لا + م + ن)}{پ} + \frac{(ل + لا + م + ن)}{ع} \\
 \text{درجہ دوم کی رقیں} \quad \frac{(ل + لا + م + ن)}{پ} + \frac{(ل + لا + م + ن)}{ع}$$

ہیں یعنی دو مربعوں کا مجموعہ پس جملہ ۱ا - ۲ھ لا + ما + جب ما کے
 اجزائے ضربی خیالی ہیں اور اس لئے اب < ھ
 ان دو مساواتوں کا مقابلہ کرنے سے ۱ا - ۲ھ اب کی قیمتیں فی الحقیقت
 معلوم ہوں ہم ان کے لئے اس کی تصدیق کر سکتے ہیں کہ اس < ھ

$$1 = \frac{ل}{ع} + \frac{ل}{پ} \quad ب = \frac{م}{ع} + \frac{م}{پ} \quad ھ = \frac{ل}{ع} + \frac{ل}{پ}$$

$$\text{اس لئے اب - ھ} = \left(\frac{ل}{ع} + \frac{ل}{پ} \right) - \left(\frac{م}{ع} + \frac{م}{پ} \right) = \left(\frac{ل - م}{ع} + \frac{ل - م}{پ} \right)$$

$$= \frac{(ل - م - ل - م)}{پ} \quad \text{جو مربع کامل ہونگی وہ سے سرکجا مثبت ہے۔}$$

۱۔ اگر محور قائم ہوں تو اوپر کے نتیجہ کو ہم اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں

فرض کرو کہ (لا، ما) مانسکہ ہے اور لاجم ع + ما جب ع - ع = ۰
 متناظر مرتب ہے۔ اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو

$$(لا - لا) + (ما - ما) = ز (لاجم ع + ما جب ع - ع)$$

یا مربع لینے سے

$$(لا - لا) + (ما - ما) = ز (لاجم ع + ما جب ع - ع)$$

درجہ دوم کی رقیں ہیں

لا (۱- زجم ع) - ۲ لا ما زجب ع جم ع + ما (۱- زجب ع)
اسٹے حسب معمول طریق کتابت کے موافق
۱ = ۱- زجم ع جب = ۱- زجب ع ع = - زجب ع جم ع
میں سے ۱ جب = ع = ۱- ز

جو ضروریاً مثبت ہے کیونکہ ز ایک سے کم ہے۔

اسکے بعد (باب ششم میں) ہم دیکھیں گے کہ اگر ۱ جب < ع
تو مساوات ۱ لا + ۲ ع لا + ما + جب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
ہمیشہ ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے اس جگہ ہم نے اس مسئلہ کا صریح ثابت کیا ہے۔
مشق ۳۵- منی $\frac{لا}{۱} + ما = ا کو لو$ (محور قائم فرض کئے گئے ہیں) اس کی
مساوات معلوم کرو جب مبدأ کو نقطہ ۱ پر منتقل کیا جائے۔ پھر دیکھو کہ جب
اس کے محوروں کو ۹۰ میں سے گھمایا جائے تو اس کی مساوات کیا ہو جاتی ہے۔
اس طرح بتاؤ کہ تینوں صورتوں میں ۱ جب < ع اور اس سے دفعہ ۶۹ کی تصدیق

باب چہارم پر مشرق مشقیں

۳۶۔ ایک ناقص کا ماسکہ میں اور متناظر رأس دونوں معلوم ہیں ثابت
کرو کہ محور اصغر کے سروں کا طریق ایک مکانی ہے جس کا ماسکہ میں پر ہے۔

[استعمال کرو ربط میں ص = ع ج ا]

۳۷۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم ل لا + م ما = ا ناقص کو مس کرتا ہے
بشرطیکہ لا + ج ا م = ۱

۳۸۔ خط مستقیم لا + ما = ۲ سے قطع ناقص کا جو حصہ کٹا ہے اس کے
نقطہ تنصیف کے محدد معلوم کرو۔

۳۹۔ اگر ل لا + م ما = ا قطع ناقص کو حقیقی نقاط پر قطع کرے تو ثابت
کرو کہ مقطوعہ کے نقطہ تنصیف کے محدد ہیں

$$\frac{لا + ج ا م}{ج ا م} = \frac{لا + ج ا م}{لا + ج ا م}$$

۴۰۔ دو دائرے ہیں جن میں سے ایک دوسرے کے بالکل اندر واقع ہے اگر ایک اور دائرہ اندرونی دائرہ کو خارجاً اور بیرونی دائرہ کو داخلً مس کرے تو ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق ایک قطع ناقص ہے جس کے ماسکے دو مفروضہ دائروں کے مرکروں پر واقع ہیں۔ [دیکھو کہ فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہے]

۴۱۔ ناقص ۴ (لا-۱) $+ ۳$ ما $= ۴$ کا خروج المکرر اسکے وتر خاص کا طول اور اسکے ماسکوں کے مجد معلوم کرو اور ایک شکل میں منحنی کو کھینچو۔

۴۲۔ ان خطوط کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ کو خط مستقیم لا جم عہ + ما جب ع۔ ع = ۰ اور ناقص ۴ $+ \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ کے نقاط تقاطع سے ملائیں اور اس سے دکھاؤ کہ اگر اس وتر کے منقطعہ کے سامنے مرکز پر زاویہ قائمہ بنے تو وتر ایک ایسے دائرہ کو مس کریگا جو ناقص کے ساتھ ہم مرکز ہوگا اور جس کا نصف قطر $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$ ہوگا۔

۴۳۔ خطوط ۳ لا $+ ۴$ ما $+ ۵ = ۰$ اور ۸ لا $+ ۹$ ما $- ۱۲ = ۰$ میں سے کونسا خط مبدأ کے زیادہ قریب ہے کیا ان میں سے کوئی خط منحنی ۲ لا $+ ۴$ ما $= ۳$ سے ملتا ہے؟

۴۴۔ ایک رسی کا حلقہ اسطوانہ کی شکل کے دو کیلوں اور ایک نیل کے گرد ہو کر گزرتا ہے اسطوانوں کے ابعا کو طحوظ رکھ کر اور یہ فرض کر کے کہ ان کے نصف قطر مساوی ہیں ثابت کرو کہ اگر رسی کو تانے رکھا جائے اور نیل کو حرکت دی جائے تو اس کا سرا ایک ناقص کو مترسم کریگا بشرطیکہ عین نیل کے مرکز پر ہو۔

۴۵۔ ناقص کے ایک وتر ن کا نقطہ تنصیف ص ہے ص ک مرتب پر عمود ہے اور اس متناظر ماسکے ہے ثابت کرو کہ

$$ص ن + ص ن = ۲ ن ر \times ص ک$$

اس سے حاصل کرو کہ ایک ایسے وتر کے نقطہ تنصیف کا طریق جس کے سروں کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو ایک ایسا خط ہے جو محور اصغر کے متوازی ہے۔

۴۶۔ اگر ص ص ناقص کے ماسکے ہوں اور ن کوئی نقطہ منحنی پر ہو تو ثابت کرو کہ $ص ن + ص ن = ۲ ن ر \times ص ک$

برعکس اسکے اگر ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدہ پر کے نیم زاویوں کے ماسوں کا حاصل ضرب، دونوں معلوم ہوں تو ثابت کرو کہ اس کا راس ایک ایسے ناقص پر واقع ہوتا ہے جس کے ماسکے قاعدہ کے سرے ہیں۔

$$\left[\text{ربط مس} = \frac{1}{2} \right] \quad \text{(ن-ب) (ن-ج) استعمال کرو}$$

۴۷۔ ذیل کے ناقصوں کے خروج المرکز ماسکے اور مرتب معلوم کرو

$$(۱) \quad \text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۶ \quad \text{لا} \quad (۲) \quad \text{ما}^2 + \text{لا}^2 = ۵ \quad \text{لا}$$

۴۸۔ اگر مستقل طول کی ایک سلاخ اس طرح حرکت کرے کہ اس کے سرے ہمیشہ دو ثابت علی القوائم خطوط مستقیم پر رہیں تو اس پر کا کوئی نقطہ ایک ناقص ترسیم کریگا۔

۴۹۔ مخروطی تراش لا + ما = ن (لا جم ع + ما جب ع - ع) کے ماسوں کے محدد اور اس کے مرتبوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۵۰۔ قائم محوروں کے لحاظ سے ایک ایسے ناقص کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ میں سے گزرے جس کا خروج المرکز $\frac{1}{2}$ ہو اور جس کا ماسکے لا + ما = لا = ۵۔

پر کے کسی نقطہ پر جو جہاں متناظر مرتب کی مساوات لا + ما = لا = ۵ ہے

۵۱۔ ناقص $\frac{لا^2}{۲} + \frac{ما^2}{۲} = ۱$ کی مساوات معلوم کرو جبکہ نقطہ (-۱، ۰) کو مبدأ قرار دیا جائے اور محوروں کی سمتیں نہ بدلیں۔

اس سے حاصل کرو کہ مساوات ما = ۲ فن لا + ق لا ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے اگر ق منفی ہو نیز ثابت کرو کہ وتر خاص کا طول ۲ فن ہے اور

خروج المرکز ۱۱ - ق ہے اگر ق = ۰ تو مساوات کیا تعبیر کرتی ہے۔

۵۲۔ اگر ناقص $\frac{لا^2}{۲} + \frac{ما^2}{۲} = ۱$ پر کے دو نقاط ن اور ق کے

فصلے لا، لا ہوں اور محور اعظم پر دو نقطے ن، ق ایسے لے جائیں کہ

ان کے فصلے ن لا، ن لا ہوں تو ثابت کرو کہ ن ق = ن ق



باب پنجم

قطع زائد

۱۔ قطع زائد۔ تعریفات۔ قطع زائد ایک ایسے متحرک نقطہ کا طریق ہے جس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے ہمیشہ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے (جو ایک سے بڑی ہوتی ہے) اس عمودی فاصلہ کے ساتھ جو نقطہ مذکورہ اور ایک ثابت نقطہ مستقیم کے درمیان ہے۔

ثابت نقطہ کو ماسکہ کہتے ہیں اور ثابت خط مستقیم کو مرتبہ اور مستقل نسبت خروج المرکز کہلاتی ہے، قطع زائد کی صورت میں یہ مستقل نسبت یعنی خروج المرکز ایک سے بڑی ہوتی ہے۔

۲۔ قطع زائد کی مساوات

[طریقہ بالکل وہی ہے جو ناقص کی صورت میں استعمال ہوا]

فرض کرو کہ میں ماسکہ ہے اور

لاک مناظر مرتبہ ہے، میں سے

میں لا مرتبہ پر عمود نکالو۔

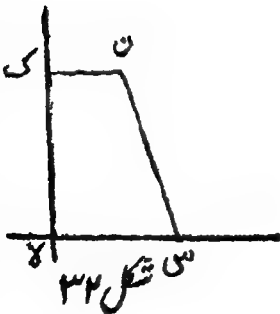
لا کو مبدأ مانو اور فرض کرو کہ میں کچے

محدود (۵۰) ہیں، کتب جیسا قطع ناقص

کی صورت (صفحہ ۵۴) میں عمل ہوا۔

$$\text{میں } ن = ز \times ن \text{ ک}$$

$$\text{ن میں } ن' = ز' \times ن' \text{ ک}$$



$$\therefore (لا - د) + ما' = ز' لا'$$

$$\text{یا } لا' (۱ - ز') + ما' - د' لا = ۰$$

فرق صرف یہ ہے کہ اس جگہ $ز < ۱$!

$$۳۔ \text{قطع زائد کی مساوات کی تحول شکل } \frac{لا'}{۱} - \frac{ما'}{ب} = ا \text{ میں}$$

[طرز عمل وہی ہے جو ناقص کے لئے]

جو مساوات دفعہ ۲ میں معلوم ہوئی اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$(۱ - ز') (لا' - د' لا) \times \frac{۲}{۱ - ز'} + ما' + د' = ۰$$

یا بمحاذ لا کے مربع کامل بنانے سے

$$(۱ - ز') (لا' - د' لا) \times \frac{۲}{۱ - ز'} + ما' + د' = \frac{د'}{۱ - ز'}$$

لیکن چونکہ $ز < ۱$ اس لئے ہم اسے اس طرح لکھتے ہیں

$$(ز' - ۱) (لا' + د' لا) \times \frac{۲}{ز' - ۱} - ما' - د' = \frac{د'}{ز' - ۱}$$

اگر نقطہ $(- \frac{۲}{ز' - ۱}, ۰)$ کو نیا سبداً قرار دیا جائے تو

$$(ز' - ۱) (لا' - د' لا) = د' + \frac{د'}{ز' - ۱} \quad [\text{حصہ اول دفعہ ۳}]$$

$$\text{یا } لا' - د' لا = \frac{د'}{ز' - ۱} \times \frac{د'}{۲(۱ - ز')}$$

$$\text{اب رکھو } \frac{د'}{۲(۱ - ز')} = ز'$$

طرفین مساوات کو $ز'$ پر تقسیم کرنے سے

اور $\frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2})$ کو $\frac{1}{2}$ کے مساوی رکھنے سے

$$(1) \dots\dots\dots 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

نتیجہ صریح - $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

مثال - اس قطع زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا مرتب 2 لا + 1 ما = 1 ہو،
ماسکہ $(1, 2)$ اور خروج المرکز $\frac{1}{2}$
اگر نقطہ n (لا، ما) منحنی پر واقع ہو تو

$$n = (1 - لا) + (2 - ما)$$

نک = اس عمود کا طول جو (لا، ما) سے خط 2 لا + 1 ما = 1 پر کھینچا جائے

$$= \frac{2 لا + 1 ما - 1}{2}$$

اس مساوات مطلوبہ ہے $(لا - 1) + (2 - ما) = 0$ چونکہ $2 = 3$
یا تحویل کے بعد $2 لا + 1 ما - 1 = 0$ یا $2 لا + 1 ما = 1$

مشقیں

۱۔ اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(0, 2)$ ہو، مرتب لا + 1 ما = 1
اور خروج المرکز $\frac{1}{2}$ ۔

۲۔ اگر زائد کا ماسکہ $(1, 2)$ ہو، مرتب لا = $\frac{1}{2}$

اور خروج المرکز $\frac{1}{2}$ تو ثابت کرو کہ

اس کی مساوات $\frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{لا^۲}{ب^۲} = ۱$ ہے۔

۳۔ اگر ایک زائد کا ماسکہ مبدأ پر ہو، مرتب $لا + ۲ = ۰$ اور خروج المرکز ہو تو اس کی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ ذیل کی ہر ایک مساوات قطع زائد کو تعبیر کرتی ہے ان کے نصف محوروں کے طول معلوم کرو۔
 $لا^۲ - \frac{لا^۲}{۲} = \frac{ب^۲}{۲}$ $لا^۲ - \frac{لا^۲}{۳} = \frac{ب^۲}{۳}$

۳ $لا^۲ - ۴ = ۴$ ، ۱ $لا^۲ - ب^۲ = ۴$ ج (جہاں $ب$ ، $ج$ مثبت ہیں)
 [ہر مساوات کو شکل $\frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{لا^۲}{ب^۲} = ۱$ میں تحویل کرنا چاہئے۔ یعنی

اگر ۲ $لا^۲ - ۴ = ۴$ تو $\frac{لا^۲}{۲} - \frac{لا^۲}{۲} = \frac{ب^۲}{۲}$ یا $\frac{لا^۲}{۲} - \frac{لا^۲}{۲} = ۱$ یہ مساوات
 ایک زائد کو تعبیر کرتی ہے جس کے نصف محور $\frac{۲}{۲}$ اور $\frac{۲}{۲}$ ہیں]
 ۵۔ مشق ۴ میں جو زائد دئے گئے ہیں ان کے خروج المرکز معلوم کرو

[استعمال کرو $۱ + \frac{ب^۲}{لا^۲}$]

۴۔ منحنی کی شکل۔ جیسا دفعہ ۵۶ قطع ناقص کی صورت میں ہم نے

دیکھا مساوات $\frac{لا^۲}{ب^۲} - \frac{لا^۲}{ب^۲} = ۱$ سے ہمیں منحنی کی شکل کا اچھا اندازہ ہو سکتا ہے۔

مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ب^۲ = لا^۲ \left(۱ - \frac{لا^۲}{ب^۲} \right)$$

چونکہ $لا$ لازماً مثبت ہے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{لا^۲}{ب^۲}$ ایک سے کم نہیں

ہو سکتا یعنی لا تعداد λ سے کم نہیں ہو سکتا۔

$$\text{نیز } \lambda = 1 \left(1 + \frac{\lambda^2}{b^2} \right)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ λ کی قیمت پر کوئی قید نہیں، فی الحقیقت λ کی قیمت کچھ بھی ہو سکتی ہے، نیز مساواتوں

$$\frac{b^2}{\lambda^2} = \lambda^2 \text{ اور } \lambda^2 = \pm \frac{1}{b^2} \text{ یا } \lambda^2 = b^2$$

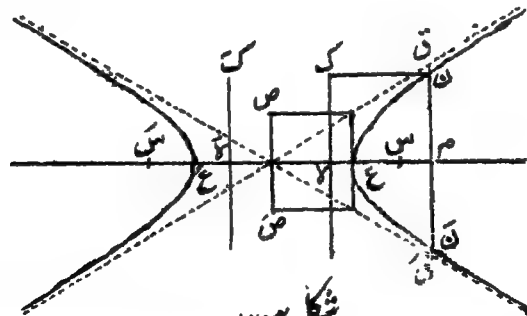
سے ہم یہ نتائج اخذ کرتے ہیں۔

(۱) لا تعداد λ سے کم نہیں ہو سکتا

(۲) $\lambda = 0$ سے حاصل ہوتا ہے $\lambda = 0$ ۔

(۳) λ کی کسی ایسی قیمت کے جواب میں جو λ سے بڑی ہو λ کی دو مساوی اور مختلف علامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۴) λ کی کسی قیمت کے جواب میں λ کی دو مساوی اور مختلف علامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔



شکل ۳۳

اس لئے منحنی بلحاظ دونوں محوروں کے متشاکل ہے اور خطوط $\lambda = 1$ اور $\lambda = -1$ کے باقیام باہر واقع ہے۔

ہر ایک ایسے وتر کی تنصیف جو ایک محور کے متوازی ہو دوسرے محور پر ہوتی ہے۔

اگر نقاط $ع$ اور $ص$ محور کا پر ایسے لئے جائیں کہ

$$ج ع = ج ص = ز$$

اور $ص$ ، $ص$ محور سے پر ایسے لئے جائیں کہ

$$ج ص = ج ص = ب$$

تو $ع$ اور $ص$ $ص$ کو ٹانہ کہتے ہیں۔ بعض اوقات انہیں بالترتیب محور اعظم اور محور اصغر کہتے ہیں جیسا ناقص کی صورت میں، لیکن یہ ضروری فرق ملحوظ رکھنا چاہئے کہ ناقص میں $ص$ اور $ص$ منحنی پر واقع ہوتے ہیں لیکن زائد کی صورت میں یہ منحنی پر واقع نہیں ہوتے۔ اس لئے $ع ع$ کو عام طور پر متقاطع محور کہتے ہیں اور $ص ص$ کو مزدوج محور۔

$$\text{علاوہ اس کے چونکہ } ب^2 = ز(ز - ا)$$

اس لئے جب $ز$ کے برابر $ا$ ہو تو $ب$ کے برابر اس لحاظ سے محور

$ص ص$ کے لئے محور اصغر کا نام موزوں نہیں۔

$ج$ کو حسب سابق مرکز کہتے ہیں۔

زائد کی شکل ٹھیک طور پر معلوم کرنے کے لئے ہمیں اس کی قطبی مساوات استعمال کرنی چاہئے، اگلی دفعہ میں ہم یہ مساوات معلوم کریں گے۔

۵۔۔۔ زائد کی قطبی مساوات جبکہ مرکز قطب ہو۔

$$\text{اگر مساوات } \frac{لا^2}{ر^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ا \text{ میں } لا = ر \text{ حجم طہ اور}$$

$ما = ر$ جب طہ لکھا جائے تو حاصل ہوگا

$$\frac{1}{ر^2} = \frac{ج ب^2 طہ}{ب^2} - \frac{ج ب^2 طہ}{ر^2} \dots\dots\dots (۲)$$

$$= \frac{1}{ر^2} - ج ب^2 طہ \left(\frac{1}{ر^2} + \frac{1}{ب^2} \right)$$

اور یہ مطلوبہ قطبی مساوات کی دو مختلف شکلیں ہیں۔

۶۔۔۔ منحنی کی شکل کا اس کی قطبی مساوات سے حاصل کرنا۔

اگر زاویہ طہ = \angle تو \angle = \angle ، جیسے طہ بڑھتا ہے $\frac{1}{r}$ تعداد کم ہوتا ہے یعنی منحنی مرکز ج سے لگاتار دور ہوتا جاتا ہے، ر غیر متناہی ہوتا ہے جب $\frac{1}{r} = 0$ یعنی جب $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ جب طہ یا مس طہ = $\frac{1}{r}$ پس وہ سمتی نیم قطر جو محور کے ساتھ زاویہ مس $\frac{1}{r}$ بناتا ہے وہ منحنی سے لا انتہا فاصلے پر ملتا ہے۔

اس لئے منحنی کے اس حصہ کی شکل جو مثبت ربع میں واقع ہے ایسی ہے جیسی شکل میں دکھائی گئی ہے۔ سمتی نیم قطر طول میں بڑھتا ہے جیسے اسکی سمت خط طہ = مس $\frac{1}{r}$ کے قریب پہنچتی جاتی ہے، نیز چونکہ منحنی باقی ربعات میں بھی متشاکل ہے اس لئے اسے ہم مکمل طور پر پھینچ سکتے ہیں۔ یہ غور سے دیکھا جائے کہ $\frac{1}{r}$ زاویہ طہ کی ان قیمتوں کے لئے منحنی ہے جن کے لئے مس طہ تعداد $\frac{1}{r}$ سے بڑا ہے یعنی $\frac{1}{r}$ طہ کی ان قیمتوں کے لئے منحنی ہے جو مس $\frac{1}{r}$ اور اس کے مکمل کے درمیان واقع ہوتی ہیں پس طہ کی ان قیمتوں کے جواب میں جو دو خط حاصل ہوتے ہیں ان کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ واقع نہیں ہوتا کیونکہ ان حدود کے اندر کی قیمتیں خیالی ہیں [ملاحظہ ہو شکل ۳۳] طہ کی وہ قیمتیں جن میں سے ہر ایک کے لئے $\frac{1}{r}$ کی قیمت غیر متناہی ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہیں

$$\text{مس طہ} = \pm \frac{1}{r}$$

مرکز میں سے گزرنے والے ان خطوط کو جو منحنی سے غیر متناہی فاصلہ پر ملتے ہیں متقارب کہتے ہیں، یاد رہے کہ یہ متقارب کی باقاعدہ تعریف نہیں ہے، ہم اسے آگے چالکر بیان کرینگے۔
۷ کے ناقص اور زائد کی خاصیتوں کا مقابلہ۔

اگرچہ زائد اور ناقص کی خاصیتوں میں خاص مشابہت پائی جاتی ہے

تاہم طالب علم کو چاہئے کہ ان کے امتیازی فرق کو بھی پیش نظر رکھے۔
(۱) ناقص بند منحنی ہے اور زائد دونوں طرف (انتہا فاصلہ تک پھیلتا ہے۔

(۲) ناقص بند دو محاورے حقیقی نقاط پر ملتا ہے لیکن زائد صرف ایک محور سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے۔

(۳) ناقص کی صورت میں مرکز اور ماسک متناظر مرتب کے ایک ہی جانب واقع ہوتے ہیں لیکن زائد میں متقابل جانبوں میں واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک قطع زائد کے قاطع اور مزدوج محور بالترتیب ۳ اور ۲ ہیں، ان سمتی قطروں کے طول معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ زاوے ۳۰° اور ۶۰° بناتے ہیں۔

قطبی مساوات ہے $\frac{1}{r} = \frac{\cos \theta}{a} - \frac{\cos \theta}{b}$ جب زاویہ طہ = ۳۰° تو

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos 30^\circ}{9} - \frac{\cos 30^\circ}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48} \quad \text{یا } r = 48$$

جب زاویہ طہ = ۶۰° تو $\frac{1}{r} = \frac{\cos 60^\circ}{9} - \frac{\cos 60^\circ}{12} = \frac{1}{18} - \frac{1}{24} = \frac{1}{72}$ یا $r = 72$

موخر الذکر صورت میں خیالی ہے اور یہ ہونا بھی چاہئے کیونکہ متقارب محور اعظم کے ساتھ زاویہ سن ۱۲۰° بناتا ہے اور یہ ۶۰° سے کم ہے اسلئے دوسرا خط منحنی سے حقیقی نقاط پر نہیں ملتا۔

مثال ۲۔ قطع زائد میں اگر کوئی دو سمتی نیم قطر علی القوائم لئے جائیں تو انکے ٹکائیوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے۔

یہاں بھی جیسے ناقص کی صورت میں ہم نے دیکھا اگر نیم قطروں کے سرے (ر، طہ)

اور (ر، طہ) ہوں تو

$$\frac{1}{r} = \frac{\text{جم}^{\circ} \text{طہ}}{r^2} - \frac{\text{جب}^{\circ} \text{طہ}}{b^2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\text{جم}^{\circ} (\text{طہ} + \frac{\pi}{2})}{r^2} - \frac{\text{جب}^{\circ} (\text{طہ} + \frac{\pi}{2})}{b^2} = \frac{\text{جم}^{\circ} \text{طہ}}{r^2} - \frac{\text{جب}^{\circ} \text{طہ}}{b^2}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2}$$

لیکن یاد رہے کہ r اور r میں سے کوئی ایک یا دونوں خیالی ہو سکتے ہیں۔

مشقیں

۶۔ ایک ہی شکل میں ذیل کے منحنیات کو کھینچو (۱) $\frac{1}{q} - \frac{1}{a} = 1$

(۲) $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 1$ (۳) $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 1$

۷۔ شق ۶ کے منحنیات میں سے ہر ایک کے ان سمتی نیم قطروں کے طول معلوم کرو جو قاطع محور کے ساتھ زاویے 30° اور 45° بنائیں۔

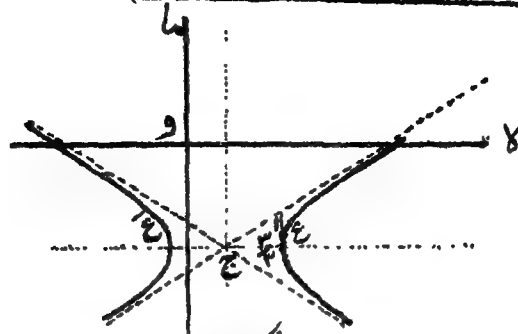
۸۔ ایک ہی شکل میں $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 1$ ، $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 1$ کو مرسم کرو، انکا مشترک سمتی نیم قطر محور LA سے جو زاویہ بناتا ہے اس کا محاس اور نیز اس مشترک وتر کا طول معلوم کرو۔

۸۔ زائد کی مساوات بلحاظ ان محوروں کے جو اصلی محوروں کے متوازی ہوں۔

اب ہم زائدوں کے کھینچنے کی چند توضیحی مثالیں حل کریں گے جبکہ حوالہ کے محور منحنی کے محوروں کے متوازی ہوں لیکن ان پر منطبق نہ ہوں (مقابلہ کرو دفعہ ۵۷)

مثال ۱۔ زائد $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 1$ ، $\frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 1$ کو مرسم کرو۔
یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے

$$1 = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} = \frac{1 - \frac{1}{a}}{1}$$



شکل ۳۴

مبدأ کو نقطہ (۱-۳) پر منتقل کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$1 = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$$

اور یہ قطع زائد کی مساوات ہے جس کے نیم محوروں کے طول $\frac{3}{2}$ اور ۱ ہیں منحنی کو شکل ۳۴ میں مرتب کیا گیا ہے۔

منحنی ابتدائی محور کا سے ملتا ہے جہاں $ما = ۰$ اور $۲(۱-لا) = ۹ + ۱ + ۱۸ = ۲۰$ تقریباً

منحنی ابتدائی محور سے ملتا ہے جہاں $لا = ۰$ اور $۹(۳+ما) = ۲ = ۹ - ۵ = ۰$ (خیالی تقاطع پر)

طالب علم کو چاہئے کہ لایا ما کو اور قیمتیں دینے سے منحنی پر اور نقاط معلوم

کرے جیسے دفعہ ۳۴ میں۔

مثال ۲۔ منحنی ۹ $لا = ۲$ $ما = ۱۸ - لا = ۱۶$ $۲۵ = ۱۶ + ۹$ کو مرتب کرو۔

(دفعہ ۵ مثال ۲ کی مانند) رقبوں کو اس طرح اکٹھا کرنے سے کہ لا اور لا

والی رقبیں ایک مربع کامل بنائیں اور ما اور ما والی رقبیں ایک الگ مربع

کامل بنائیں یہیں حاصل ہوگا

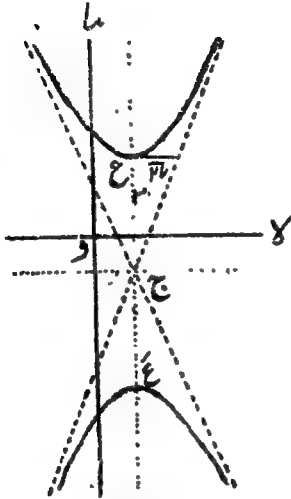
$$۹(لا - ۱) - ۲(۱ + ما + ۱۸) = ۰$$

$$یا ۹(لا - ۱) - ۲(۱ + ما) = ۱۸$$

$$یا ۱ = \frac{۲(۱ + ما)}{۹} - \frac{۲(لا - ۱)}{۲}$$

مبدأ کو نقطہ (۱، ۱) پر منتقل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$1 = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{9}$$



شکل ۳۵

اس لئے منحنی قطع زائد ہے جس کا قاطع محور نئے محور سا پر منطبق ہوتا ہے اور جس کے نیم محوروں کے طول ۳، ۲ ہیں۔

ابتدائی محوروں پر نقطہ کے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

$$9 - 18 = 25 + 4 = 29$$

اول الذکر خیالی ہیں اور موخر الذکر ± 1 یا ± 2

یا ± 1 یا ± 3 ہیں تقریباً

مشقیں

منحیات ذیل کو رسم کرو

$$1 = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{9}$$

$$10 = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{9}$$

$$11 = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{9}$$

$$12 = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{9}$$

۱۳- ۱۶ مشق ۹ تا ۱۲ میں جتنے منحنی دئے گئے ہیں ان کے خروج المکز معلوم کرو نیز ابتدائی محوروں کے لحاظ سے قاطع محوروں کے سروں کے

مرد معلوم کرو۔

۹۔ قطع زائد ایک دوسرا ماسکہ اور دوسرا مرتب رکھتا ہے۔

چونکہ منحنی بلحاظ محوروں کے متشاکل ہے اس لئے اگر ہم قطع کریں
 ج س = ج س (شکل ۳۶) اور ج لا = ج لا اور لا ک کو ع ج ع پر
 عمود وار چھینیں تو جیسا ہم نے ناقص کی صورت میں دیکھا س زائد کا
 دوسرا ماسکہ ہے اور لا ک متناظر مرتب۔ خروج المرکز دونوں ماسکوں
 کے لئے ایک ہی ہے۔

انتباہ۔ یہ غور سے دیکھا جائے کہ زائد کی دو مختلف شاخیں دو مختلف منحنی
 نہیں ہیں، بلکہ دونوں شاخیں ایک اور صرف ایک ہی منحنی بناتی ہیں، کسی ماسکہ
 اور اس کے متناظر مرتب کی مدد سے ہم صرف وہی شاخ نہیں حاصل کر سکتے
 جو اس ماسکہ کے گرد واقع ہے بلکہ ان کی مدد سے ہم دونوں شاخیں
 حاصل کر سکتے ہیں۔

$$۸۰۔ ثابت کرو کہ ج س = ز لا، ج لا = ز$$

چونکہ ع اور ع منحنی پر واقع ہیں اس لئے

$$س ع = ز ع لا، س ع = ز ع لا$$

$$ج ع کرنے سے س ع + س ع = ز (ع لا + ع لا) یا س ع + س ع = ز (ع لا + ع لا)$$

$$س س = ز ع ع$$

$$اب چونکہ س س = ۲ ج س اور ع ع = ۲ ج ع$$

$$اس لئے ج س = ز ع ج ع \dots \dots \dots (۴)$$

$$\text{س ع لا} \quad \text{ج} \quad \text{لا ع س}$$

شکل ۳۶

نیز تفریق کرنے سے

$$س ع - س ع = ز (ع لا - ع لا) = ز (ع لا - ع لا) یا ع ع = ز ع لا$$

$$\text{یعنی ج ع = ز ع ج لا} \dots \dots \dots (۵)$$

نتیجہ صریح۔ ج س \times ج $\lambda = ۱$ (۶)
 ۸۱۔ وتر خاص۔ تعریف وترخ س \times جواسکے میں سے محور پر عمود وار
 کھینچا جائے وتر خاص کہلاتا ہے۔

$$\text{نیم وتر خاص} = \frac{\text{ب}^۲}{۲} \dots\dots\dots (۷)$$

ثبوت بالکل ویسا ہے جو ناقص کی صورت میں دیا گیا (دفعہ ۶۲)
 مثال۔ ایک زائد کا ماسکہ (۱، ۱) ہے، مرتب ۳ لا + ۴ ما - ۳۲ = ۰ اور
 خروج المرکز ۳، اس کی مساوات معلوم کرو، نیز قاطع محور کے سروں کے
 محدد، مرکز اور دوسرے ماسکہ کے محدد معلوم کرو، نیم محوروں کے طول بھی
 معلوم کرو۔

مربع لینے سے مساوات باسانی شکل ذیل میں آجاتی ہے

$$۲۵ \{ (۱-۱) + (۱-۱) \} = ۹ (۳ لا + ۴ ما - ۳۲)$$

تحويل کے بعد ۵۶ لا + ۲۱۶ ما + ۱۱۹ - ۱۶۷ لا - ۲۲۵ ما - ۹۱۶۶ = ۰
 جیسا ہم نے مثال دفعہ ۶۲ میں دیکھا اس لا کی مساوات ہے (معیاری صورت میں)
 ۴ لا - ۳ ما - ۱ = ۰

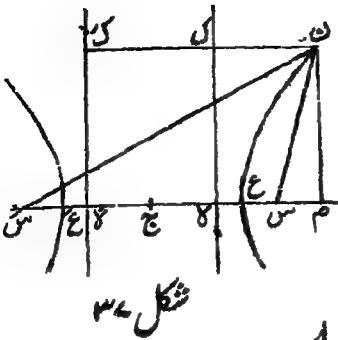
اور اس لئے نقطہ لا ہے (۵، ۴) ما اب ع اور ع خط س لا کو داخل
 اور خارجاً نسبت ۳:۱ سے تقسیم کرتے ہیں اس لئے ضابطہ کی مدد سے

$$\text{ع ہے } (۴، \frac{۱۳}{۴}) \text{ اور ع ہے } (\frac{۱۱}{۴}، ۷)$$

مرکز ع ع کا نقطہ تنصیف ہے اس لئے اس کے محدد ہیں $(\frac{۳۵}{۸}، \frac{۱۱}{۴})$

نیز چونکہ مرکز س س کا نقطہ تنصیف ہے اس لئے ہم باسانی س کے

محدد $(۱۰، \frac{۳۱}{۴})$ حاصل کر سکتے ہیں۔



$$= (9 - \frac{1}{2}) \text{ ز} = 9 - 1$$

اسی طرح سن = ز (9 + \frac{1}{2}) = 9 + 1

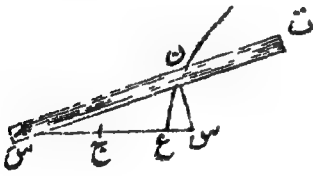
سن - سن = سن = ۱۲ - ۸
اس لئے دائیں طرف کی شاخ کیلئے

سن - سن = سن = ۱۲
اور بائیں طرف کی شاخ کے لئے

سن - سن = سن = ۱۲

۸۳ = زائد کی آلی ترسیم - دفعہ ۸۲ سے ہمیں زائد مرتسم کرنے کی ایک آلی ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

چھٹی پٹری کے ایک سرے کو نقطہ سن پر اس طرح نصب کرو کہ یہ سن کے گرد کاغذ کی سطح میں پھر سکے۔ ایک تانکا لوجس کا طول پٹری کے طول سے کم ہو اور اس کے ایک سرے کو سن پر اور اس کے دوسرے سرے کو پٹری کے آئہ ادرے



شکل ۳۸

ت پر باندھو۔ اب اگر ایک پٹری کے ساتھ ساتھ اس طرح تانے رکھے جیسا کہ

شکل ۳۸ میں دکھایا گیا ہے تو یہ زائد کی دائیں شاخ کے اوپر کے کچھ حصہ کو مرتسم کرے گی یعنی یہ منحنی کے اُس حصہ کو مرتسم کرے گی جو ع اور ن کے درمیان ہے جہاں سن ن رسی کا طول ہے۔

کیونکہ سن - سن = (سن + ن) - (سن + ن)

= سن - (سن + ن)

= پٹری کا طول - رسی کا طول

= مستقل مقدار

نیز اس شاخ کے نیچے مناظر حصہ کو مرسم کرنے کے لئے پٹری کو سس سے نیچے رکھنا پڑیگا۔ بائیں طرف کے مناظر حصوں کو مرسم کرنے کے لئے پٹری کے ایک سرے کو سس کی بجائے سس پر ثابت کرو اور تاکئے کے ایک سرے کو سس پر باندھنے کی بجائے سس پر باندھو۔

نقشہ نمبر ۱۱

۲۴۔ وقت ۲۴ کی طرح ثابت نہ کر دے۔ سس ان سس ن مستقل ہو جہاں سس سس ثابت نقطے میں تو ن کا طریق ایک قطع زائد ہے۔

۲۵۔ اس نقطہ کے طریق کی سادہ سے سادہ مساوات معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرے کہ دو ثابت نقاط میں اور سس سے اس کے فاصلوں کا

فرق ۳ ہو جہاں سس سس = ۸
۲۶۔ مشق ۲۵ کے معنی کا خروج مرکز اور اس کے نیم وتر خاص کا طول معلوم کرو۔
۲۷۔ ثابت کرو کہ خط استقیم ما = م لا + ج زائد

$$\frac{لا}{را} - \frac{ما}{با} = ۱ \text{ سے دو نقاط حقیقی یا خیالی پر ملتا ہے، اگر}$$

خط مذکور معنی کا ماس ہو تو اس کے لئے کیا شرط ضروری ہے۔
اسی طرح کے عمل سے جو اقصیٰ کی صورت میں کیا گیا تھا، ہمیں فصلوں کے لئے مساوات ذیل حاصل ہوگی

$$۱ = \frac{لا}{را} - \frac{(م لا + ج)²}{با²}$$

$$یا لا (\frac{۱}{را} - \frac{م²}{با²}) - \frac{ج²}{با²} = ۱$$

نیز چونکہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی ایک اور صرف ایک قیمت مساوات ما = م لا + ج سے حاصل ہوتی ہے اس لئے معلوم ہوا کہ

نقاط تقاطع دو ہیں۔
 لا کی قیمتیں حقیقی، ایک دوسرے پر منطبق یا خیالی ہونگی
 اگر بالترتیب $\frac{م}{ب} + \frac{ج}{ب} + \frac{لا}{ب} - \frac{م}{ب} = \frac{ج}{ب} + \frac{لا}{ب}$ (۱) کے
 یعنی اگر $\frac{ج}{ب} + \frac{لا}{ب} - \frac{م}{ب} \leq \frac{ج}{ب} + \frac{لا}{ب}$ یا اگر $\frac{ج}{ب} + \frac{لا}{ب} - \frac{م}{ب} \geq \frac{ج}{ب} + \frac{لا}{ب}$
 اگر $ج = \pm \frac{لا}{ب} - \frac{م}{ب}$

تو دونوں نقطے ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے، اس لئے خطوط

$$م = لا \pm \frac{ب}{ب} - \frac{م}{ب} \dots \dots \dots (۹)$$

م کی تمام قیمتوں کے لئے زائد کو سس کرتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر $\frac{ب}{ب} > \frac{ج}{ب}$ تو ج کی قیمت خیالی ہے یعنی
 زائد کا کوئی مماس محور کے ساتھ ایسا زاویہ نہیں بنا سکتا جو متقارب
 اور محور کے درمیانی زاویہ سے کم ہو

$$اگر م = \pm \frac{ب}{ب} - \frac{ج}{ب} = ۰ \text{ اور اس صورت میں مماس ہوں گے}$$

$$م = \pm \frac{ب}{ب} - \frac{لا}{ب}$$

اور یہ فی الحقیقت متقارب ہیں جو دفعہ ۷۶ میں معلوم کئے جا چکے ہیں۔
 چونکہ یہ خط منحنی سے صرف لا انتہا فاصلے پر ملتے ہیں اسلئے معلوم ہوا

مقارب کو ہم ایک ایسا مماس خیال کر سکتے ہیں جس کا نقطہ تماس
 لا تنہا ہی پر ہے۔

۸۵- مقارب - تعریف ایک ایسا خط مستقیم جو ایک منحنی سے لا انتہا فاصلے پر دو منطبق نقطوں پر ملے مقارب کہلاتا ہے۔ اس سے قبل ہم نے مقارب کی باضابطہ تعریف نہیں کی تاہم جو مقارب ہم نے اس سے پہلے معلوم کئے ہیں ان میں اوپر کی خاصیت ضرور پائی جاتی ہے۔

$$۸۶- \text{زائد} \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۳} = ۱ \text{ کے مقارب معلوم کرو۔}$$

اگر $۱ = م + ج$ مقارب ہو تو جس مساوات درجہ دوم سے نقاط تقاطع کے فاصلے معلوم ہوتے ہیں اس کی دونوں اصلیں لا انتہا ہی ہوتی چاہیں۔ مساوات مذکورہ ذیل کی مساوات درجہ دوم ہے

$$۱ - \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۳} \right) = ۲ - \frac{۲}{۳} - \frac{ج}{۲} - ۱ = ۰$$

اس کی دو اصلیں ہیں اور ان دونوں کے غیر متناہی ہونے کی شرائط ہیں دیوٹیویریئل الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۶۷

$$\frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۳} = ۰ \text{ اور } \frac{۲}{۳} - \frac{ج}{۲} = ۰$$

اس سے حاصل ہوتا ہے $م = \pm \frac{۱}{۲} - ج = ۰$

پس مطلوبہ مقارب صرف وہی دو مقارب ہیں جن کا پہلے بیان ہو رہی

$$۱ = م + \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۳} \text{ لا (۱۰)}$$

اور انکی مشترک مساوات ہے $\frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۳} = ۰$

۸۷- کوئی خط جو مقارب کے متوازی ہو وہ منحنی سے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جو غیر متناہی فاصلہ پر ہو۔

اوپر کی مساوات میں ۱ کی ایک قیمت لا انتہا ہی ہوگی اگر

$$0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

اور یہ صورت اس وقت پیدا ہوگی جبکہ خط ما = م لا + ج ایک
مقابلہ کے متوازی ہو۔

مثال - اگر مقابلوں کا درمیانی زاویہ ۲۰ عہ ہو تو ز = قط عہ

مس عہ = $\frac{1}{2}$ کیونکہ مقابلہ محوروں کے ساتھ
مساوی زاویے بناتے ہیں، اس لئے

$$\text{قط عہ} = \sqrt{1 + \text{مس عہ}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

یاد رہے کہ ۲۰ عہ مقابلوں کے درمیان وہ زاویہ ہے جس کے اندر
کل منحنی گھرا ہوا ہے، دوسرا زاویہ ان کے درمیان ۱۸۰ - ۲۰ عہ ہے۔
۸۸ - قائم زائد - ایسے زائد کو جس میں ۱ = ب قائم زائد کہتے
ہیں، اس کی مساوات لا - ما = لا ہوگی۔
اس نام کی وجہ تسمیہ یہ ہے کہ اس صورت میں مقابلہ علی القیام
ہوتے ہیں۔

$$\text{یعنی لا - ما = - یا لا - ما = - اور لا + ما = -}$$

نتیجہ صریح قائم زائد بلحاظ رشتہ کے زائد کے ساتھ اسی طرح منسوب
ہے جیسے دائرہ ناقص کے ساتھ کیونکہ یہ خاص صورتیں ناقص اور زائد
دونوں میں محاور کو ایک دوسرے کے مساوی بنانے سے حاصل ہوتی ہیں۔

مشقیں

۲۷ - ابتدائی اصولوں سے اس کی شرط معلوم کرو کہ ما = فن لا + ۳ زائد

لا۔ ۴ = ما^۲ = ۹ کو مس کرے، نیز نقطہ تماس کے محدود معلوم کرو۔
 ۲۸۔ لا۔ ۴ = ما^۲ = ۹ کے ان محاسبات کی مساواتیں معلوم کرو جو
 قاطع محور کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتے ہیں۔
 ۲۹۔ معلوم کرو کہ خط مستقیم لا + ما = ۲ زائد لا۔ ۱ = ۱ سے
 حقیقی نقاط پر ملتا ہے یا نہیں۔
 ۳۰۔ زائد ۲ لا۔ ۳ = ما^۲ = ۵ کے نصف محور معلوم کرو اور ثابت کرو کہ
 خط مستقیم ما = لا + $\left[\frac{5}{4} \right]$ زائد کو مس کرتا ہے۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ خط لا + ما = ۰ منحنی
 ۲ لا + ۳ لا + ما + ۳ لا + ۲ ما = ۰ سے لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ
 پر اور خطوط لا + ما + ۱ = ۰ اور ۲ لا + ما + ۱ = ۰ دونوں منحنی مذکور سے
 لاتنا ہی پر کے دو نقطوں پر ملتے ہیں۔
 ۳۲۔ جج کی ایسی قیمت معلوم کرو کہ خط ما = لا + جج اس زائد کو مس کرے جس کا
 ماسک (۶۲) ہو مرتب ۲ لا۔ ما + ۳ = ۰ اور خروج المرکز ۲۷۔
 ۳۳۔ ثابت کرو کہ خطوط لا + ۱ = ۰، ما + ۳ = ۰، منحنی لا + ما + ۳ لا + ما = ۰
 کے متقارب ہیں۔
 ۳۴۔ ایک زائد کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہے، اسکا خروج المرکز
 معلوم کرو۔

[استعمال کرو ز = قطع عمود]

۸۹۔ اگر منحنی کے کسی نقطہ سے متقاربوں پر عمود نکالے جائیں تو انکا
 حاصل ضرب مستقل ہوتا ہے۔

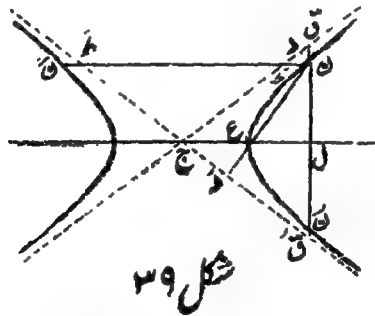
مقارب ہیں $\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۱} = ۰$ اور $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۱} = ۰$ [دفعہ ۸۶]
 نقطہ (لا، ما) سے ان پر جو عمود کھینچے جا سکتے ہیں ان کا حاصل
 ضرب

$$\frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}} =$$

کیونکہ لا، یا منحنی پر واقع ہے، پس عمودوں کا حاصل ضرب ہمیشہ $\frac{a^2}{b^2}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

مشقیں

۳۵۔ زائد کے نقطہ ن میں سے گزرنے والا معین متقاربوں سے ق اور ق پر اور زائد سے دوبارہ (ن) بر ملا ہے اثبات کرو کہ $ن ق \times ن ق = ب^2$



[اگر متقاربوں پر عمود ن د اور ن د کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ نسبتیں

$\frac{ن د}{ن ق}$ اور $\frac{ن د}{ن ق}$ مستقل ہیں، اس لئے چونکہ $ن د \times ن د$

مستقل ہیں اس لئے $ن ق \times ن ق$ بھی مستقل ہے، مستقل قیمت معلوم کرنے کے لئے ن کو ع پر فرض کرو]

۳۶۔ ثابت کرو کہ $ن ق \times ن ق = ب^2$

۳۷۔ اگر قاطع محور کے متوازی خطوں ط ط ن متقاربوں سے ط اور ط پر اور منحنی سے ن پر ملے تو ثابت کرو کہ (۱) ن ط x ط ن = ط^۲ (۲) ن ط = ط ن (۳) ن ط x ن ط = ط^۲

۳۸۔ ثابت کرو کہ جیسے ن شاخ ع ن پر حرکت کر کے دور جاتا ہے ن د اور ن قی طول میں نہایت چھوٹے ہوتے جاتے ہیں اور ن کو اس شاخ پر کافی دور لینے سے ہم ن د اور ن قی کے طولوں کو اتنا کم کر سکتے ہیں جتنا چاہیں۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مرکز سے بہت بڑے فاصلے پر منحنی اپنے متقارب کے لانتہا قریب آ جاتا ہے۔

۹۔ حوالہ کے محور کچھ بھی ہوں زائد کی مساوات ہمیشہ درجہ دوم کی ہوگی اور اس مساوات میں اور متقاربوں کی مساوات میں صرف فرق یہ ہوگا کہ دونوں میں مستقل رقمیں مختلف ہوں گی۔

ہم نے اوپر زائد اور متقاربوں کی مساواتیں صورت ذیل میں حاصل کی ہیں

$$\frac{لا^۲}{عہ^۲} - \frac{ما^۲}{بہ^۲} = ۱ \quad \text{اور} \quad \frac{لا^۲}{عہ^۲} - \frac{ما^۲}{بہ^۲} = ۰$$

اور یہ صرف بلحاظ مستقل رقم کے ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ اگر ان مساواتوں کو کسی اور محوروں کے لحاظ سے تبدیل کیا جائے تو ہمیں لا، ما کی بجائے اس شکل کے جملات ل، لا + ص، ما + ن اور ل، لا + ص، ما + ن مندرجہ کرنے ہوں گے (حصہ اول دفعہ ۳۵) اس طرح نئی مساواتیں ہو جائیں گی

$$\frac{(ل، لا + ص، ما + ن)^۲}{عہ^۲} - \frac{(ل، لا + ص، ما + ن)^۲}{بہ^۲} = ۱$$

$$\text{اور} \quad \frac{(ل، لا + ص، ما + ن)^۲}{عہ^۲} - \frac{(ل، لا + ص، ما + ن)^۲}{بہ^۲} = ۰$$

یہ دونوں مساواتیں صریحاً ایک ہی ہیں سوائے بلحاظ اپنی مستقل رقموں کے

کیونکہ پہلی مساوات کی مستقل رقم میں -۱ موجود ہے اور دوسری مساوات میں یہ نہیں ہے۔

پس مطلوب ثابت ہوتا ہے۔
اس سے یہ نہیں فرض کر لیتا چاہئے کہ مستقل رقموں کا فرق ہمیشہ ایک ہوگا۔ کیونکہ اگر مساواتوں کو ایک ہی مستقل مقدار سے ضرب دیدیا جائے تو ان میں فرق نہیں آتا اس لئے ان مساواتوں کی ان رقموں کا فرق جن میں لا، ما شامل نہیں ہوتے کچھ ہی ہو سکتا ہے۔

۹۱۔ اگر زائد کی مساوات میں درجہ دوم کی رقمیں لا، لا + ۲ھ لا، ما + ب، ما ہوں تو اب > ۲ھ

دفعہ ماقبل کی مساوات میں درجہ دوم کی رقمیں ہیں

$$\frac{(ل، لا + ص، ما)}{عہ} - \frac{(ل، لا + ص، ما)}{عہ}$$

اور یہ دو مربعوں کا فرق ہے پس لا، لا + ۲ھ لا، ما + ب، ما کے دو اجزاء کے ضربی حقیقی ہونے چاہئیں اور اس کے لئے شرط یہ ہے

$$اب > ۲ھ$$

سروں کا باہم مقابلہ کرنے سے ہم اسے باسانی ثابت کر سکتے ہیں کیونکہ

$$ل = \frac{ل}{عہ} - \frac{ل}{بہ} = \frac{ل}{عہ} - \frac{ل}{بہ} = \frac{ل}{عہ} - \frac{ل}{بہ} = \frac{ل}{عہ} - \frac{ل}{بہ}$$

$$اس لئے اب - ۲ھ = - \left(\frac{ل، لا - ل، ما}{عہ} \right)$$

اور یہ منفی مقدار ہے کیونکہ مربع ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

ہم آگے چل کر دیکھیں گے کہ جب اب > ۲ھ تو مساوات لا، لا + ۲ھ لا، ما + ب، ما

$$+ ۲گ لا، ما + ج = ۰$$

ہمیشہ ایک زائد کو تغیر کرتی ہے یہاں ہم نے صرف اس کے عکس کو ثابت کیا ہے۔

متبادل ثبوت۔ فرض کرو کہ $ق + لا + ق + ما + ل = ۰$ اور $ق + لا + ق + ما + ل = ۰$ ۔
 متقارب ہیں، اگر منحنی پر کے کسی نقطہ سے ان پر عمود کھینچے جائیں تو ان کا
 حاصل ضرب مستقل ہوگا اس لئے

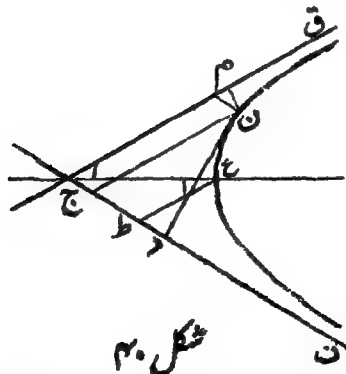
$$\frac{ق + لا + ق + ما + ل}{ق + لا + ق + ما + ل} \times \frac{ق + لا + ق + ما + ل}{ق + لا + ق + ما + ل} = ج$$

جہاں ج مستقل ہے منحنی کی مساوات ہے اور یہ مساوات صرفاً متقاربوں
 کی مساوات سے صرف بلحاظ مستقل رقم کے مختلف ہے۔

طالب علم اس زائد کی مساوات معلوم کرے جس کا ماسکہ (لا، با) ہو اور
 مرتب لاجم عہ + ماجب عہ - غ = ۰ اور اس سے دیکھے کہ لب > ص [دیکھو قطع]

۹۲۔ متقاربوں کو حوالہ کے محور مان کر زائد کی مساوات دریافت کرو۔
 ج ق، ج ق (شکل ۳۰) متقارب ہیں اور منحنی کے کسی نقطہ ن سے
 ان پر ن د، ن م عمود نکالے گئے ہیں، ہم جانتے ہیں کہ حاصل ضرب
 ن د x ن م مستقل ہے۔

اگر ج ق کو محور لا اور ج ق کو محور ما مانا جائے اور ان کا
 درمیانی زاویہ ۲ سے ہو تو



شکل ۳۰

ن د = ماجب ۲ سے، ن م = لاجب ۲ سے
 لا ماجب ۲ سے = مستقل = ک

$$\text{نہ} \quad \text{لا} = \frac{\text{ک}^2}{\text{جب}^2 \text{سہ}} = \text{س}^2 \quad (\text{فرض کرو})$$

س^۲ کی قیمت ۱، ب کی رقوم میں معلوم کرنے کی غرض سے ہم لا ما کو ایک سادہ صورت میں محسوب کرتے ہیں یعنی جب نقطہ ن لکھنے کے رأس ع پر واقع ہو۔

ع ط کو ج ق کے متوازی کھینچو، تب

$$\text{ع ط} \times \text{ط ج} = \text{س}^2$$

$$\text{لیکن چونکہ} \quad \text{ط ع ج} = \text{ق ج ع} = \text{ط ج ع} \quad \therefore \text{ط ج} = \text{ط ع}$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{ط ع}}{\text{ع ج}} = \frac{\text{جب ط ج ع}}{\text{جب ع ط ج}} = \frac{\text{جب سہ}}{\text{جم سہ}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{پس} \quad \text{س}^2 = \text{ع ط} \times \text{ط ج} = \frac{\text{ع ج}^2}{\text{جم سہ}} = \frac{۱}{۴}$$

$$\text{لیکن} \quad \text{س سہ} = \frac{\text{ب}}{۱} \quad \text{یا} \quad \text{جم سہ} = \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{ب}}$$

$$\text{نہ} \quad \text{س}^2 = \frac{۱}{(۱ + \frac{۱}{ب})}$$

$$\text{اور مطلوبہ مساوات ہے} \quad \text{لا} = \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{ب}} \quad \dots \dots \dots (۱۱)$$

متبادل ثبوت۔ ثبوت ذیل نہایت علم آموز ہے۔

$$\text{مساوات} \quad \frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ب} = \frac{۱}{ب} \quad \text{اکو اصلی محوروں سے کسی اور محوروں کے}$$

نقاط سے تبدیل کرنے کے لئے ہمیں لا، ما کی بجائے محدودوں کے لئے خطی جملے ل، لا + م، ما + ن، = اور ل، لا + م، ما + ن، = مندرجہ کرتے

ہوں گے۔

اگر نیا مبداء ہی ہو جو پرانا مبداء ہے تو $n = ۱$ ، $n = ۲$ ۔ کیونکہ نئے محدود
صفر ہوتے ہیں جب پرانے محدود صفر ہوں۔ اس لئے اگر مبداء مرکز پر
ہو تو زائد کی مساوات اس شکل کی ہوگی

$$\frac{(۱, لا + ص, ما)^۲}{ب} - \frac{(۱, لا + ص, ما)^۲}{ب} = ۱$$

یہ صریحاً اس شکل کی ہے $۱, لا + ۲, ص, لا + ما + ب, ما = ۱$
اب خط لا = ۰ کو متقارب ہونا چاہئے اس لئے مساوات درجہ دوم ب، ما = ۱
کی دونوں اصلیں لا انتہا بڑی ہیں اس لئے $ب = ۰$ ۔
اسی طرح $۱ = ۰$ ۔ اور مطلوبہ مساوات اس شکل کی ہے
 $۲, ص, لا + ما = ۱$ یا $لا + ما = ۰$ مستقل حسب سابق۔
مستقل مقدار کی قیمت بعینہ ایسے محسوب ہوگی جیسے دفعہ آخر میں۔
مساوات کو بالعموم اس طرح لکھتے ہیں
 $لا + ما = ج$ (۱۷)

متشقیق

معلوم کرو کہ ذیل کے زائدوں کی مساواتیں کیا ہو جائیں گی اگر ان کے
متقاربوں کو حوالہ کے محور مانا جائے۔

$$۳۹ - لا - ما = ۱, ۲ - لا - ۳ ما = ۵$$

$$۴۱ - لا - ب ما = ج, ۲ - ما - (لا - ما) = ۲$$

۴۳۔ اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ $ما = ص لا + ک$ زائد لا = ج
کو مس کرے۔

۴۴۔ مشق ۴۳ کے نتیجہ سے حاصل کرو کہ زائد کا ہر محاسب متقارب

سے ایسا زاویہ بناتا ہے جو متقاربوں کے درمیانی زاویہ سے

بڑا ہو۔

باب پنجم پر متفرق مشقیں

- ۴۵۔ اگر مزدوج محور کا ایک سرا ص ہو تو ثابت کرو کہ
 $\text{ج س}^2 - \text{ج ص}^2 = \frac{1}{2}$
- ۴۶۔ اس زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(-1, 1)$ ہو، مرتب
 $\text{لا} + \text{ما} = 2$ ۔ اور خروج مرکز $\frac{1}{3}$ ۔
- ۴۷۔ مشق ۴۶ کے زائد کا وتر خاص معلوم کرو۔
- ۴۸۔ ثابت کرو کہ محور کا زائد $\frac{1}{2}$ لا + $\frac{1}{2}$ ما + $\frac{1}{2}$ ب + $\frac{1}{2}$ گ = $\frac{1}{2}$ ما + $\frac{1}{2}$ ب + $\frac{1}{2}$ گ۔
- ۴۹۔ ثابت کرو کہ ماسکہ سے متقارب پر عمود میں ق نیم مزدوج محور
 کے مساوی ہے اور ج ق نیم قاطع محور کے مساوی ہے۔
- ۵۰۔ ثابت کرو کہ خط $\text{ما} = \text{لا} + \text{ج}$ زائد $\text{لا} = 2$ لا - $\text{ما} = 2$ ا کو مس کریگا
 اگر $\text{ج} = 1 \pm$
- ۵۱۔ ایک زائد کے متقارب $\text{لا} + \text{ما} = 1$ اور $\text{لا} - \text{ما} = 2$ ہیں اور اس کے
 محوروں کے مربعوں کا مجموعہ ۵ ہے، اس کی مساوات معلوم کرو۔
 [دیکھو کہ متقارب علی القوائم ہیں]
- ۵۲۔ زائد کے لئے ثابت کرو کہ $\text{ن م} : \text{ع م} \times \text{ع م} = \text{ص ج} : \text{ع ج}$
 جہاں ن م کوئی معین ہے۔
- ان $\text{م}^2 = \text{ما}^2$ ، $\text{ع م} \times \text{ع م} = (\text{لا} - 1)(\text{لا} + 1)$
- ۵۳۔ زائد کسی معین ن م پر ایک نقطہ ق ایسا لیا گیا ہے کہ
 ق م اور ن م کی باہمی نسبت مستقل ہے، ثابت کرو کہ ق کا طریق
 ایک زائد ہے جس کا قاطع محور وہی ہے جو اصلی زائد کا۔
- ۵۴۔ اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ خط مستقیم $\text{ما} = \text{ص لا} + \text{ج}$ زائد
 $\frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{ما}^2}{2} = \frac{1}{2}$ کو مس کرے اور اس سے حاصل کرو کہ ایک نقطہ

(لا، ما) سے دو حقیقی ماس صرف اُس صورت میں کھینچ سکتے ہیں جبکہ

$$1 > \frac{لا^2}{ب^2} - \frac{ما^2}{ب^2}$$

[اگر ماس (لا، ما) میں سے گزرے تو ایک مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے]
۵۵۔ منجینات ذیل کے متقاربوں کی مساواتیں لکھو

$$لا(لا+ما) = ۱، لا(لا-ما) = ۱، ما(لا+ما) = ۲$$

اور عام صورت میں ثابت کرو کہ (ل لا+صم ما) (ل لا+صم ما) = (ل لا+صم ما) کے متقارب ل لا+صم ما = اور ل لا+صم ما = ہیں۔

آزمائشی پرچہ ۲

۱۔ مفصلہ ذیل کی تعریف کرو، قطع زائد، خروج مرکز، محور اصغر، قاطع محور، وتر خاص، متقارب۔

ثابت کرو کہ ناقص یا زائد میں محور اصغر، محور اعظم اور وتر خاص کے درمیان وسط تناسب ہے۔

۲۔ منحنی ۴ لا + ۹ ما - ۴ لا - ۶ ما + ۱ = کو مرتسم کرو، اس کا خروج مرکز، اس کے محور اعظم اور اصغر کے ہر ایک کے محور نیز اس کے وتر خاص کے طول اور مساواتیں معلوم کرو۔

۳۔ ابتدائی اصولوں کی بنا پر ایک ایسے متحرک نقطہ کا طریق معلوم کرو جس کے فاصلوں کا مجموعہ دو نقاط معلومہ سے مستقل ہو

۴۔ مساوات $\frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ب} = \frac{۱}{ب}$ جب طہ $(\frac{۱}{ب} - \frac{۱}{ب})$ کی تعبیر بیان کرو اور اس سے منحنی کی شکل حاصل کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ ب لا - ما [ج - و] = ب ج ناقص $\frac{لا^2}{ب^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کا ماس ہے، ج کے منحنی بیان کرو۔

۶۔ ثابت کرو کہ اگر مساوات

$$۱ لا + ۲ ہ لا + ما + ب + ۲ گ لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$$

ایک ناقص کو تعبیر کرے تو اوب۔ ہ لازماً مثبت ہوگا۔
۷۔ منجی ہم لا۔ ما + ۲ لا + ۲ ما + ۱۳ = ۰ کو مرتبہ کر دو اور اس کے
ما سکوں کے محدود معلوم کر دو۔

۸۔ زائد $\frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۲} = ۱$ کے مقارب معلوم کر دو اور ثابت کرو کہ

ان کا درمیانی زاویہ (۲ قطا - ۱ ز) ہے۔

۹۔ زائد کو آلی طریق پر مرتبہ کرنے کی ترکیب بیان کر دو اور اس کا ثبوت لکھو۔

۱۰۔ اس زائد کی مساوات معلوم کر دو جس کے مقارب لا + ما + ۱ = ۰

اور ۲ لا - ما + ۲ = ۰ ہیں اور جو لا = ۲ کو مس کرتا ہے۔



بائشتم

درجہ دوم کی عام مساوات

۹۳۔ اس باب میں ایک حد تک ہم ان تمام منحنیات پر جن کی مساواتیں درجہ دوم کی ہیں بحث کریں گے اور ان کو مختلف جماعتوں میں تقسیم کرنے کی کوشش کریں گے۔

حسب معمول ہم درجہ دوم کی مساوات عامہ کو اس شکل میں لکھتے ہیں

$$لا + ۲ھ + ۲لا + ب + ۲ا + گ + ۲لا + ۲ف + ۲ا + ج = ۰$$

طالب علم دیکھے گا کہ گزشتہ تین بابوں میں ہم نے جن منحنیات پر بحث کی ہے ان کی مساواتیں درجہ دوم کی ہیں اور اس لحاظ سے سب کی سب ادھر کی صورت عامہ میں شامل ہیں۔

نیز ناقص اور زائد کی صورت میں ہم نے دیکھا کہ منحنی ایک مرکز رکھتا ہے جس کو اگر مبدأ قرار دیا جائے تو منحنی کی مساوات سادہ سے سادہ صورت اختیار کر لیتی ہے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ جو منحنی درجہ دوم کی عام سے عام مساوات سے تعبیر ہوتا ہے اس کا بھی بالعموم ایک مرکز ہوتا ہے جس کو مبدأ مان کر ہم مساوات مذکورہ کو نہایت سادہ شکل میں لاسکتے ہیں۔

۹۴۔ اگر ایک منحنی میں جو مساوات درجہ دوم سے تعبیر ہوتا ہو مبدأ میں سے گزرنے والے تمام وتروں کی تنصیف مبدأ پر ہوتی ہو تو مساوات میں لا اور ما کے سرلابا معبر ہونگے۔

مبدأ میں سے گزرنے والے کسی خط کی مساوات $ما = م$ لاسے اور یہ خط منحنی $لا + ۲ھ + ۲لا + ب + ۲ا + گ + ۲لا + ۲ف + ۲ا + ج = ۰$

سے وہ نقاط پر ملتا ہے جنکے فیصلے مساوات فزیکل سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱) لا + ۲ هم لا + ۳ ب + ۴ ع + ۵ لا + ۶ گ + ۷ لا + ۸ ف + ۹ م + ۱۰ لا + ۱۱ ج =

یا لا (۱ + ۲م + پ ۲م) + ۲ لا (گ + ف م) + ج = ۰

اب اگر اس وترکی تصنیف مباد پر ہوتی ہو تو اس مساوات کی صلیں
مساوی اور مختلف العلامت ہونی چاہئیں یعنی اس میں لا کا سر صفر ہونا چاہیے
[ٹیوٹوریل الجبر حصہ دوم دفعہ ۱۶۳]

اسلئے گ + ف م =

لیکن چونکہ مبدا میں سے گزرنے والے تمام دتروں کی مبدا پر تنصیف ہوتی ہے اس لئے اس مساوات کو ہم کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہونا چاہئے یعنی ضروری ہے کہ گ۔۔۔ اور ف۔۔۔ اور یہی ثابت کرنا تھا۔

برعکس اس کے اگر گ = ف = . تو مبداء میں سے گزرنے والے
سب دندروں کی مبداء پر تصنیف ہوگی کیونکہ فعلوں کی جو مساوات درجہ دوم
اک کی بجائے م لا لکھنے سے حاصل ہوگی اس کی اصلیں م کی تمام قیمتوں کے
لئے مساوی اور مختلف علامت ہوں گی۔

۹۵۔ اگر آب، ہوا کے مساوی نہ ہو تو مبادی کی مناسب تبدیلی سے ہم درجہ دوم کے کسی مخفی کی مساوات کو ایسی شکل میں لاسکتے ہیں جس میں لا اورد ما کے سر صاف ہوں۔

فرض کرو کہ ہم کوئی نیا حیدر (لا، ما) لیتے ہیں، اس نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات کو متحول کرنے کے لئے ہمیں اصلی مساوات میں لا کی بجائے لا + لا اور ما کی بجائے ما + لا لکھنا چاہیئے اس طرح نئی مساوات ہوگی

$$= 1 + (1+1) + (1+1)^2 + (1+1)^3 + \dots + (1+1)^{n-1}$$

یا اولاً ۲ هـ لاماً + پ ا' ۲ لا (ولاً + هماً + گ) ۲ ما (هلاً + پ ا' + ف)

$\therefore +\text{لا}^{\circ} + \text{ه}^{\circ}\text{لا}^{\circ} + \text{ب}^{\circ}\text{ا}^{\circ} + \text{گ}^{\circ}\text{ل}^{\circ} + \text{ف}^{\circ}\text{ا}^{\circ} + \text{ج}^{\circ} =$

اب اس مساوات میں لا اور ما کے سر صفر ہونگے اگر
 (لا + ہ + ما + گ) = اور (لا + ب + ما + ف) = (۱)

مضبوطی کے قاعدہ کی مدد سے حل کرنے سے

$$\frac{\text{لا} - \text{ب} - \text{گ}}{\text{لا} - \text{ب} - \text{گ}} = \frac{\text{لا} - \text{ب} - \text{گ}}{\text{لا} - \text{ب} - \text{گ}} = \frac{\text{لا} - \text{ب} - \text{گ}}{\text{لا} - \text{ب} - \text{گ}}$$

یعنی لا = لا ، ب = ب ، گ = گ

اسلئے اگر ا ب ا ہ کے مساوی نہ ہو تو ہم لا، ما کی ایسی محدود قیمت میں
 منتخب کر سکتے ہیں کہ نئی مساوات میں لا، ما والی رقیں موجود نہ ہوں۔
 اوپر کی دو مساواتوں (۱) کو ہم ترکیب ذیل کی مدد سے باسانی یا درکھ سکتے ہیں۔

حرف ا ب ا ج کو مربع کے
 ایک قطر پر لکھو اور اس کے دو نوں
 طرف تین نقطوں کے اس طرح نشان
 دو جیسے شکل میں پھران خالی جگہوں

کو حروف ف ، گ ، ہ سے پُر کرو جیسے تیروں کی سمتوں سے ظاہر ہے

اس طرح سے ہم حاصل ہوگا۔

اس مربع کی پہلی دو سطروں میں جو حروف ہیں وہ
 مساواتوں (۱) میں بالترتیب لا، ما کے سر اور مطلق رقیں ہیں

۹۶۔ اگر ا ب ا ہ کے مساوی نہ ہو تو درجہ دوم کے ہر معنی کے
 ساتھ ایک ایسا نقطہ متعلق ہے جس میں سے گزرنے والے معنی کے وتروں
 کی اس نقطہ پر تصیف ہوتی ہے۔

دفعہ ۹۵ میں ہم نے دیکھا کہ اگر نقطہ (لا، ما) کو نیا مبداء قرار دیا جائے
 تو نئی مساوات میں لا، ما کی رقیں نہیں رہیں اور اسلئے دفعہ ۹۴ سے

ظاہر ہے کہ اس نئے مبدا میں سے گزرنے والے سب وتروں کی تغییف اسی نقطہ پر ہونی چاہیے۔ اس نقطہ کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں اور اس میں سے گزرنے والے ہر وتر کو منحنی کا قطر کہتے ہیں۔

نوٹ۔ طالب علم دیکھ لیگا کہ مرکز کے متعلق جو کچھ یہاں بیان ہوا وہ بالکل اسکے مطابق ہے جو ابواب چارم و پنجم میں مرکوز کے بارہ میں لکھا جا چکا ہے۔
نتیجہ صریح۔ منحنی کے مرکز کے محدود ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں

$$\begin{aligned} (1) \quad & \text{آ} + \text{ہ} + \text{ا} + \text{گ} = 0, \quad \text{ھ} + \text{آ} + \text{ب} + \text{ا} + \text{ف} = 0, \end{aligned}$$

اور اگر مرکز کو نیا مبدا مانا جائے تو مساوات ہو جاتی ہے

$$\begin{aligned} & \text{آ} + \text{ہ} + ۲ + \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} + \text{گ} + ۲ + \text{ا} + \text{ف} + ۲ + \text{ا} + \text{ج} = 0 \\ & \text{مثال۔ منحنی } ۳ - \text{آ} - ۲ + \text{ا} + \text{ا} - ۲ - \text{ا} - ۳ + \text{ا} + ۱ = 0 \text{ کے مرکز معلوم کرنے کے لئے مساواتیں لکھو اور مرکز کے محدود معلوم کرو۔} \end{aligned}$$

یہاں $۱ = ۳ - \text{ا}$ ، $۱ = \text{ب}$ ، $۱ = \text{ا}$ ، $\frac{۱}{۲} = \text{ف}$ ، $۱ = \frac{۱}{۲} + \text{ج}$ اس لئے مرکز کے لئے مساواتیں ہیں

$$\begin{aligned} & \text{آ} + \text{ہ} + \text{ا} + \text{گ} = 0, \quad \text{ھ} + \text{آ} + \text{ب} + \text{ا} + \text{ف} = 0 \\ & \text{یعنی } ۳ - \text{آ} - ۱ - \frac{۱}{۲} = 0, \quad \text{ھ} + \text{آ} + ۲ - \frac{۱}{۲} = 0 \\ & \text{جس سے } \text{آ} = ۱, \quad \text{ا} = ۲ \end{aligned}$$

مشقیں

ذیل کے منحنیات میں سے ہر ایک کے مرکز کے لئے مساواتیں لکھو اور ان سے مرکز کے محدود معلوم کرو۔

- ۱۔ $\text{آ} + ۲ + \text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + ۲ + \text{ا} + ۸ + \text{ا} = 0$
- ۲۔ $۲ - \text{آ} - ۲ - \text{ا} - ۲ - \text{ا} + ۲ + ۲ = 0$
- ۳۔ $\text{آ} - ۲ - \text{ا} + \text{ا} + ۳ + \text{ا} + ۳ + ۳ = 0$
- ۴۔ $\text{آ} + ۲ + \text{ا} + \text{ا} + ۱ = 0$

۹۶۔ منحنی کی مساوات جبکہ مرکز مبدا ہو۔

قائدِ ریاضت کی مسابقت بلحاظ ایسے مہیا کے جو منحنی کے مرکز پر ہوا اصلی مسابقت کی درجہ اول کی رقموں میں لائیا کے بجائے مرکز کے نصف محدود مندرجہ کرے سے حاصل ہوتی ہے۔

ہم نے اوپر دیکھا کہ مساوات مطلوب ہے

ولا ٢ لا ما + ب ما + ولا ٢ لا ما + ب ما + لا ٢ لا ما + ج =

اس میں رقم مطلق ہے اولاً + ۵۲ لآ + ب آ + گ لا + ف ما + ج

= لا (ولا + هـ + مَ + گ) + مَ (هـ + لا + بَ + اَ + ف) + گ (لا + ف + اَ + هـ)

$$= 2\text{گ} + \left(\frac{2}{3}\right) 2\text{ف} + \left(\frac{1}{3}\right) 3 = 2\text{گ} + 2\text{ف} + 1$$

کیونکہ $اَلَا + هَآ + گ = .$ اور $هَآ + بَآ + ف = .$

اب چونکہ اصلی مسافات میں درجہ اول کی زمینیں ۲ گ لا ۲۰ ف ۱۰ ج ہیں اس لئے قاعدہ مندرجہ بالا ثابت ہوا یہ کہ ایک حد تک ضروری ہے

اور عملیات میں حسابات کو مختصر بنادیتا ہے، طالب علم اسے یاد رکھے

مثال یعنی $3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 = 100 + 40 + 5 = 145$ کے مرکز کے محدد معام

کرد اور مختصر کی مساوات اس صورت میں حاصل کرو جبکہ مرکز مبداء ہو۔

اس جگہ ۱ = س، ۲ = د، ۳ = ب، ۴ = گ، ۵ = ف، ۶ = ح، ۷ = ز

مرکز کے لئے مساواتیں ہیں

اولاً + ہ + ما + گ = . اور ھ + لا + ب + ا + ف = .

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \quad \text{یا} \quad = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

میں کرنے سے لا = ۴ ، ا = ۱

جو مرکز کے محاذ ہیں۔

درجہ اول کی رمتوں یعنی ۴ لا + ۵ ما میں مرکز کے نفعت محدود دیرج کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

۱۔ سائے مساوات بلحاظ ایسے مبداء کے جو منحنی کے مرکز پر ہو حسب ذیل ہوگی

$$۱. لا + ۲. لا + لا + ب + ۲. ج + ۲. ف + گ - ۲. ا - ۲. ب - ۲. ج - ۲. ہ = ۰$$

$$۲. ا - ۲. ب - ۲. ج - ۲. ہ$$

(۲).....

انتباہ - ہم بتا چکے ہیں کہ نئی رقم مطلق معلوم کرنے کے لئے یہ ضابطہ (۲) حسابات میں نہ استعمال کیا جائے۔ پہلا ضابطہ زیادہ موزوں ہے کیونکہ عملیات میں رقم مطلق کے علاوہ مرکز کے محدد و بھی معلوم کرنا مطلوب ہوتا ہے۔
 نتیجہ صریح - نئی رقم مطلق منفی ہوگی اگر

۱. ج + ۲. ف + گ - ۲. ا - ۲. ب - ۲. ج - ۲. ہ = ۰
 یعنی صرف اس صورت میں جبکہ درجہ دوم کا منحنی دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے (مساوی دفعہ ۳۲) اس صورت میں مساوات بلحاظ نئے مبداء کے

$$۱. لا + ۲. لا + لا + ب + ۲. ج + ۲. ف + گ - ۲. ا - ۲. ب - ۲. ج - ۲. ہ = ۰$$
 ہوگی جو ایسے دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبداء میں سے گزرتے ہیں۔

پس اگر درجہ دوم کی عام مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو معمولی طریقہ سے منحنی کا جو مرکز حاصل ہوگا وہ خطوط مذکورہ کا نقطہ تقاطع ہوگا۔
 اور یہ ہندسی نقطہ نظر سے بھی ظاہر ہے کیونکہ اگر وہ نقطہ تقاطع ہو اور
 ن و ن ایک خط و میں سے گزرے جس میں و ن = و ن تو جب ن
 ایک خط مذکور پر واقع ہوگا تو ن بھی اسی خط پر واقع ہوگا۔ اور یہی شرط
 یا تعریف ہے جو منحنی کا مرکز پورا کرتا ہے۔

۹۹ - مبداء کی مناسب تبدیلی سے درجہ دوم کی کوئی مساوات شکل

$$۱. لا + ۲. لا + لا + ب + ۲. ج + ۲. ف + گ - ۲. ا - ۲. ب - ۲. ج - ۲. ہ = ۰$$

میں لائی جاسکتی ہے بشرطیکہ اصلی مساوات میں

$$۱. لا + ۲. لا + لا + ب + ۲. ج + ۲. ف + گ - ۲. ا - ۲. ب - ۲. ج - ۲. ہ = ۰$$
 اور ۱. لا + ۲. لا + لا + ب + ۲. ج + ۲. ف + گ - ۲. ا - ۲. ب - ۲. ج - ۲. ہ = ۰
 اور ہم نے دیکھا کہ لا + لا میں درجہ اول کی رقمیں اصلی مساوات سے خارج

ہو سکتی ہیں اگر مرکز کو مبدأ مانا جائے اور اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$۱ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ لا} \text{ ما} + \text{ب} \text{ ما}^۲ = \text{ج}$$

$$\text{جہاں ج} = \frac{۱ \text{ ب ج} + ۲ \text{ ف گ} \text{ھ} - ۱ \text{ ف}^۲ - \text{ب گ}^۲ - \text{ج} \text{ھ}^۲}{۱ \text{ ب} - \text{ھ}^۲} \quad (\text{دفعہ ۹۸})$$

(نوٹ جب تک ج مرکز کے مساوی نہ ہو اس کی حقیقی قیمت اس دفعہ کے استدلال میں کچھ فرق پیدا نہیں کرتی)

اسلئے طرفین کو ج پر تقسیم کرنے سے اور $\frac{۱}{ج} = ۱$ ، $\frac{ھ}{ج} = ھ$ ، $\frac{ب}{ج} = \text{ب}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے،

$$۱ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ لا} \text{ ما} + \text{ب} \text{ ما}^۲ = ۱ \dots \dots \dots (۳)$$

۱۰۰۔ محاور کو ایک مناسب زاویہ طہ میں پھرانے سے ہم مساوات

$$۱ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ لا} \text{ ما} + \text{ب} \text{ ما}^۲ = ۱$$

کو شکل $\text{ع لا}^۲ + \text{ب ما}^۲ = ۱$ میں لاسکتے ہیں۔

محاور کو زاویہ طہ میں پھرانے کے لئے ہمیں (حصہ اول دفعہ ۳۳ کی رو سے) لا کی بجائے لا جم طہ - ما جب طہ اور ما کی بجائے لا جب طہ + ما جم طہ رکھنا چاہیئے، اس طرح نئی مساوات ہو جاتی ہے

$$۱ \text{ لا}^۲ + ۲ \text{ لا} \text{ جم طہ} - \text{ما جب طہ} - \text{ما جب طہ} = ۱ \quad (\text{لا جب طہ} + \text{ما جم طہ})$$

$$+ \text{ب} \text{ جم طہ} - \text{ما جب طہ} = ۱$$

یعنی لا (جم طہ + ۲ جم طہ جم طہ + ب جب طہ طہ)

$$= ۱ \quad \{ (۱ - \text{ب}) \text{ جب طہ جم طہ} - \text{جم طہ} - \text{ب جب طہ} \}$$

$$+ \text{ما}^۲ = ۱ \quad \{ ۱ \text{ جب طہ} - ۲ \text{ جم طہ جم طہ} + \text{ب جب طہ جم طہ} \} = ۱$$

اب اس مساوات میں لا ما کا سر صفر ہوگا اگر

$$(۱ - \text{ب}) \text{ جب طہ جم طہ} = \text{جم طہ} - \text{ب جب طہ} \quad (۱)$$

$$\text{یعنی اگر } \frac{۲ \text{ جب } ط \text{ جم } ط}{\text{جم } ط - \text{جب } ط} = \frac{۲ \text{ ہ}}{۱ - ب}$$

$$\therefore \text{مس } ط = \frac{۲ \text{ ہ}}{۱ - ب} \dots\dots\dots (۴)$$

اب ہم ایسا زاویہ معلوم کر سکتے ہیں جو ۱۸۰ سے کم ہو اور جس کا ماس کوئی حقیقی مقدار ہو، پس اس مساوات سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ محوروں کو کس زاویہ میں سے گھمایا جائے کہ نئی مساوات سے لاما والی رقم خارج ہو جائے۔

پس معلوم ہوا کہ درجہ دوم کی مساوات $۱ = ۲ \text{ ہ} + ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} + ۱ = ۱$

شکل $۱ = ۲ \text{ ہ} + ۱$ میں تحویل ہو سکتی ہے جہاں

$$۱ = ۲ \text{ ہ} + ۱ \text{ جم } ط + ۲ \text{ جب } ط + ۱ \text{ جب } ط$$

$$۲ = ۱ \text{ جب } ط - ۲ \text{ ہ} - ۲ \text{ جب } ط - ۲ \text{ جم } ط + ۱ \text{ جب } ط$$

مشقیں

۹۔ مشق ۵ تا ۷ کی مساواتوں کو شکل $۱ = ۲ \text{ ہ} + ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ب} + ۱ = ۱$ میں لاؤ۔
۱۰۔ اگر $۱ = ۲ \text{ ہ} + ۱$ کے مساوی نہ ہو تو درجہ دوم کی عام مساوات ایک ناقص یا زائد کو تعمیر کرتی ہے۔

۱۰۔ عملی صورتوں میں مساوات کی تحویل۔

اگرچہ حسب دفعہ ۱۰۰ محوروں کو گھمانے سے ہم متناظر عمود اور ہر معلوم کر سکتے ہیں لیکن یہ عمل طولانی اور تکلیف دہ ہے، اسلئے عملیات میں ایک اور طریقہ اختیار کیا جاتا ہے جسے ہم ابھی بیان کر چکے، اس نئے طریقہ میں ہم یہ مان لیتے ہیں کہ وہ متعین جو مساوات سے تعمیر ہوتا ہے ایک مخروطی تراش ہے، اسلئے یہ اس امر کے ثبوت میں دفعتاً کے ثبوت کا قائم مقام نہیں ہو سکتا کہ عام مساوات شکل $۱ = ۲ \text{ ہ} + ۱$ میں لائی جاسکتی ہے۔

یہ طریقہ ذیل کے ابتدائی مسئلہ پر منحصر ہے۔

۱۰۲۔ ایک مرکز دار مخروطی تراش سے ایک ہم مرکز دائرہ چار نقطوں پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ان میں سے دو دو نقطے مرکز میں سے گزرنے والے ایسے دو خطوط پر واقع ہوتے ہیں جو مخروطی کے محوروں کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔

یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ دونوں مرکز دار تراشیں اپنے محوروں کے گرد متماثل ہیں تاہم اس کا ایک باقاعدہ ثبوت حسب ذیل ہے۔

فرض کرو کہ مرکز دار تراش $ع$ لا + ب ما = ا سے اور دائرہ مذکورہ لا + ب ما = ر ہے۔ ان خطوط کی مساوات جو مرکز کو نقاط مشترک کے ساتھ ملاتے ہیں $ع$ لا + ب ما = لا + ب ما = $\frac{لا + ب ما}{۲}$ ہے کیونکہ یہ مساوات مساوی ہیں

گزرنے والے خطوط کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے اور نقاط تقاطع کے محدودوں کے نئے طریق مساوات ایک کے مساوی ہو جاتے ہیں۔

$$\text{ترتیب بدلنے سے } لا (ع - \frac{ب}{ر}) = ما (\frac{ا}{ر} - ب)$$

یعنی مساوات ایسے دو خطوط کو تعبیر کرتی ہے جو محوروں کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔

یہ نتیجہ صریح ہے کہ دو خطوط صرف اس صورت میں ایک دوسرے پر منطبق ہونگے جب مخروطی کے نصف محور کے مساوی ہو اور یہ انطباق متناظر محور پر وقوع پذیر ہوگا۔

۱۰۳۔ جس مخروطی تراش کی مساوات لا + ب ما = ا ہے اس کے نصف محوروں سے طول اور ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

[انتباہ غور سے دیکھا جائے کہ مساوات کے بائیں طرف کارکن ا ہے]

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اس مخروطی تراش لا + ب ما = ا اور دائرہ لا + ب ما = ر کے دو مشترک وتر ہیں جو تراش کے محوروں کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں اور جب کسی ایک محور کے طول کے مساوی ہو تو

یہ دونوں وتر اسس محور پر منطبق ہوتے ہیں۔ لیکن ان دو خطوط کی مساوات جو نقاط تقاطع کو مرکز کے ساتھ ملاتے ہیں پہلی مساوات کو دوسری مساوات کے ذریعہ متجانس بنانے سے حاصل ہوتی ہے اور اسلئے یہ حسب ذیل ہے۔

$$۱) لا^۲ + ۲ھ لا + ما = \frac{لا^۲ + ۲}{۲}$$

رقموں کو ایک طرف لانے اور ترتیب دینے سے

$$لا(لا - ۱) - \frac{۱}{۲} = (۱ - \frac{۱}{۲}) ما + ۲ھ لا + ما = ۰$$

یہ خط ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اگر دائیں طرف کا رکن مربع کامل ہو

$$\text{یعنی اگر } ۱ - \frac{۱}{۲} = ۱ - \frac{۱}{۲} (۱ - \frac{۱}{۲}) \dots (۵)$$

پس مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ - \frac{۱}{۲} = ۱ - \frac{۱}{۲} (۱ + \frac{۱}{۲}) + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$

$$\text{یا } \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} (۱ + \frac{۱}{۲}) + ۱ - \frac{۱}{۲} = ۰ \dots (۵)$$

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے $\frac{۱}{۲}$ کی دو قیمتیں ملینگی جو نصف محوروں کے متکافیوں کے مربعوں کے مساوی ہونگی، فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۲}$ ہیں، پس $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۲}$ نصف محور ہیں اور

$$(۱ - \frac{۱}{۲}) لا^۲ + ۲ھ لا + ما = ۰$$

ایک محور کی مساوات کا مربع ہے اور

$$(۱ - \frac{۱}{۲}) لا^۲ + ۲ھ لا + ما = ۰$$

دوسرے محور کی مساوات کا مربع ہے:-

پہلی مساوات $(1 - \frac{1}{p})$ کے ساتھ ضرب دینے سے ہو جاتی ہے

$$(1 - \frac{1}{p})^2 (1 + \frac{1}{p}) = (1 - \frac{1}{p}) (1 + \frac{1}{p}) + (1 - \frac{1}{p}) (1 - \frac{1}{p}) = 1 - \frac{1}{p^2}$$

$$(1 - \frac{1}{p})^2 (1 + \frac{1}{p}) = 1 - \frac{1}{p^2} + (1 - \frac{1}{p}) (1 - \frac{1}{p}) = 1 - \frac{1}{p^2} + (1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}) = 2 - \frac{2}{p}$$

کیونکہ $(1 - \frac{1}{p}) (1 - \frac{1}{p}) = (1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2})$ $= 1 - \frac{2}{p}$

اسلئے اس نصف محور کی مساوات جس کا طول p ہے

$$(1 - \frac{1}{p}) (1 + \frac{1}{p}) = 1 - \frac{1}{p^2} \dots \dots \dots (4)$$

ہے اور دوسرے کی مساوات اسی طرح ہے

$$(1 - \frac{1}{p}) (1 + \frac{1}{p}) = 1 - \frac{1}{p^2}$$

امتیاز طالب علم کو یاد رکھنا چاہئے کہ دلفہ بالا کے استعمال سے قبل جو مسئلہ
ابتدائی دفعہ ۱۲ میں دیا گیا ہے وہ کل ثبوت کا ایک حصہ ہے اس لئے
اس مسئلہ کے ثابت کرنے میں اس کا دیا جانا ضروری ہے، نیز یہ
بھی نہایت ضروری ہے کہ مساوات کے بائیں جانب رقم مطلق ایک ہو اس لئے
ہر مثال کو شروع کرنے سے پہلے تمام رقموں کو ایک ایسی مقدار پر تقسیم کر لینا چاہئے
جس سے رقم مطلق بائیں جانب ایک ہو جائے اگر ایسا نہ کیا جائے تو ہمیں سوال
در بحث کے نصف محور نہیں حاصل ہونگے بلکہ ایک ایسے منحنی کے نصف محور
حاصل ہونگے جو شکل میں اصلی منحنی کے متشابه ہوگا لیکن بائیں میں مختلف ہوگا۔ تمام
عمل کے آخر میں طالب علم کو نتیجہ کی جانچ کرنے کے لئے اس امر کی تصدیق کر لینی
چاہئے کہ محاورہ محصلہ ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں یا نہیں۔

متبادل ثبوت نصف محوروں کے طول معلوم کرنے کے لئے
محاورہ کے طول ہم غیر متغیروں (حصہ اول دفعہ ۳۷) کو استعمال کرنے سے بھی حاصل
کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی تراش

$$1 = 2\text{ لا} + 2\text{ ہ} + 2\text{ ب} + 2\text{ ما} = 1$$

کے نصف محور ہ، ہ ہیں۔

ان محوروں کے لحاظ سے مساوات ہوگی

$$1 = \frac{2\text{ لا}}{2\text{ ہ}} + \frac{2\text{ ہ}}{2\text{ ہ}}$$

اسلئے قائم محوروں کی کسی تبدیلی کی بنا پر

$$1 = 2\text{ لا} + 2\text{ ہ} + 2\text{ ب} + 2\text{ ما} \text{ ہو جاتا ہے } \frac{2\text{ لا}}{2\text{ ہ}} + \frac{2\text{ ہ}}{2\text{ ہ}}$$

$$\text{اسلئے } 1 + 2\text{ ب} = \frac{1}{2\text{ ہ}} + \frac{1}{2\text{ ہ}}$$

$$\text{اور } 2\text{ ب} - 2\text{ ہ} = \frac{1}{2\text{ ہ}} \times \frac{1}{2\text{ ہ}}$$

اب مساوات درجہ دوم کے نظریہ کی رو سے $\frac{1}{2\text{ ہ}}$ اور $\frac{1}{2\text{ ہ}}$ ذیل کی مساوات
درجہ دوم کی اصلیں ہیں ت-۲۔ ت ($\frac{1}{2\text{ ہ}}$ + $\frac{1}{2\text{ ہ}}$) + $\frac{1}{2\text{ ہ}}$ =

پس $\frac{1}{2\text{ ہ}}$ اور $\frac{1}{2\text{ ہ}}$ مساوات

ت-۲۔ ت ($2\text{ ب} + 2\text{ ہ}$) + $2\text{ ب} - 2\text{ ہ} = 0$ کی اصلیں ہیں۔

جہاں ت مجہول مقدار ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ مساوات وہی ہے جو مساوات

(۵) دفعہ ۱۰۳ ہے۔

یاد رہے کہ اس طریقہ سے محوروں کے صرف طول ہی معلوم ہوتے ہیں مساواتیں
انہیں معلوم ہوتیں، لیکن یہ طریقہ مائل محوروں پر بھی اس خوبی سے عائد ہوتا ہے
اور دراصل اگر حوالہ کے محوروں کا درمیانی زاویہ سمہ ہو تو

$$\begin{aligned} & 2\text{ ب} - 2\text{ ہ} = 2\text{ سمہ} \\ & \frac{1}{2\text{ ہ}} + \frac{1}{2\text{ ہ}} = \frac{2\text{ سمہ}}{2\text{ سمہ}} \\ & \frac{1}{2\text{ ہ}} \times \frac{1}{2\text{ ہ}} = \frac{2\text{ سمہ}}{2\text{ سمہ}} \end{aligned}$$

معلوم کرو۔

چونکہ محوروں کے طول ۱ اور $\frac{1}{4}$ ہیں اس لئے مساوات مطلوبہ ہوگی

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad 1 = 2 + 1$$

جہاں ولا محور اعظم ہے اور وما محور اصغر۔

مثال ۳۔ منحنی ۱، ۲، ۳، ۴ کے نصف محوروں کے طول اور ان کی مساواتیں دریافت کرو۔

۴ پر تقسیم کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad 1 = 2 + 1$$

محوروں کے طولوں کے لئے مساوات ہے

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{4} = 2 - 1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{4} = 1 - 2$$

چونکہ ایک نصف محور خیالی ہے اس لئے منحنی زائد ہے۔

$$\text{محور کی مساوات ہے } \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\text{اگر } \frac{1}{4} = 2 \text{ تو حاصل ہوتا ہے } \left(\frac{1}{4} - 2 \right) \left(\frac{1}{4} - 2 \right) = 0 \quad \text{یا} \quad 1 - 3 = 0$$

$$\text{اگر } \frac{1}{4} = -2 \text{ تو حاصل ہوتا ہے } \left(\frac{1}{4} + 2 \right) \left(\frac{1}{4} + 2 \right) = 0 \quad \text{یا} \quad 3 + 1 = 0$$

حسب معمول ہم دیکھتے ہیں کہ محور علی القواکم ہیں۔

مثال ۴۔ مثال بالا کے منحنی کی مساوات بلحاظ اسکے نصف محوروں کے

معلوم کرو۔

چونکہ ۲ کی قیمتیں $\frac{1}{4}$ اور ۲ ہیں اس لئے مساوات مطلوبہ ہے

$$1 = \frac{a^2}{p} + \frac{a^2}{p} \quad \text{یا} \quad 2 = \frac{a^2}{p} - \frac{a^2}{p} \quad 1 = \frac{a^2}{p}$$

یعنی $2 = a^2 - a^2$ جہاں قاطع محور لا کا محور ہے۔
مثال ۵۔ اس کی تصدیق کرو کہ عام طریقہ سے جو محور حاصل ہوتے ہیں وہ علی التوالم ہیں۔

$$\text{محوریں } (1 - \frac{1}{p}) \text{ لا} + \frac{1}{p} = 0 \quad \text{اور} \quad (1 - \frac{1}{p}) \text{ لا} + \frac{1}{p} = 0$$

جہاں $\frac{1}{p}$ اور $\frac{1}{p}$ مجہولات میں مساوات ذیل کی اصلیں ہیں۔

$$1 - \frac{1}{p} = 0 \quad \text{ت} \quad (1 + \frac{1}{p}) + (1 - \frac{1}{p}) = 0$$

یہ دو خط ایک دوسرے پر عمود دار ہونگے اگر

$$0 = (1 - \frac{1}{p})(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p} = 0$$

$$\text{یعنی اگر} \quad 1 - \frac{1}{p} = 0 \quad \text{اور} \quad (1 + \frac{1}{p}) + (1 - \frac{1}{p}) = 0 \quad \text{ت} \quad 0 = 0$$

اب $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 0$ اور $\frac{1}{p} = 0$ اور $\frac{1}{p} = 0$ حسب مسائل مساوات درجہ دوم

$$\text{اس لئے شرط مطلوبہ ہے} \quad 1 - \frac{1}{p} = 0 \quad \text{اور} \quad (1 + \frac{1}{p}) + (1 - \frac{1}{p}) = 0 \quad \text{ت} \quad 0 = 0$$

جو درست ہے۔

پس خطوط علی التوالم ہیں جیسا کہ ہونا چاہئے۔

مشقیں

ذیل کی محزوطی تراشوں میں نصف محوروں کی مساواتیں اور ان کے طول معلوم کرو
 نیز نصف محوروں کے لحاظ سے ان کی مساواتیں حاصل کرو۔

$$11 - 3 \text{ لا} + 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 3 \text{ لا} = 1 \quad 12 - 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 3 \text{ لا} = 1$$

$$13 - 3 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 3 \text{ لا} = 3 \quad 14 - 2 \text{ لا} + 3 \text{ لا} + 3 \text{ لا} = 1$$

۱۵۔ جملہ $1 - 3$ کی علامت جانچنے سے یہ معلوم کرو کہ اوپر کے معنی

ناقص ہیں یا زائد۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ مخروطی

$$(م^۲ + ع) لا + م^۲ ن لا + (ن^۲ + ع) ما = ۱$$

کے نصف محور $\frac{۱}{۲(م^۲ + ن^۲ + ع)}$ اور $\frac{۱}{۲ع}$ ہیں، نیز ان کی مساواتیں

$$ن لا - م ما = ۰، م لا + ن ما = ۰ - ہیں -$$

۱۷۔ مخروطی $لا + م^۲ + ن^۲$ $م لا + ن ما = ۱$ کے محور مساواتوں

$$\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\right) لا + م ما = ۰، \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\right) م لا + ن ما = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۲}$ ذیل کی مساوات درجہ دوم کی اصلیں ہیں

$$م ما - ن لا = ۱، م لا + ن ما = ۰$$

ان کی مشترکہ مساوات حاصل کرو یعنی $م (لا - ما) - (م لا - ن ما) = ۰$ اور دکھاؤ کہ یہ مساوات اس امر کو استعمال کرنے سے کہ محور متقاربوں کے درمیانی تاویہ کو تضعیف کرتے ہیں باسانی حاصل ہوتی ہے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۲}$ میں مساوات زیر بحث کی اصلیں حقیقی ہیں۔

$$مساوات $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} (م لا + ن ما) + م ما - ن لا = ۰$$$

کی اصلیں حقیقی ہونگی اگر $(م لا + ن ما) - ۲(م ما - ن لا) > ۰$

[نیوٹن کے الجبرا حصہ دوم دفعہ ۱۵۹]

یعنی اگر $(م لا + ن ما) + ۲(م ما - ن لا) > ۰$

چونکہ دائیں طرف کا جملہ دوم درجہ کا مجموعہ ہے اس لئے منفی نہیں ہو سکتا اس لئے نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح۔۔ اگر نصف محور مساوی ہوں تو $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ، $\frac{1}{2} = 0$ ۔

کیونکہ جملہ $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لازماً صفر ہے۔

اس صورت میں مساوات ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ جب ناقص کے محور مساوی ہوں تو وہ ایک دائرہ بن جاتا ہے اور ہم پہلے سے جانتے ہیں کہ دائرہ کی مساوات کسی خط کی ہے جو اس کے نصفاً حاصل ہوئی۔

طالب علم صرف ایک شرط کی توقع کرتا ہوگا کیونکہ مساوات کی اصلوں کے باہم مساوی ہونے کے لئے ایک شرط ضروری ہے، مگر اس صورت میں دو شرطیں ہیں کیونکہ جس جگہ کا صفر ہونا مقصود ہے وہ حقیقی مقادیر کے مربعوں کا مجموعہ ہے۔

۱۰۶۔ مساوات $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ یا $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ایک ناقص کو تعبیر کرتی

ہے اگر $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ اگر $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ کے لئے مساوات درجہ دوم ہے

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ یا $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = 0$ ۔

اور ہم نے دیکھا ہے کہ اس کی اصلیں حقیقی ہیں۔ اگر ان کی علامات مختلف ہوں تو محزوطی زائد ہے اور اگر یہ علامات موافق ہوں تو محزوطی ناقص ہے

[دیکھو مساواتوں کی شکلیں صفحات ۵۵ اور ۱۳۷ میں]

لیکن اس کی علامتیں ایک ہی ہونگی اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ۔ مثبت ہو اور مختلف ہونگی اگر یہ منفی ہو۔

اس لئے اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ۔ مثبت ہو تو مساوات ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے

[یہ ناقص حقیقی ہوگا اگر دونوں اصلیں مثبت ہوں اور خیالی ہوگا اگر دونوں منفی ہوں] لیکن اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ۔ منفی ہو تو مساوات ایک زائد کو تعبیر کرتی ہے۔

نتیجہ صریح۔۔ اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ تو مساوات متوازی خطوط مستقیم کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ اس صورت میں دائیں جانب کا رکن ایک مربع کامل ہے، $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (مثلاً $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$) اس لئے $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ متوازی خطوط کا ایک جوڑا ہے۔

لیکن اس کا خیال رہے کہ عام مساوات کی بحث میں ہم نے صورت
 ۱ ب = ۲ کو آئندہ کے لئے بالکل الگ چھوڑ دیا ہے۔

۱۰۷۔ یہ مان کر کہ درجہ دوم کی مساوات ایک زائد کو تعبیر کرتی ہے اسکے

مقارہوں کی مساواتیں معلوم کریں۔
 ہم جانتے ہیں کہ مقارہوں کی مشترکہ مساوات منحنی کی مساوات سے
 صرف ہجائے مستقل رقم کے مختلف ہوتی ہے (صفحہ ۸۶) اس سے ذیل کا کلیہ
 حاصل ہوتا ہے۔

کلیہ۔ مقارہوں کی مساوات حاصل کرنے کے لئے منحنی کی مساوات
 معلومہ میں رقم مطلق کی بجائے ایک نامعلوم مقدار لے رکھو اور پھر لہ کی ایسی
 قیمت معلوم کرو کہ نئی مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے۔
 مثال۔ شرطی (۱)۔ ۳ لا + ۳ + ۲ لا + ۲ = ۰ کے

مقارہوں کی مساواتیں معلوم کریں۔
 ہمیں لہ کی ایسی قیمت معلوم کرنا ہے کہ

$$(۱)۔ ۳ لا + ۳ + ۲ لا + ۲ = ۰ لہ = ۰$$

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے، اسکے لئے شرط ہے

$$۳ لا + ۳ - ۳ - ۳ لا = ۰ [حصہ اول، صفحہ ۳۲]$$

یعنی لہ = ۱، پس مقارب ہیں

$$(۲)۔ ۳ لا + ۳ + ۲ لا + ۲ = ۰ لا = ۱ + ۳ = ۰$$

$$(۳)۔ ۳ لا + ۳ + ۲ لا + ۲ = ۰ لا = ۱ + ۳ = ۰$$

الگ الگ ان کی مساواتیں ہیں

$$۳ لا + ۳ = ۰ اور لا + ۳ = ۰$$

مشقیں

منحنيات ذیل کے مقارہوں کی مساواتیں معلوم کرو

$$۱۸۔ لا + ۲ لا - ۲ لا + ۲ لا + ۳ لا = ۰$$

$$۱۹ - ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا = ۰$$

$$۲۰ - ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا = ۰$$

۱۰۸ - جن دو مخروطی تراشوں کی مساواتیں بلحاظ مستقل رقم کے ایک دوسرے سے مختلف ہوں ان کے متقارب وہی ہوتے ہیں۔

مقاروں کی مساوات حاصل کرنے میں ہم مساوات کے تمام سرسوائے مستقل رقم کے استعمال کرتے ہیں اسلئے مساوات محصلہ صرف پانچ سرسوائے موقوف ہوتی ہے اور رقم مطلق اس میں شامل نہیں ہوتی ہے۔

۱۰۹ - ناقص کے متقارب

ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی خواہ ناقص ہو یا زائد ہم اس کے متقاربوں کی مساوات معلوم کر سکتے ہیں، ان دو صورتوں میں فرق صرف یہ ہے کہ زائد کے متقاربوں کی مساوات ہمیشہ دو حقیقی اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتی ہے لیکن ناقص کے متقاربوں کی مساوات کے اجزائے ضربی خیالی ہوتے ہیں پس معلوم ہوا کہ ناقص کے متقارب خیالی ہوتے ہیں۔

۱۱۰ - درجہ دوم کی عام مساوات سے جو مخروطی تبیین ہوتی ہے اس کے متقاربوں کی مساوات معلوم کر۔

قاعدہ مندرجہ بالا کے مطابق ہمیں رقم مطلق کی بجائے ایک اور مقدار رکھ کر اس کی وہ قیمت معلوم کرنا ہے کہ نیا جملہ دو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی ہو۔ فرض کر کہ ہم ج کی بجائے ج + ج رکھتے ہیں جہاں ج کی قیمت مطلوب ہے۔

اب چونکہ $۱ لا + ۲ لا + ۳ لا + ۴ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۷ لا + ۸ لا + ۹ لا + ۱۰ لا = ۰$ دو خطوط کو تبیین کرتے ہیں اسلئے

$$۱ (ج + ج) + ۲ (ج + ج) + ۳ (ج + ج) + ۴ (ج + ج) + ۵ (ج + ج) + ۶ (ج + ج) + ۷ (ج + ج) + ۸ (ج + ج) + ۹ (ج + ج) + ۱۰ (ج + ج) = ۰$$

$$۱۱ (ج + ج) = ۰$$

اس لئے متقاربوں کی مساوات ہے

۱) ۲+ ۳= لا + با + بگ + هک (۲+ ۳= فبا + ج - ابج ۴+ فگ = ه- افه- بگ- ۱- ج ۵

۱۰۰ - ۱۰۱

نتیجہ صریح ۱۔ ج = اگر ا ب ج ۲ + ف گ ۵۔ ا ف ۲۔ ب گ ۲۔ ج ۵ =
یعنی اگر اصلی مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو

ج = ∞ اگر $\frac{1}{b} = 25$

یعنی اگر مساوات ایک مکانی کو تعبیر کرے اور اس صورت میں ہم نے دیکھا ہے کہ محمد و ناصحہ پر متقارب نہیں ہوتے (صفحہ ۴۹)

نتیجہ صریح ۲۔ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ کے
مقابلہ خطوط مستقیم $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ کے متوالی ہیں۔

کیونکہ منتقامیوں کی مساوات

۱ لا + ۲ ھ لا + ما + ب + ۲ گ لا + ۲ ف + ج + ج = ۰ ہے اور
خطوط کا یہ جوڑا خطوط ۱ لا + ۲ ھ لا + ما + ب + ۲ = ۰ کے متوازی ہے

[حصہ اول دفعہ ۳۲]

پس اگر ہم منحنی کے مرکز میں سے خطوط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷،

نتیجہ صریح ۳۔ مساوات ایک ناقص یا زائد کو تعمیر کرتی ہے اگر بالترتیب

اب < > هـ

کیونکہ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ کے اجزائے ضربی خیالی ہونگے یا حقیقی اگر ترتیب $1 + 2 + 3 + \dots + n$ یا $n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$ ہے۔

یعنی متقارب خیالی ہونگے یا حقیقی اگر بالترتیب $a < b$ یا $a > b$ (مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۷ کے ساتھ)

۱۱۱ - قطع زائد کے قائم ہونے کی شرط۔

اس صورت میں متقارب علی القوائم ہیں، اس لئے خطوط

$$x^2 + x + 1 = 0$$

علی القیادہ ہمیں، ۱ سلسلے شرط مطلوبہ ہے $1 + b = 0$ [حصہ اول دفعہ ۲۹]
پس درجہ دوم کی عام مساوات ایک قائم زائد کو تعبیر کر لگی اگر لا اور ما
کے سر قیادہ مساوی لیکن علامت میں مختلف ہوں۔
۱۱۲۔ فقط دیکھنے سے متقارب معلوم کرنا۔

بعض اوقات ہم محض دیکھنے سے معلوم کر سکتے ہیں کہ ایک مخروطی سلسلے
مقارب کیا ہیں، مثلاً: مساوات مفروضہ ہو $(1 + 2a + 3b)$ اور $1 + 2a + 3b = 0$ ہوئے کیونکہ انکی
مقارب صریحاً $1 + 2a + 3b = 0$ اور $1 + 2a + 3b = 0$ مشترک مساوات اور منحنی کی مساوات میں فرق صرف مستقل رقم کا ہے۔
نیز جب مساوات میں لا اور ما کی رقیں موجود نہ ہوں تو بھی یہ طریقہ
استعمال ہو سکے گا، مثلاً

$1 + 2a - 3b = 0$
کے مقارب معلوم کرنے کے لئے ہم اس مساوات کو اس طرح لکھ سکتے ہیں
 $(1 - 1)(1 + 2a + 3b) = 0$
اور مقارب صریحاً $1 - 1 = 0$ اور $1 + 2a + 3b = 0$ ہیں۔

مشقیں

محض دیکھنے سے منحنیات ذیل کے مقارب معلوم کرو
۲۱۔ لا $(1 + 2a + 3b) = 0$ ۲۲۔ لا $(1 - 1) = 0$
۲۳۔ لا $1 + 2a + 3b = 0$ ۲۴۔ لا $1 + 2a + 3b + 4 = 0$
۲۵۔ لا $1 + 2a + 3b = 0$ ۲۶۔ لا $(1 + 2a + 3b) = 0$
۲۷۔ لا $(1 - 1) = 0$ ۲۸۔ لا $(1 + 2a + 3b) = 0$
۲۹۔ لا $(1 + 2a + 3b) = 0$ تا ۲۷ کے نتائج سے ان منحنیات کے مرکز حاصل کرو۔

باب ششم پر متفرق مشقیں

۲۹۔ جس مخروطی تراش کی مساوات

$$۵ \text{ لا} + ۶ \text{ لا} - ۵ \text{ لا} - ۲۲ \text{ لا} + ۱۸ \text{ لا} - ۷ = ۰$$

سے اس کے مرکز کے محدود معلوم کرو۔

۳۳۔ ایک مخروطی کی مساوات $۲۵ \text{ لا} - ۳۶ \text{ لا} + ۳۰ \text{ لا} + ۱۰ \text{ لا} - ۲۸ \text{ لا} - ۴۷ = ۰$ کو مرکز میں سے گزرنیوالے متوازی محوروں کے لحاظ سے تبدیل کرو۔

۳۴۔ ایک مخروطی کی مساوات $۵۷ \text{ لا} - ۱۵۰ \text{ لا} - ۲۳ \text{ لا} = ۳۴$ کو بلحاظ اسکے بیانیہ محوروں کے متحول کرو۔

۳۵۔ منحنی $۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۱$ کے اُن قطروں کی مساوات معلوم کرو جو اس منحنی اور ہم مرکز دائرہ

$$۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۱$$

کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔

۳۶۔ ثابت کرد کہ $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۰$ کے متقارب مساوات

$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۰$ سے حاصل ہوتے ہیں جہاں ۱ لا مرکز کے محدود ہیں۔

۳۷۔ اگر قائم محوروں کے دو مختلف نظاموں کے لحاظ سے مساواتیں $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۱$ اور $۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} = ۱$ ایک ہی مخروطی کو تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ

$$۱ + ۲ = ۱ + ۲ \text{ اور } ۱ + ۲ = ۱ + ۲$$

اُن زائدوں کی مساواتیں حاصل کرو جو نقطہ (۲/۱) میں سے گزریں اور جن کے متقارب بالترتیب ذیل کے خطوط ہوں۔

$$۳۵ - ۳ - ۱ + ۱ = ۰ \text{ لا} + ۱ = ۰$$

$$۳۶ - ۳ - ۱ = ۰ \text{ لا} + ۱ = ۰$$

$$۳۷ - ۳ - ۱ + ۱ = ۰ \text{ لا} + ۱ = ۰$$

۳۸۔ ایک زائد کے متقارب $۲ \text{ لا} - ۵ \text{ لا} - ۳ \text{ لا} = ۰$

ہیں، اسکے محوروں کی مساواتیں دریافت کرو۔
 ۳۹۔ اس زائد کے محوروں کی مشترک مساوات معلوم کرو جس کے
 متقاربوں کی مساوات $۱ لا + ۲ م + ۳ لا + ۴ م + ۵ لا + ۶ م + ۷ لا + ۸ م + ۹ لا = ۰$ ہے۔
 ۴۰۔ اس زائد کی مساوات معلوم کرو جو مبداء میں سے گزرے اور
 جس کے متقارب وہی ہوں جو منحنی $۲ لا + ۳ لا + ۴ م + ۵ لا + ۶ م + ۷ لا + ۸ م + ۹ لا = ۰$
 کے ہیں۔



باب ہفتم

ناقصوں کا مرسم کرنا

۱۱۳۔ اب ہم ناقصوں کے مرسم کرنیکی چند توضیحی مثالیں حل کرینگے جبکہ ان کی مساواتیں عام شکل میں دی گئی ہوں۔
 یہ نہایت ہی سادہ شکل کا منہی ہے اس لحاظ سے اس کے حل کا آسانی بہت
 حل سکتا ہے اگر اس کے نصف محور مقدار اور سمت میں معلوم ہوں اسلئے
 سب سے پہلے ہم اس کے نصف محور معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں اور اسکے
 بعد تصدیق کی خاطر منہی پر چند اور نقطے حاصل کر کے ترسیم کی صحت کی جانچ کر سکتے ہیں۔
 اس کے متعلق تمام ضروری عمل پچھلے باب میں بیان ہو چکے ہیں یعنی
 (۱) سب سے پہلے ہم منہی کا مرکز اور اسکی مساوات معلوم کرتے ہیں جبکہ
 مرکز مبداء ہو۔

(۲) اسیکے بعد ہم نصف محوروں کے طول اور انکی مساواتیں معلوم کرتے ہیں۔
 ۱۱۴۔ مثال ۱۔ ذیل کے منہی کو مرسم کرو۔

$$۳۶ لا + ۲۴ لا + ۲۹ ما - ۲ لا + ۱۲۶ با + ۸۱ = ۰$$

[نوٹ ذیل کے حل کو بطور نمونہ کے نہ خیال کیا جائے کیونکہ مربع خطوط دھڑانی کے
 اندر عمل کے جو حصے ہیں وہ ثبوت کی صحت جانچنے کے لئے مختص اشارے ہیں جنہیں کم از کم ذہن
 میں ملحوظ رکھنا چاہیے]

(۱) یہاں ۱ ب - ۲۹ = ۲۶ × ۲۹ - ۱۲ = ایک مثبت مقدار

[۱ ب - ۲۹ کی حقیقی قیمت معلوم کرنا ضروری نہیں] -

اس لئے منحنی قطع ناقص ہے [دفعہ ۱۰۶]

(ب) جن مساداتوں سے مرکز کے

محدد معلوم ہوتے ہیں وہ یہ ہیں

$$۳۶ \text{ لا} + ۱۲ \text{ ما} - ۳۶ = ۰$$

$$۱۲ \text{ لا} + ۲۹ \text{ ما} + ۶۳ = ۰$$

$$\text{جن سے لا} = ۲, \text{ ما} = ۳$$

[۱۰] 'ا'، 'ما' کی قیمتیں حاصل کرنے کے بعد

انہیں مساداتوں میں مندرج کرنے سے

اپنے حل کی تصدیق کر لو

(ج) درجہ اول کی رقموں میں مرکز کے نصف محدود درج کرنے

سے مسادات بلحاظ مرکز کے حاصل ہوتی ہے (دفعہ ۹)

$$۳۶ \text{ لا} + ۲۲ \text{ لا} + ۲۹ \text{ ما} - ۴۲ (۱) + ۱۲۶ (-\frac{۳}{۴}) + ۸۱ = ۰$$

$$\text{یا } ۳۶ \text{ لا} + ۲۲ \text{ لا} + ۲۹ \text{ ما} = ۱۸۰$$

$$\text{یا } \frac{۱}{۱۸} \text{ لا} + \frac{۲}{۱۵} \text{ لا} + \frac{۲۹}{۱۸۰} \text{ ما} = ۱ \text{ [دیکھو اشتباہ دفعہ ۱۰۳]}$$

(د) نصف محور مسادات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں

$$(دفعہ ۱۰۳) \quad \frac{۱}{۲} = (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}) (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲})$$

$$\text{یا } (\frac{۱}{۱۵}) = (\frac{۱}{۲} - \frac{۲۹}{۱۸۰}) (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲})$$

$$\text{یا } ۰ = \frac{۱}{۳۶} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳۳}{۱۸۰} - \frac{۱}{۲}$$

$$\text{جس سے } ۲ = ۲ \text{ یا } ۹ \text{ اور } ۳ = ۲$$

اس لئے منحنی کی مسادات جبکہ اس کے اصلی محور حوالہ کے محور ہوں یہ ہوگی

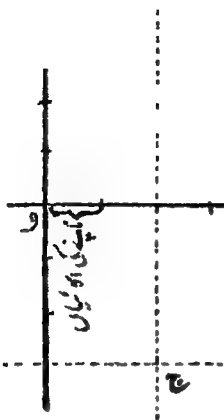
$$۱ = \frac{۲}{۳۶} + \frac{۱}{۲}$$

(ع) محور اعظم یا اصغر کی مسادات یہ ہے

$$۰ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \text{ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ ما}$$

$$\text{جب } ۲ = ۹ \text{ (محور اعظم) تو یہ مسادات ہوگی } (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}) \text{ لا} + \frac{۱}{۱۸} \text{ ما} = ۰$$

$$\text{یعنی } ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ ما} = ۰$$



شکل ۴

جب $ز = ۴$ (محور اصغر) تو مسادات ہوگی $(\frac{1}{۵} - \frac{1}{۱۰})$ لا $+ \frac{1}{۱۵} = ۰$
یعنی $۳ - لا - ۴ = ۰$ یا $۰ = ۱$

[اس مقام پر دیکھ لینا چاہیے کہ دونوں محور باہم علی القوائم ہیں یا نہیں
(حصہ اول دفعہ ۱۹)]

[اب محور کھینچنے کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے، محور اعظم حاصل کر نیچے لئے
موجودہ صورت میں رکھو لا $= ۳$ (کیونکہ ما کا سر ۳ ہے) جس سے $۰ = ۴ - ۳$
اس نقطہ ن کا بلحا خانے محوروں کے دخل میں نشان دو اور اس کو مرکز ج
سے لانے والا خط ج ن کھینچو، محور اصغر کے لئے رکھو لا $= ۴$ (کیونکہ
ما کا سر ۴ ہے) جس سے $۰ = ۴$ ، اس نقطہ قی کا تعین کرو اور حسب
سابقہ خط ج قی کھینچو]

(ف) خطوط $۴ - لا + ۳ = ۰$ اور $۳ - لا - ۴ = ۰$ پر بالترتیب
دونوں طرف طول ۳ اور ۲ کا ٹکڑا اس طرح ہمیں محور اعظم اور اصغر کے
سرے حاصل ہوتے ہیں اور منحنی کھینچا جاسکتا ہے۔

[لیکن اس سے قبل کہ ہم منحنی کھینچیں یہ بہتر ہوگا کہ ان نقاط کو معلوم کر کے
جہاں منحنی ابتدائی محوروں کو کاٹتا ہے (نیشہ طیکہ یہ کاٹتا ہو) ہم اپنے
کام کی جانچ کر لیں، لیکن اگر یہ نہ کاٹتا ہو تو ہمیں کوئی اور نقطہ معلوم
کرنے چاہئیں جہاں یہ کسی اور مزدوں خطوط کو قطع کرتا ہو، اس کے متعلق
ہم کچھ اور ذکر (گ) کے ماتحت کر نیچے]

(گ) منحنی ابتدائی محور ما (یعنی لا $= ۰$) کو کاٹتا ہے جہاں

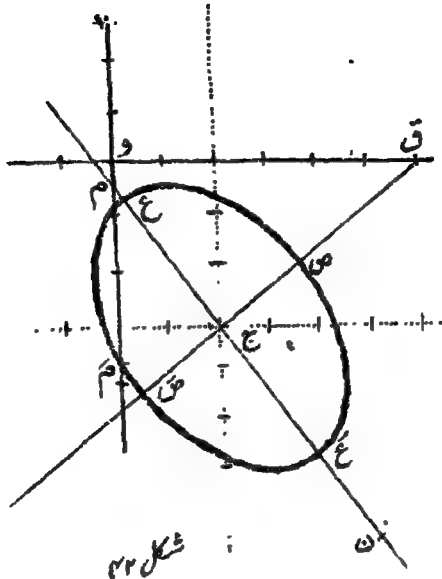
$$۰ = ۸۱ + ۶۱۲۶ + ۲۹$$

$$یا \quad ۰ = \frac{۸۱ \times ۲۹ - ۶۳۷ \pm ۶۳}{۲۹} = \frac{۲۰ \pm ۶۳}{۲۹} \quad \text{تقریباً}$$

دیکھو کہ اس جگہ تقریبی قیمت لینے سے غل میں کس قدر اختصار ہوتا ہے]

$$۰ = ۸ - ۵۸ یا - ۳۵۶ \quad \text{تقریباً، شکل میں یہ نقطہ}$$

م اور م ہیں، اسی طرح منحنی ابتدائی محور لا سے ملتا ہے جہاں



شکل ۳۲

۳۶ لا^۲ - ۲ء لا + ۸۱ = -
 جس سے خیالی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی منہی محور کا کو نہیں کاٹتا۔
 اگر ناقص محوروں کے طولوں کی مدد سے بنالیا گیا ہو تو ان قیمتوں سے اس کی ترسیم کی
 تصدیق ہو سکتی ہے لیکن بہتر یہ ہے کہ منہی کیپچر سے پہلے محوروں پر ان نقطوں کے
 نشان دیدئے جائیں جہاں منہی محوروں کو کاٹتا ہے اور پھر اس مرکز کی جانچ کی جائے
 کہ محوروں کے طول ان مقامات کے منافی تو نہیں ہیں]
مثال ۲ - منہی ۱۱ لا^۲ + ۴ لا + ۴ - ۱۴ - ۲۶ لا - ۲۲ - ۲۳ = کو مرکز کو
 [ذیل کامل بطور نمونہ کے خیال کیا جاسکتا ہے لیکن مثال اول کی سب
 ترکیبیں اس میں اختیار کی جانی چاہئیں]

$$(۱) \text{ یہاں } ۱ \text{ جب } - ۱۵۴ = ۲ - ۱۵۰$$

اس لئے منہی ایک ناقص ہے

(ب) مساواتیں جن سے مرکز حاصل ہوتا ہے یہ ہیں

$$۱۱ لا + ۲ - ۱۳ = ۰ \text{ اور } ۲ لا + ۴ - ۱۶ = ۰$$

جس سے $لا = ۱$ ، $ما = ۱$

(ج) مساوات بلحاظ مرکز کے ہے

$$۱۱ \quad لا + ما = ۱۴ \quad لا + ما = ۱۴ - ۲۶ - \left(\frac{۱}{۴}\right) ۲۶ - \left(\frac{۱}{۴}\right) ۲۲ = ۲۳ + \left(\frac{۱}{۴}\right) ۲۲ = ۲۳ + ۵.۵ = ۲۸.۵$$

$$۱۱ \quad لا + ما = ۱۴ \quad لا + ما = ۱۴ - ۲۶ - \left(\frac{۱}{۴}\right) ۲۶ - \left(\frac{۱}{۴}\right) ۲۲ = ۲۳ + \left(\frac{۱}{۴}\right) ۲۲ = ۲۳ + ۵.۵ = ۲۸.۵$$

(د) نصف محور ایں مساوات سے حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{۱}{۴} = \left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}\right) \left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}\right)$$

$$\frac{۱}{۴} = \left(\frac{۱}{۴}\right) = \left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}\right) \left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}\right)$$

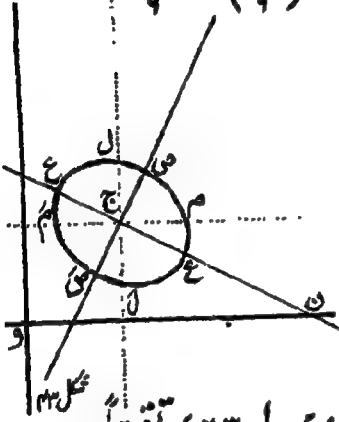
$$۰ = \frac{۲۵}{۴} + \frac{۲۵}{۴} \times \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۵} \quad یا \quad \frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۵}$$

[مختی کی مساوات بلحاظ اصلی محوروں کے ہے

$$۱ = \frac{ما}{\frac{۲}{۵}} + \frac{لا}{\frac{۳}{۵}}$$

$$[۱ = \frac{ما}{۲} + \frac{لا}{۳}]$$



$$\therefore r = \sqrt{۱۶} \quad یا \quad \sqrt{۲۵} \quad یعنی \quad ۴ \quad یا \quad ۵ \quad تقریباً$$

(ع) محور اعظم یا اصغر کی مساوات ہے

$$۰ = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}$$

جب $\frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۵}$ (محور اعظم) تو یہ ہوتی ہے

$$\left(\frac{۵}{۴} - \frac{۱۱}{۴}\right) لا + \frac{۱}{۴} ما = ۰ \quad یا \quad لا + ۲ ما = ۰$$

جب $\frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۵}$ (محور اصغر) تو یہ ہوتی ہے

$$\left(\frac{۵}{۴} - \frac{۱۱}{۴}\right) لا + \frac{۱}{۴} ما = ۰ \quad یا \quad لا - ۲ ما = ۰$$

اور یہ دونوں محور علی التواء ہیں جیسا کہ ہونا چاہئے۔

(ف) ان دو خطوں کا شکل (۴۳) میں مرتب کرنے اور ان پر ہر دو جانب

نصف محوروں کے مساوی طول کاٹنے سے ہیں نقاط 'ع'، 'ع'، 'ص'، 'ص'

حاصل ہوتے ہیں دیکھو شکل۔

- ۸۔ اوپر کی مشقوں ۱، ۳، ۵ میں جو منحنی دئے گئے ہیں ان کے محوروں کی مساواتیں بلحاظ ابتدائی محوروں کے معلوم کرو۔
- ۹۔ منحنی $لا' + لا + ما' = ۱$ کو گھینچو اور اس کا مقابلہ مشق ۷ کے منحنی کے ساتھ کرو اس طرح انتباہ دفعہ ۱۰۳ کی ضرورت کی توثیق کرو۔



باب ہشتم

زائدوں کا مرسم کرنا

۱۱۵۔ اب ہم باب ہشتم کے قاعدوں کو زائدوں کے مرسم کرنے میں استعمال کرینگے جبکہ ان کی مساواتیں دی ہوئی ہوں، چونکہ منحنی دونوں جانب لا انتہا فاصلے تک پھیلتا ہے، اس لئے اس کا مرسم کرنا ناقص کی نسبت ذرا مشکل ہے لیکن تاہم بہت سائل دونوں صورتوں میں ایک ہی ہے۔ زائد کی صورت میں ہر ایک نصف محور کا طول اور سمت معلوم کرینگے علاوہ یہ نہایت ضروری ہے کہ اس کے متقارب بھی معلوم کئے جائیں اور مرسم کئے جائیں، درنہ یہ یقینی طور پر معلوم نہیں ہو سکتا کہ لا انتہا فاصلے پر دونوں شاخوں کی انتہائی سمتیں کیا ہیں۔

طریق عمل حسب ذیل ہے

۱۔ منحنی کا مرکز اور منحنی کی مساوات معلوم کرو جبکہ مرکز مبداء ہو۔

۲۔ محوروں کے طول اور ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

۳۔ متقارب معلوم کرو اور انہیں مرسم کرو۔

اور بالآخر علاوہ مناسب ہے کہ تصدیق کی خاطر منحنی برادر نقطے معلوم کئے جائیں، جن نقطوں پر ابتدائی محور منحنی کو کاٹتے ہیں ان کو معلوم اور مرسم کرنا کافی ہوگا لیکن اگر یہ محور منحنی کو حقیقی نقطوں پر کاٹتے ہوں تو ایسے اور خط باآسانی معلوم ہو سکتے ہیں جو اسے حقیقی نقطوں پر کاٹتے ہوں۔

مثال ۱۔ جس منحنی کی مساوات

$$x^2 + y^2 - 10x + 12y - 12 = 0$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\left(\frac{1}{4} \right) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

$$\text{لہذا } \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}$$

(قطع زائد میں ر کی ایک قیمت منفی ہوتی ہے)

اس لئے ظاہر ہے کہ شخصی قطع زائد ہے جس کا متقاطع نصف محور ۱ ہے اور مزدوج نصف محور $\frac{1}{2}$ ہے۔

(پس جب منحنی کے اصلی محوروں کو محدودوں کے محور مانا جائے تو منحنی کی مساوات یہ ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \quad \text{یا لا} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

(ع) متقاطع اور مزدوج محوروں کی مساواتیں اس مساوات سے حاصل ہوتی ہے

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \text{ لا} + \frac{1}{8} = 0$$

جب $\frac{1}{4} = 1$ (متقاطع محور) تو مساوات بالا حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$\left(1 - \frac{1}{4} \right) \text{ لا} + \frac{1}{8} = 0 \quad \text{یا لا} - \frac{1}{8} = 0$$

جب $\frac{1}{4} = -1$ (مزدوج محور) تو مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\left(-1 + \frac{1}{4} \right) \text{ لا} + \frac{1}{8} = 0 \quad \text{یا لا} + \frac{1}{8} = 0$$

(اس نتیجہ کے صحیح ہونے کی تصدیق اس امر سے ہوتی ہے کہ یہ خط میر کا ایک

دوسرے پر عمود ہیں)

مرکز ج میں سے یہ محور کھینچو اور متقاطع محور لا - $\frac{1}{8}$ = پر اس کے

سروں ج ج کے نشان اسطرح لگاؤ کہ ج ج اور ج ج میں سے ہر ایک ایک

سادہ ہو۔

(قطع زائد کی صورت میں مزدوج نصف محور کا جو طول ہے اسکے جواب میں

نقطوں کے نشان لگانے کی ضرورت نہیں کیونکہ ان سے منحنی پر کا کوئی نقطہ

حاصل نہیں ہوگا۔ یہ کی منحنی مذکور کے متقارب کھینچنے سے بخوبی پوری ہو سکتی ہے

جیسا ذیل میں بتایا گیا ہے)

(ف) مرکز کو مبدأ مان کر متقاربوں کی مساوات یہ ہے

$$لا + ۱۰ لا + لا = ۰$$
 (دیکھو دفعہ ۱۱۰ نتیجہ صیغہ ۲)

یعنی $لا = (-۶۱۲ \pm ۵)$ لا

یا تقریباً $لا = -۱۰۰$ اور $لا = ۹۹$ دو متقارب ہیں۔
 اب ہم متقاربوں کو مرسم کر سکتے ہیں اور متقاطع محور کے مقام سے معلوم ہو جاتا ہے کہ منحنی متقاربوں کے درمیان کے زاویہ منفرجہ میں واقع ہوتا ہے (اس منزل پر اپنے عمل کی تصدیق یہ دیکھنے سے کرو کہ منحنی کے محور متقاربوں کے درمیانی ناودیہ کی تنصیف کرتے معلوم ہوتے ہیں یہ بہت ضروری ہے)
 (گ) چاں خط دلا منحنی سے ملتا ہے وہاں $لا = ۵$ یا ۱۱۵ (ان نتائج سے نقاط م اور م حاصل ہوتے ہیں) اور جہاں و مانحنی سے ملتا ہے وہاں $لا = ۵$ یا ۱۱۵ (ان سے ل اور ل حاصل ہوتے ہیں) ان نقطوں کو مرسم کر لینے کے بعد منحنی کی شکل کے متعلق خاصہ اندازہ ہو سکتا ہے۔

[طالب علم کو چاہئے کہ ایسی صورتوں میں متقاربوں کے مرسم کرنے میں بڑی احتیاط سے کام لے ورنہ مرکز سے دور کے حصوں میں منحنی کے مرسم کرنے میں اسے بڑی دقت پیش آئیگی]

مثال ۲۔ جس منحنی کی مساوات

$$۲ لا + ۴ لا + لا = ۰$$

ہے اسے مرسم کرو۔

(۱) چونکہ (ا ب - ح) = -۴ یعنی منحنی ہے اس لئے منحنی قطع نرائند ہوگا۔

(ب) منحنی کا مرکز مبدأ پر منطبق ہوتا ہے کیونکہ مساوات میں درجہ اول کی کوئی رقم نہیں ہے۔ اس لئے ہم فوراً محاور کے طول معلوم کرنے کی طرف متوجہ ہوتے ہیں۔

(ج) ۱ پر تقسیم کرنے سے مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$۲ لا + ۴ لا + لا = ۰$$

نصف محوروں کے لئے مساوات ہے

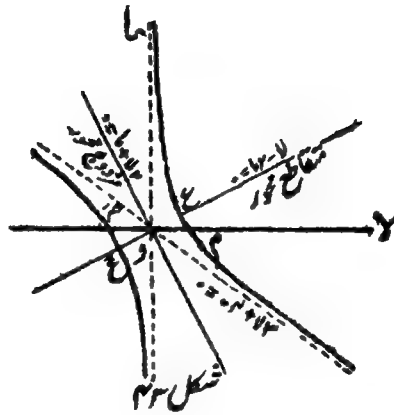
$$\frac{x^2}{a^2} = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

جو قیمتیں مندرجہ کرنے سے حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a} - 0\right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$0 = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{ab}$$

جس سے $\frac{1}{b} = \frac{1}{a}$ یا $\frac{1}{b} = \frac{1}{a}$



پس منحنی قطع زائد ہے جس کا نصف متقاطع محور ہے:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \text{ تقریباً } 1.572$$

$$2.525 = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \text{ اور جس کا نصف مزدوج محور } = \frac{1}{a}$$

[اس لئے اصلی محوروں کے لحاظ سے منحنی کی مساوات یہ ہو جاتی ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \text{ یا } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \text{ یا } \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

(د) چونکہ محور کی مساوات

$$\left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0 \text{ ہے اس لئے}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} \text{ سے متقاطع محور کی مساوات } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0 \text{ حاصل ہوتی ہے۔}$$

یعنی $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ حاصل ہوتی ہے۔

۲ = ۰ سے مزدوج محور کی مساوات $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$ لا + $\frac{1}{4} = ۰$ ۔
یعنی ۲ لا + ۱ = ۰ حاصل ہوتی ہے۔
تصدیق کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دو علی القوائم خطوط کی
مساواتیں ہیں۔

ان خطوں کو مرسم کرو جیسا کہ شکل بالا میں کیا گیا ہے اور خط لا - ۲ = ۰ پر
و ع = و ع = ۱۲۲ تقریباً قطع کرو۔

(ع) متقارب ۳ لا + ۲ لا = ۰ ہیں

یعنی لا = ۰ اور ۳ لا + ۲ لا = ۰

ان خطوں کو کیچھو (یہ بات قابل غور ہے کہ منحنی کے محور متقاربوں کے
درمیان زاویوں کی تصدیق کرتے معلوم ہوتے ہیں اور درحقیقت ہونا بھی یہی چاہئے)
(گ) لا = ۰ منحنی سے ملتا ہے جہاں

۳ لا = ۰ یا لا = ۰ سے نقاط م اور م حاصل ہوتے ہیں۔
لا = ۰ سے عجیب و غریب نتیجہ = ۰ حاصل ہوتا ہے لیکن مساوات کو

۱ = $\frac{۳-۲}{۳}$ لا - $\frac{۱}{۳}$ لا کی شکل میں لکھنے سے ہم

دیکھتے ہیں کہ لا = ۰ سے لا = ۰ حاصل ہوتا ہے یعنی منحنی محور م سے
لامتناہی فاصلہ پر ملتا ہے اس سے اس بات کی تصدیق ہوتی ہے کہ لا = ۰
ایک متقارب ہے اور یہ امر ہم پہلے بھی معلوم کر چکے ہیں۔

باب ہشتم پر متفرق مشقیں

ذیل کے زائدوں کو مرسم کرو

$$۱ - ۷ لا - ۴ لا + ۱۰ لا - ۱۰ لا + ۱۰ لا - ۳۷ = ۰$$

$$۲ - ۲ لا + ۸ لا + ۲ لا - ۲ لا - ۲ لا - ۵ = ۰$$

$$۳ - ۷ لا - ۴ لا + ۱۰ لا + ۱۰ لا + ۱۰ لا - ۶۰ = ۰$$

$$۴ - ۳ لا - ۸ لا - ۳ لا - ۳ لا - ۳ لا + ۱۲ = ۰$$

$$5 - 3 - 1 - 2 - 4 - 6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 18 - 20 - 22 - 24 - 26 - 28 - 30 - 32 - 34 - 36 - 38 - 40 - 42 - 44 - 46 - 48 - 50 - 52 - 54 - 56 - 58 - 60 - 62 - 64 - 66 - 68 - 70 - 72 - 74 - 76 - 78 - 80 - 82 - 84 - 86 - 88 - 90 - 92 - 94 - 96 - 98 - 100$$

$$6 - 4 - 2 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15 - 17 - 19 - 21 - 23 - 25 - 27 - 29 - 31 - 33 - 35 - 37 - 39 - 41 - 43 - 45 - 47 - 49 - 51 - 53 - 55 - 57 - 59 - 61 - 63 - 65 - 67 - 69 - 71 - 73 - 75 - 77 - 79 - 81 - 83 - 85 - 87 - 89 - 91 - 93 - 95 - 97 - 99$$

$$7 - 5 - 3 - 1 - 2 - 4 - 6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 18 - 20 - 22 - 24 - 26 - 28 - 30 - 32 - 34 - 36 - 38 - 40 - 42 - 44 - 46 - 48 - 50 - 52 - 54 - 56 - 58 - 60 - 62 - 64 - 66 - 68 - 70 - 72 - 74 - 76 - 78 - 80 - 82 - 84 - 86 - 88 - 90 - 92 - 94 - 96 - 98 - 100$$

$$8 - 6 - 4 - 2 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15 - 17 - 19 - 21 - 23 - 25 - 27 - 29 - 31 - 33 - 35 - 37 - 39 - 41 - 43 - 45 - 47 - 49 - 51 - 53 - 55 - 57 - 59 - 61 - 63 - 65 - 67 - 69 - 71 - 73 - 75 - 77 - 79 - 81 - 83 - 85 - 87 - 89 - 91 - 93 - 95 - 97 - 99$$



باب نہم

عام مساوات کی تحویل جبکہ اب = ۲

۱۱۶۔ عام مساوات جبکہ اب = ۲۔ باب ششم میں ہم نے عام مساوات کی ایک خاص صورت کو مستثنیٰ کر دیا تھا، اس جگہ ہم اُس مثنیٰ پر بحث کریں گے جو اس خاص صورت سے تغیر ہوتا ہے۔ ہم وہاں دیکھ چکے ہیں کہ جب اب = ۲ تو ہم کسی نئے نقطہ کو مبداء ماننے سے درجہ اول کی رقوم کو خارج نہیں کر سکتے، اس لئے جس طریقہ کا ہم نے اوپر ذکر کیا ہے اس کا اطلاق اس صورت پر نہیں ہوتا۔

جب اب = ۲ تو دوسرے درجہ کی رقیں
 $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$
 مربع کامل بناتی ہیں، فرض کرو کہ یہ مربع
 (عہ لا + بہ ما) ہے۔
 تب (ا = عہ، عہ = عہ بہ اور ب = بہ
 اور مساوات حسب ذیل ہو جاتی ہے

(عہ لا + بہ ما) + ۲ گب لا + ۲ گب ما + ج = ۰
 قبل ازیں ہم دفعہ ۵۲ میں دیکھ چکے ہیں کہ اس قسم کی مساوات قطع مکانی کو تفسیر کرتی ہے۔

۱۱۷۔ اگر عام مساوات قطع مکانی کو تفسیر کرے تو (ا) مکانی کے محور اور رأس پر کے محاس کی مساواتیں معلوم کرو گئیں (ب) اس کے دہ

خاص کا طول دریافت کرو۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر کوئی نقطہ قطع مکانی پر واقع ہو اور اس نقطہ سے دو عمود کھینچے جائیں ایک مکانی کے محور پر اور دوسرا اس کے راس پر کے ماس پر تو پہلے عمود کا مربع موخر الذکر عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے۔ پس دفعہ ہذا کے مسئلہ کو حل کرنے کے لئے ہمیں دو ایسے خط معلوم کرنے چاہئیں جو مساوات زیر بحث کے منحنی کے ساتھ مذکورہ بالا ربط رکھتے ہوں، نیز یاد رہے کہ یہ دونوں خط ایک دوسرے پر عمود وار ہونے چاہئیں۔

جب ہم ان کو معلوم کریں گے تو ترخاص کے طول کے ذریعہ منحنی کے ناپ کا اندازہ ہو سکیگا عام مساوات پر بحث کرنے سے پہلے ہم اس طریقہ کی توضیح ایک خاص مثال کے ذریعہ کریں گے۔

مثال۔ قطع مکانی ۱۶ لا۔ ۲۳ لا + ۹ ما۔ ۲۲ لا۔ ۲۳ ما + ۳۹ =۔
کا (۱) محور اور راس پر کا ماس (۲) نیز اس کے وترخاص کا طول معلوم کرو۔
(۱) مساوات بالا اس شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے

(۳ لا۔ ۳ ما) = ۲۳ لا + ۲۲ ما - ۳۹ (۱)
اب ۳ لا۔ ۳ ما اور ۲۳ لا + ۲۲ ما - ۳۹ متناسب ہیں ان عمودوں کے جو نقطہ (لا، ما) سے خطوط ۳ لا۔ ۳ ما =۔ اور ۲۳ لا + ۲۲ ما - ۳۹ =۔ پر کھینچے جائیں۔

پس مساوات (۱) سے یہ تعبیر ہوتا ہے کہ منحنی کے کسی نقطہ سے جو عمود خط ۳ لا۔ ۳ ما =۔ پر کھینچا جائے اس کا مربع اس عمود کے متناسب ہوتا ہے جو نقطہ مذکورہ سے خط ۲۳ لا + ۲۲ ما - ۳۹ =۔ پر کھینچا جائے۔
اگر یہ خط ایک دوسرے پر عمود ہوتے تو مطلوبہ خطوط یہی ہوتے (دیکھئے دفعہ ۴۴) مگر ظاہر ہے کہ یہ خط ایک دوسرے پر عمود نہیں ہیں تاہم ہم مساوات (۱) پر ذیل کا عمل کرنے سے نتیجہ مطلوبہ حاصل کر سکتے ہیں۔

مساوات (۱) کے دائیں جانب کے رکن میں ایک مقدار لہ داخل کرو،

$$\text{تب } (۴ - لا - ۳ + ما + لہ) = ۰ \dots$$

ایسا کرنے سے مساوات (۴) کے دائیں طرف

مقدار $۸ - لا - ۶ + لہ + ما$ کا اضافہ ہو جاتا ہے اس لیے ہمیں مساوات کے بائیں طرف بھی یہی مقدار جمع کرنی چاہیے تاکہ مساوات قائم رہے اس طرح ہمیں نیچے مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(۴ - لا - ۳ + ما + لہ) = (۸ + ۴۴ - لا) + (۴۲ - ۶ - لہ)$$

$$+ لہ - ۴۹$$

اب لہ کی وہ قیمت معلوم کرو جس سے خطوط $۴ - لا - ۳ + ما + لہ = ۰$ اور $۸ + ۴۴ - لا + (۴۲ - ۶ - لہ) + لہ - ۴۹ = ۰$ یکدم عمود وار ہو جائیں اس لیے لازماً

$$۴ - لا - ۳ + ما + لہ = ۰ \quad ۸ + ۴۴ - لا + (۴۲ - ۶ - لہ) + لہ - ۴۹ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۵۰ + ۵۰ - لا = ۰ \quad \text{(دیکھو حصہ اول)}$$

$$\therefore لا = ۱۰ \quad \text{دفعہ ۱۹}$$

پس مساوات زیر بحث ذیل کی شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے۔

$$(۴ - لا - ۳ + ما - لہ) = ۰ \quad ۱۲ = ۴۸ - لا + ۳۶ = ۴۸ - لا + ۳۶ + (۳ - لا + ما - لہ) \dots (ب)$$

خطوط $۴ - لا - ۳ + ما - لہ = ۰$ اور $۳ - لا + ما - لہ = ۰$ ایک دوسرے سے ناویہ قائمہ بناتے ہیں، پس مساوات (ب) اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ اگر منحنی پر کے کسی نقطہ سے خط $۴ - لا - ۳ + ما - لہ = ۰$ پر عمود کھینچا جائے تو اس عمود کا مربع اس عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے جو نقطہ مذکورہ سے خط $۳ - لا + ما - لہ = ۰$ پر (جو اول الذکر خط پر عمود وار ہے) کھینچا جائے۔ پس (دفعہ ۴۱) $۴ - لا - ۳ + ما - لہ = ۰$ منحنی کا محور ہے اور $۳ - لا + ما - لہ = ۰$ اس پر کا مماس ہے۔

انتباہ - بالعموم طالب علم کے لئے یہ تمیز کرنا مشکل ہوتا ہے کہ ان دونوں مساواتوں میں سے کونسی مساوات محور کو تعبیر کرتی ہے اور کونسی رأس پر کے مماس کو۔ یہ دقت مساوات زیر بحث کا مساوات $ما = ۴ - لا$ کے ساتھ مقابلہ کرنے سے رفع ہو سکتی ہے جس میں صریحاً $ما =$ (یعنی لا کا محور)

منفی کا محور ہوتا ہے، پس مربع والی رقم منفی کے محور کو تعبیر کرتی ہے۔

(ب) $۴ - لا - ۳ - ما - ۱ = ۰$ پر کے عمود کا مربع

$$(۴ - لا - ۳ - ما - ۱)^۲$$

۲۵

ہے اور $۳ - لا + ۴ - ما - ۲ = ۰$ پر کے عمود کا طول

$$\frac{۳ - لا + ۴ - ما - ۲}{۵} \text{ ہے۔}$$

پس وتر خاص ۲ یا ۴ مساوات

$$(۴ - لا - ۳ - ما - ۱)^۲ = ۲ \times \frac{۳ - لا + ۴ - ما - ۲}{۵} \dots\dots\dots (ج)$$

سے حاصل ہوتا ہے، لیکن چونکہ (لا، ما) منفی پر واقع ہے اس لئے

$$(۴ - لا - ۳ - ما - ۱)^۲ = ۱۲ (۳ - لا + ۴ - ما - ۲) \dots\dots\dots (ب)$$

(ج) اور (ب) سے بہ عمل تقسیم

$$\frac{۱۲}{۲۵} = ۲ \times \frac{۱}{۵}$$

۲۵ وتر خاص =

چونکہ $(۴ - لا - ۳ - ما - ۱)$ مثبت ہے اس لئے منفی پر کے سب نقطوں کے

مقدار $۳ - لا + ۴ - ما - ۲$ مثبت ہوگی، پس منفی راس پر کے ماس

$۳ - لا + ۴ - ما - ۲ = ۰$ کے اس طرف واقع ہے جس طرف کے سب نقطوں

کے لئے مقدار $۳ - لا + ۴ - ما - ۲$ مثبت ہوتی ہے۔

لیکن مبداء $۳ - لا + ۴ - ما - ۲ = ۰$ کے اس طرف واقع ہے جس طرف کے لئے

مقدار $۳ - لا + ۴ - ما - ۲$ منفی ہے (دیکھو حصہ اول دفعہ ۱۳)

پس مبداء اور منفی خط $۳ - لا + ۴ - ما - ۲ = ۰$ کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں،

یہ آخری نتیجہ بہت مفید ثابت ہوگا جب ہم قطع مکانی کو مرسم کریں گے۔

انتباہ۔ اگر منفی کی مساوات (ب)

اس شکل (۳-۱-۱) = ۲-۱۲ (۳+۱-۱-۱) میں نکلتی تو منہجی پر کے سب نقطوں کے لئے مقدار = ۱۲ (۳+۱-۱-۱) لازماً ثابت ہوتی یعنی مقدار ۳+۱-۱-۱ منہجی ہوتی، اس صورت میں منہجی اور مبدا دونوں خط ۳+۱-۱-۱ = ۰ کے ایک ہی طرف واقع ہوتے۔

اس امر کے متعلق فریڈریشا لیں باب آئندہ میں دی جائیں گی۔
اس مندرجہ طالب علم کو باب ہذا کے اختتام کی پہلی سات مثالیں حل کرنی چاہئیں۔
۱۱۸۔ عام صورت۔ عام مساوات کو اس شکل

(عہ لا + بہ ما) = ۲-۲ گ لا-۲ ف ما-ج
میں لکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر منہجی کے کسی نقطہ سے خط عہ لا + بہ ما = ۰ پر عمود کھینچا جائے تو اس عمود کا مربع اس عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے جو نقطہ مذکورہ سے خط ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ پر کھینچا جائے (دیکھو دفات ۵۱، ۵۲)

اگر یہ دونوں خط ایک دوسرے پر عمود دار ہوتے تو یہ مطلوبہ خلیوں کو تعبیر کرتے، لیکن بالعموم یہ علی القوائم نہیں ہوتے، اس لئے ہم مساوات ذیل کو اس شکل میں لکھتے ہیں

$$(عہ لا + بہ ما + لہ) = (۲-۲ گ لا-۲ ف ما-ج) + (۲ عہ لہ لا + ۲ بہ لہ ما + لہ) \\ = (۲ لا-۲ گ-عہ لہ) - (۲ ما-۲ ف-بہ لہ) - (ج+لہ)$$

اور دیکھتے ہیں کہ خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ پر کے عمود

کا مربع ۲ لا-۲ گ-عہ لہ + ۲ ما-۲ ف-بہ لہ + ج-لہ = ۰ پر کے عمود کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لئے اب ہم لہ کی وہ قیمت معلوم کرتے ہیں جس سے یہ خط ایک دوسرے پر عمود دار ہو جائیں اس کے لئے یہ شرط پوری ہونی چاہئے

$$عہ (گ-عہ لہ) + بہ (ف-بہ لہ) = -یا لہ = \frac{عہ گ + بہ ف}{عہ + بہ}$$

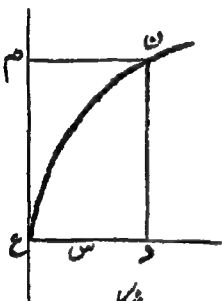
جب لہ کی قیمت یہ ہو تو عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ پر کے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے

$$۲(لا(گ - عہ لہ) + ۲(ا(ن - بہ لہ) + ج - لہ = ۰$$

پر کے عمود کا طول -

اور یہ دو خط ایک دوسرے پر عمود وار ہیں، اس لئے مساوات زیر بحث قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے جسکا محور پہلے خط سے تعبیر ہوتا ہے اور اس پر کا ماس دوسرے خط سے -

انتباہ - جب طالب علم مذکورہ بالا طریقہ کا اطلاق کسی خاص مثال پر کرنے لگے تو اس کو چاہئے کہ محض ضابطے استعمال کرنے کی بجائے عام سلک استدلال سے کام لے -



۱۹ - مذکورہ بالا منحنی کا وتر خاص معلوم کرنا -

منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس میں سے گزرنے والے ماس پر عمود ن م کھینچا گیا ہے، نیز ن میں سے محور پر عمود ن د نکالا گیا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ

ن د = ۲ ل x ن م جہاں ۲ ل وتر خاص کو تعبیر کرتا ہے اوپر کی مساواتوں کو استعمال کرنے سے

$$ن د = \frac{عہ لا + بہ ما + لہ}{۲ عہ + ۲ بہ}$$

$$ن م = \frac{۲(لا(گ - عہ لہ) + ۲(ا(ن - بہ لہ) + ج - لہ}{۲(ا(گ - عہ لہ) + ۲(ا(ن - بہ لہ)}$$

$$اور لہ = \frac{عہ گ + بہ ن}{عہ + بہ}$$

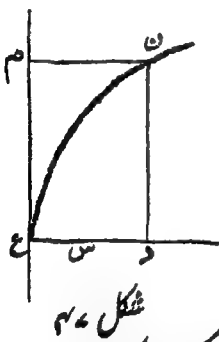
جب لہ کی قیمت یہ ہو تو عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ پر کے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے

$$۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ن - بہ لہ) + ج - لہ = ۰$$

پر کے عمود کا طول -

اور یہ دو خط ایک دوسرے پر عمود دار ہیں، اس لئے مساوات زیر بحث قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور پہلے خط سے تعبیر ہوتا ہے اور اس پر کا ماس دوسرے خط سے -

انتباہ - جب طالب علم مذکورہ بالا طریقہ کا اطلاق کسی خاص مثال پر کرنے لگے تو اس کو چاہئے کہ محض ضابطے استعمال کرنے کی بجائے عام سلک استدلال سے کام لے -



۱۹ - مذکورہ بالا منحنی کا وتر خاص معلوم کرنا -

منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے اور رأس میں سے گزرنے والے ماس پر عمود ن م کھینچا گیا ہے، نیز ن میں سے محور پر عمود ن د نکالا گیا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ

ن د = ل ۲ x ن م جہاں ل ۲ وتر خاص کو تعبیر کرتا ہے اوپر کی مساواتوں کو استعمال کرنے سے

$$ن د = \frac{عہ لا + بہ ما + لہ}{ما عہ + لہ}$$

$$ن م = \frac{۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ن - بہ لہ) + ج - لہ}{۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ن - بہ لہ)}$$

$$اور لہ = \frac{عہ گ + بہ ن}{عہ + لہ}$$

$$\therefore (عہ لا + بہ ما + لہ) = ۲ ل \quad ۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ن - بہ لہ) + ج - لہ$$

$$عہ + بہ$$

$$۲ ما گ - عہ لہ + (ن - بہ لہ)$$

لیکن چونکہ لا، مانخی پر ہے، اسلئے

$$(عہ لا + بہ ما + لہ) = ۲ لا (گ - عہ لہ)$$

$$۲ ما (ن - بہ لہ) - ج + لہ$$

ہذا تقسیم کرنے سے

$$۲ ل = ۲ لا (گ - عہ لہ) + (ن - بہ لہ)$$

$$عہ + بہ$$

$$جہاں لہ = \frac{عہ گ + بہ ف}{عہ + بہ}$$

(علامت کی تشخیص ضروری نہیں کیونکہ ہمیں محض وتر خاص سے طول سے سروکار ہے۔)

$$اب (گ - عہ لہ) + (ن - بہ لہ) =$$

$$= گ + ن - لہ (عہ گ + بہ ف) + لہ (عہ + بہ)$$

$$- (عہ گ + بہ ف)$$

$$= \frac{(گ + ن) (عہ + بہ) - (عہ گ + بہ ف)}{عہ + بہ}$$

[کیونکہ لہ (عہ + بہ) - (عہ گ + بہ ف) =]

$$= \frac{(عہ ف - بہ گ)}{عہ + بہ}$$

$$\therefore ۲ ل = \frac{(عہ ف - بہ گ) (عہ + بہ)}{(عہ + بہ)}$$

$$= \frac{۲(عہف - بہگ)}{عہ + بہ} =$$

لیکن عہ = ۱ اور بہ = ۱

$$= \frac{۲(ف - گ)}{۱ + ۱} = ۱$$

ایک حد تک پورے عمل کا اعادہ کرنے کے لئے اوپر ہم نے ضرورت سے زیادہ وضاحت سے کام لیا ہے، ورنہ یہ از خود عیاں ہے کہ جو فعال پہلے لکھے گئے ہیں ان کے شمار کنندے مساوی ہیں لہذا ان کو لکھنے کے بغیر ہی کاٹ دیا جاسکتا ہے۔

۱۲۰۔ مستثنیٰ صورت

قطع مکانی کی عام مساوات پر بحث کرتے وقت ہم نے دیکھا کہ معنی پر کے کسی نقطہ کے لئے

$$(عہ لا + بہ ما + لہ) = ۲ لا (گ - عہ لہ) - ۲ ما (ف - بہ لہ) - ج + لہ$$

اور دو خطوط مستقیم

عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ اور ۲ لا (گ - عہ لہ) + ۲ ما (ف - بہ لہ) + ج - لہ = ۰ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اگر

$$لہ = \frac{عہ گ + بہ ف}{عہ + بہ}$$

اب اگر $\frac{ف}{عہ} = \frac{گ}{بہ}$ تو ان میں سے ہر ایک = $\frac{عہ گ + بہ ف}{عہ + بہ} = لہ$

گ - عہ لہ = ۰ اور ف - بہ لہ = ۰

اس لئے بائیں طرف کا رکن مستقل ہو جاتا ہے اور ثبوت کا باقی حصہ درست نہیں رہتا۔ اس لئے اس صورت میں

$$(عہ لا + بہ ما + لہ) = لہ - ج$$

$$یا عہ لا + بہ ما + لہ = لہ - ج$$

جس سے صریحاً دو متوازی خط تعمیر ہوتے ہیں۔

پس مساوات ۱۲ لا + ۲ ما + ۲ ب + ۲ گ لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰
سے دو متوازی خطوط مستقیم تعمیر ہوتے ہیں اگر

$$۱۲ ب = ۶$$

$$۱۲ ب = ۶$$

$$۱۲ ب = ۶$$

یہ صورت محض دیکھنے سے ہی پہچانی جاسکتی ہے کیونکہ

$$۱۲ ب = ۶$$

کسی عددی جزو ضربی سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے اور مساوات کی شکل یہ ہوتی ہے

$$(عہ لا + بہ ما) + ۲ ف = (عہ لا + بہ ما) + ج = ۰$$

اوپر کی مساوات درج دوم کو حل کرنے سے عہ لا + بہ ما کی دو قیمتیں ملتی ہیں جن سے دو متوازی خطوط مستقیم حاصل ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر علاوہ ازاں $۱۲ ب = ۶$ ج تو دونوں خطوط مستقیم ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔

مثال۔ معلوم کرو کہ مساوات

$$۹ لا + ۲ ما + ۲ ب + ۲ گ لا + ۲ ف + ۲ ج = ۰$$

سے کیا تعمیر ہوتا ہے۔

یہ مساوات یوں بھی لکھی جاسکتی ہے۔

$$(۳ لا + ۲ ما) - ۹ لا - ۱۲ ب + ۲ ج = ۰$$

اور اسلئے باب ہذا کے مضمون کے تحت میں آتی ہے۔

چونکہ $9 لا + ۱۲ ما = ۳ (۳ لا + ۴ ما)$ اس لئے اس مساوات کو اور بھی مختصر کیا جاسکتا ہے اور یہ ہو جاتی ہے

$$(۳ لا + ۴ ما) - ۳ (۳ لا + ۴ ما) + ۲ = ۰$$

$$یا (۳ لا + ۴ ما - ۳ لا - ۴ ما) = ۰$$

پس مساوات بالا سے دو متوازی خطوط مستقیم تعمیر ہوئے ہیں

$$۳ لا + ۴ ما - ۲ = ۰ \text{ اور } ۳ لا + ۴ ما - ۱ = ۰$$

اگر ہم ایسے عمل کرتے جیسے قطع مکانی کی صورت میں کرتے ہیں تو بعضی بالآخر ایسی نتیجہ پر پہنچتے لیکن ربط مذکور کو شاہدہ کر لینے سے ہمارے عمل میں بہت اختصار ہو جاتا ہے۔

باب نہم متفرق مثالیں

ذیل کے مکافیوں میں سے ہر ایک کا مختار اور رائس پر کا محاسب معلوم کرو

$$۱ - ما = ۲ لا + ما$$

$$۲ - ما = ۳ لا + ۱$$

$$۳ - (لا + ما) = ۳ (لا - ما + ۱)$$

$$۳ - لا = ۱ + ما + ۱$$

$$۵ - (لا + ما) = لا + ما + ۵ = ۰$$

$$۶ - لا + ما = ۲ لا + ما + ۱۶ - ما - ۹۸ = ۰$$

۷۔ اوپر کے مکافیوں کے وتر خاص بھی معلوم کرو
ذیل کی مساواتوں سے جو منفی تعمیر ہوئے ہیں ان پر بحث کرو۔

$$۸ - لا + ۲ لا + ما = ما$$

$$۹ - لا - ۲ لا + ما + ۱ - لا - ۱ + ما + ۶ = ۰$$

$$۱۰ - (۲ لا + ۱) + (۲ لا + ۱) + (۲ لا + ۱) = ۰ \text{ جہاں } \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$۱۱ - ۲ لا + ۲ لا + ما + ما + ۲ لا + ۱ + ما = ۰$$

$$۱۲ - ثابت کرو کہ مساوات (ع) لا + ۲ (ب) + ۲ (گ) + ۲ (ف) + ج = ۰$$

دو متوازی خطوط مستقیم کو تعمیر کرتی ہے اگر عہ ف - ب گ = ۰

اس امر کی تصدیق کرو کہ اس صورت میں شرط

ا ب ج + ۲ ف گ - ۱ ف - ب گ - ج = ۰ پوری ہوتی ہے۔

نوٹ - اشلہ آتا کے نتائج باب دہم کی مشقوں کے حل کرنے میں کارآمد ہوئے۔

باب دہم

مکافیوں کی ترسیم

۱۲۱۔ اب ہم باب گذشتہ کے طریقوں کو مکافیوں کے ترسیم کرنے میں استعمال کر چکے جبکہ ان کی مساواتیں معلوم ہوں۔ اگر عام مساوات
 $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$

قطع مکانی کو تعبیر کرے تو $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$
 اس امر کا اطمینان کر لینے کے بعد ہم باب گذشتہ کے طریقوں کی مدد سے
 اس پر کام لیں۔ محور اور وتر خاصہ معلوم کر لیتے ہیں اس کے بعد منحنی کی ترسیم میں کوئی وقت
 باقی نہیں رہتی لیکن تصدیق کے طور پر ہمیں ہمیشہ منحنی پر کے چند نقطے معلوم
 کر لینے چاہئیں مثلاً وہ نقطے جہاں مکانی حوالہ کے محوروں کو قطع کرتا ہے۔
 اگر یہ نقطے خیالی ہوں تو یا سانی کوئی اور خط معلوم ہو سکتا ہے جس سے
 مکانی مذکور حقیقی نقطوں پر ملتا ہو۔

مثال ۱۔ جس منحنی کی مساوات حسب ذیل ہے اسے ترسیم کرو

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

(۱) یہاں $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$ لہذا منحنی مکانی ہے۔

(ب) اگر منحنی پر کے کسی نقطہ سے ایک عمود خط $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$ پر کھینچا جائے اور
 دوسرا عمود خط $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$ پر کھینچا جائے تو پہلے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے
 جیسے دوسرے عمود کا طول کیونکہ

$$(۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵)$$

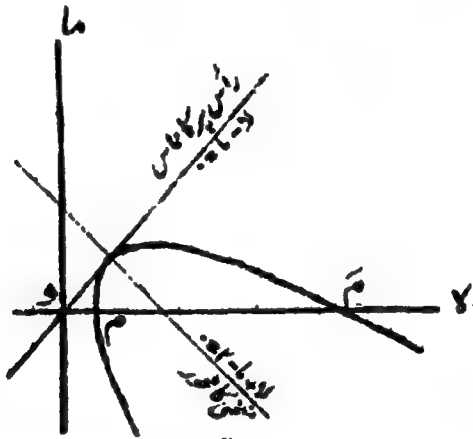
یہ دو خط ایک دوسرے پر عمود دار نہیں ہیں، لیکن مساوات حسب ذیل شکل میں بھی

لکھی جاسکتی ہے

$$\begin{aligned} (لا + ما + لہ) &= (لا + ۶ + لہ) + (ما + ۲ + لہ) - ۳ + لہ \\ \text{اور خط } لا + ما + لہ &= ۰ \text{ اور } لا + ۶ + لہ + (ما + ۲ + لہ) - ۳ + لہ = ۰ \\ \text{ایک دوسرے پر عمود وار ہوں گے اگر} \\ ۶ + لہ + ۲ + لہ &= ۰ \end{aligned}$$

یعنی اگر $لہ = -۲$

$$\begin{aligned} (ج) \text{ پس } (لا + ما - ۲) &= ۲ (لا - ما) \dots\dots\dots (۱) \\ \text{اور خط } لا + ما - ۲ &= ۰ \text{ اور } لا - ما = ۰ \text{ ایک دوسرے پر عمود وار ہیں} \\ \text{ما} &= ۴ \text{ اور } لا کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ} \\ لا + ما - ۲ &= ۰ \text{ محور ہے اور } لا - ما = ۰ \text{ راس پر کا محاس ہے۔} \end{aligned}$$



شکل ۴۸

$$\begin{aligned} (د) \text{ دیرخص } ۴ \text{ و مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے} \\ (لا + ما - ۲ = ۰ \text{ پر کا عمود}) \text{ و } ۴ \text{ و } (لا - ما = ۰ \text{ پر کا عمود}) \end{aligned}$$

$$یا \quad \frac{(لا + ما - ۲)}{\sqrt{1+1}} = \frac{۴}{\sqrt{1+1}}$$

$$۴ = ۴ \text{ و } ۴ = ۴ \text{ کیونکہ } (لا + ما - ۲) = ۴ \text{ و } (لا - ما) = ۴$$

(ع) مساوات (۱) کے دائیں جانب کا رکن مربع ہونے کی وجہ سے مثبت ہے پس منحنی بالتمام حماس لا۔ ما۔ کے اُس طرف واقع ہے جس طرف لا۔ ما۔ مثبت ہے یعنی جس طرف کہ لا۔ ما۔ اور صریحا یہ حماس کے نیچے کی جانب ہے (ف) یہ منحنی لا۔ سے جن نقطوں پر ملتا ہے ان کے لئے مساوات

$$ما^2 - ۲ + ۴ = ۰$$

پوری ہوتی ہے، جس سے ظاہر ہے کہ ما خیالی ہے پس منحنی ما کے محور سے نہیں ملتا۔

یہ ما۔ سے ملتا ہے جہاں

$$لا^2 - ۶ لا + ۴ = ۰ \text{ یا } لا = ۳ \pm ۵ = ۵ \text{ یا } ۱۲۴ = ۵۱۵۶ \text{ تقریباً}$$

شکل میں ان طولوں کے جواب میں نقاط صم، صم حاصل ہوتے ہیں۔
 انتہاء۔ نظری طور پر جب ہمیں وتر خاص کا طول معلوم ہو جائے اور محور اور اس پر کے حماس کی سہا اُنیں بھی حاصل ہو جائیں تو ہمارے پاس منحنی مہر قسم کرنے کے لئے کافی مواد موجود ہو جاتا ہے لیکن عملی طور پر یہ زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ وتر خاص کے طول سے قطع نظر کر کے منحنی پر چند اور موزوں نقاط معلوم کر لئے جائیں جیسا کہ اوپر (ف) میں کیا گیا ہے۔

یہ امر کہ منحنی اپنے محور کے لحاظ سے متشاکل ہے بہت ضروری اور مفید ہے لیکن منحنی کے ناپ کا اچھا اندازہ لگانے کے لئے ترسیم بنانے سے پہلے اس پر بہت سے نقطوں کے نشان لگالینے چاہئیں۔

مثال ۲۔ منحنی لا۔ ۲ لا + ما۔ ۲ لا۔ ۲ + ۴ = ۰ کو مرسم کرو

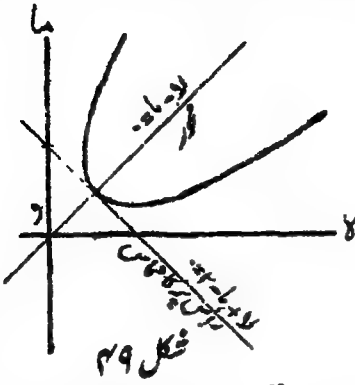
(۱) یہاں اب۔ صم = ۱ - ۱ = ۰ پس منحنی قطع مکانی ہے۔

مساوات بالا حسب ذیل شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے

$$(لا - ما)^2 = ۲ (لا + ما - ۲)$$

جس سے ظاہر ہے کہ لا۔ ما۔ پر کے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے

$$لا + ما + ۲ = ۰ \text{ پر کا عمود}$$



یہ خط پہلے ہی ایک دوسرے پر عمود وار ہیں اس لئے ہم فوراً یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ منحنی کا محور لا-ما = ۰ ہے اور رأس پر کا ماس لا+ما = ۲ ہے۔

(ج) مزید برآں منحنی موخر الذکر خط کے اُس طرف واقع ہے جس طرف کے لئے

لا+ما-۲ مثبت ہے اور مبدا اس طرف واقع ہے جس طرف کے لئے لا+ما-۲ منفی ہے۔ باعظاظ دیگر مبدا اور منحنی خط لا+ما-۲ = ۰ کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

(د) وتر خاص ۴ کا طول معلوم کرنے کے لئے مساوات ذیل ہے
(لا-ما = ۰ پر کا عمود) = ۴ (لا+ما-۲ = ۰ پر کا عمود)

$$\text{یعنی } \left(\frac{\text{لا-ما}}{۲} \right) = ۴ \text{ اور } \frac{\text{لا+ما-۲}}{۲}$$

لیکن منحنی کی مساوات کی رو سے (لا-ما) = ۲ (لا+ما-۲) اس لئے ۴ = ۲ اور یہ وتر خاص کا طول ہے

(ع) یہ بھی آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ حوالہ کے محور منحنی سے خیالی نقطوں پر ملتے ہیں۔

پس ہمیں منحنی پر کے وہ نقطے معلوم کرنے چاہئیں جہاں کوئی اور موزوں خط منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتے ہوں۔ چونکہ اُس نقطہ (۱، ۱)

پر ہے (جو خط لا-ما = ۰ اور لا+ما-۲ = ۰ کا نقطہ تقاطع ہے) اس لئے ظاہر ہے کہ جب لا < ۱ تو حقیقی ہوگا۔ پس ہم منحنی پر

جتنے نقطے چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً لا = ۱، ما = ۱ یا ۳ اسی طرح لا = ۲ سے ما = ۳ ± ۵ وغیرہ وغیرہ اور منحنی کو مرتب کرنے سے قبل ہمیں شکل میں ان نقطوں کا مقام معلوم کر لینا چاہئے۔

باب دہم پر متفرق مثالیں

۱۔ باب نہم کی تمام مشقوں کے مکانی مرتبہ کر دو
ذیل کے سب مکانیوں کو مرتبہ کر دو اور ان کے محور، راس پر کے تماس اور وتر خاص معلوم کرو

$$۲۔ ۴ لا - ۳ لا ۶ + ۶ لا ۲ + ۲ لا - ۶ ۲۶ + ۹ = ۰$$

$$۳۔ ۴ لا + ۶ لا ۶ + ۶ لا ۹ + ۶ لا ۱۵ - ۱۵ لا - ۶ ۵ + ۱۲۵ = ۰$$

$$۴۔ ۴ لا + ۱۲ لا ۶ + ۶ لا ۹ - ۲ لا + ۶ ۱۰ + ۲۱ = ۰$$

$$۵۔ ۲۵ لا - ۴ لا ۶ + ۶ لا ۱۶ + ۶ لا ۵۲ - ۱۶ لا - ۶ ۱۷ + ۱۶ = ۰$$

$$۶۔ ۷ لا + ۶ لا ۹ + ۲ لا ۲۳ + ۲ لا + ۶ ۱۱ + ۱۲ = ۰$$



باب یازدہم

مخروطی تراشوں کا ان کی مساواتوں سے مرسم کرنا

۱۲۲۔ اس باب میں ہم ان اصولوں کی مدد سے جواب ششم اور باب ہفتم میں بیان ہو چکے ہیں درجہ دوم کے مخنیات کو مرسم کرنے کے متعلق چند متفرق مثالیں حل کریں گے۔

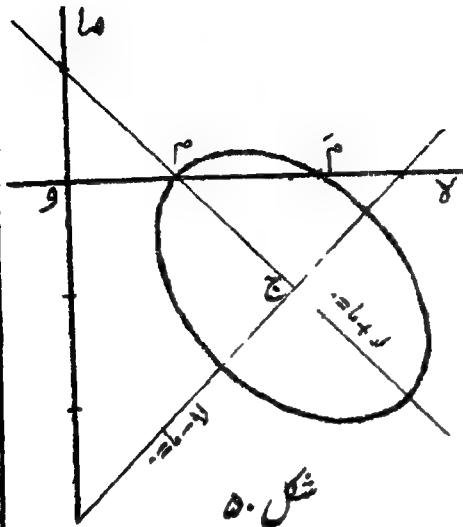
اگرچہ ہر ایک مخنی جس کی مساوات دی ہوئی ہو ہمیشہ مرسم ہو سکتا ہے کیونکہ اس پر جتنے نقطے ہم چاہیں معلوم کر سکتے ہیں لیکن محض اسی بناء پر عمل کرنا نہایت مشکل اور وقت طلب ہوتا ہے مثلاً ظاہر ہے کہ اگر قطع زائد کو ہم صحیح طور پر مرسم کرنا چاہیں تو اس کے لئے ہمیں بہت سے نقطے مرسم کرنے کی ضرورت ہوگی پس عملی طور پر مخنی کی شکل اور ناپ کا ہیئت مجموعی اندازہ لگانے کے لئے ابواب گذشتہ کے اصولوں کا استعمال کرنا زیادہ مناسب ہوتا ہے۔

۱۲۳۔ شروع میں ہم چند عام اشارات درج کریں گے جن کو ابواب ششم و ہفتم کا خلاصہ تصور کیا جاسکتا ہے اور بعد میں ہم کسی حد تک ابواب ہفتم و ہشتم و دہم کا بھی اعادہ کریں گے۔

فرض کرو کہ مساوات حسب معمول

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

ہے تب مخنی کو مرسم کرنے کے لئے ذیل کا طریقہ اختیار کیا جاسکتا ہے
(۱) اب۔ x^2 کی قیمت سے مخنی کی نوعیت معلوم کرو، ہم جانتے ہیں کہ اب۔ x^2 کی قیمت ناقص کے لئے مثبت، مکانی کے لئے صفر اور



جن سے لا = ۲، ما = ۱
مرکز کے لحاظ سے
منحنی کی مساوات
حاصل کرنے کے لئے
ہم درجہ اول کی رقوموں
میں مرکز کے نصف
مقدار مندرج کرتے ہیں
اس طرح سے مساوات
ہو جاتی ہے

$$\begin{aligned} & ۲ + لا + ما = لا + ما + ما = ۲ + ۱ \times ۲ = ۴ + (۱ - \frac{1}{4}) = ۳ + \frac{3}{4} \\ & یا ۲ + لا + ما = ۴ + ما = ۸ یعنی \frac{3}{4} لا + \frac{2}{4} لا + ما = ۴ + ما = ۱ \\ & اب نصف محور مساوات ذیل سے حاصل ہوئے ہیں \\ & \frac{3}{4} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) \\ & یا \frac{3}{4} = (\frac{1}{4} - \frac{3}{4}) (\frac{1}{4} - \frac{3}{4}) \\ & یا \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ & جس سے \frac{1}{4} = ایا \frac{1}{4} یعنی ر = ایا ما = ۲ \\ & محور اصغر کی مساوات (جبکہ مرکز کو بدلا مانا جائے) یہ ہے \\ & (\frac{3}{4} - ۱) لا + \frac{1}{4} ما = ۰ یعنی لا = ما = ۰ \\ & اور محور اعظم کی مساوات$$

(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}) لا + \frac{1}{4} ما = ۰ یعنی لا + ما = ۰ ہے
ولا کے ساتھ تقاطع تقاطع ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتے ہیں
۲ + لا + ۲ = ۴ + ما = ۰ یعنی لا = ایا \frac{3}{4} \\ (یہ تقاطع شکل میں م، م سے دکھائے گئے ہیں)
یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ وہاں منحنی سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔

لہذا مرکز کا نشان لگانے کے بعد نصف محوروں کو کھینچنے اور دلا کے ساتھ جو تقاطع نقاط میں انکو ملحوظ رکھنے سے منحنی مطلوبہ آسانی سے کھینچ سکتا ہے۔
طالب علم دیکھے کہ محور اعظم کا ایک سرا دلا پر ہے۔

مثال ۲۔ جو منحنی مساوات

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 = 144$$

سے تعبیر ہوتا ہے اس کو مرتبہ کرو۔

چونکہ یہاں $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$ اس لئے مساوات سے قطع مکانی تعبیر ہوتا ہے۔ مساوات بالاکو شکل

$$(3x - 4y)^2 = 144$$

میں لکھنے سے اور حسب معمول لہ داخل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(3x - 4y) = \pm 12 \Rightarrow 3x - 4y = 12 \text{ یا } 3x - 4y = -12$$

اور دو خطوط $3x - 4y = 12$ اور $3x - 4y = -12$ ۔ درجہ اولیٰ (۱)۔ $3x - 4y = 12$ اور $3x - 4y = -12$ ۔
علی القوانم ہوں گے اگر

$$3x - 4y = 12 \Rightarrow 3x = 4y + 12 \Rightarrow x = \frac{4y + 12}{3}$$

پس محور کی مساوات $3x - 4y = 12$ ہے اور اس پر کا محاس

$$x = \frac{4y + 12}{3} \Rightarrow 3x = 4y + 12 \Rightarrow 3x - 4y = 12$$

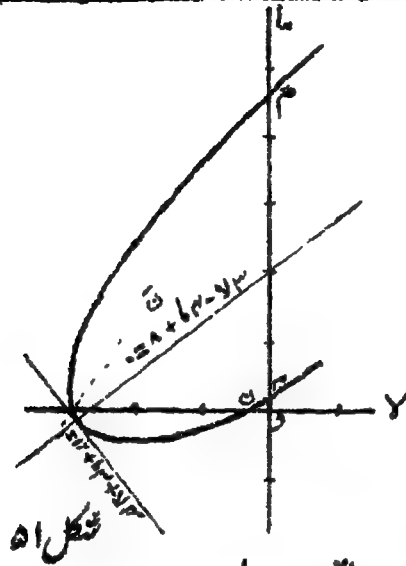
پس مساوات کی آخری شکل یہ ہے $(3x - 4y)^2 = 144$ ۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ منحنی بالتمامہ اس پر کے محاس $3x - 4y = 12$ کی شبیہت جانب (یعنی بساواں برائے) واقع ہے۔ اس امر کی تصدیق آتی تقاطع کو دیکھنے سے بھی ہو سکتی ہے جہاں منحنی محوروں سے ملتا ہے۔

دتر خاص حاصل کرنے کی مساوات $(3x - 4y)^2 = 144$ ہے

$$(3x - 4y)^2 = 144 \Rightarrow 3x - 4y = \pm 12$$

$$\frac{3x - 4y}{12} = \pm 1$$



جہاں یہ منحنی محور x سے ملتا ہے وہاں

$$0 = 9x^2 + 32x + 14$$

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \times 9 \times 14}}{2 \times 9}$$

$= -6$ یا -9 تقریباً (شکل میں نقاط N اور N')
جہاں یہ محور y سے ملتا ہے وہاں

$$0 = 4x^2 + 16x + 12$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \times 4 \times 12}}{2 \times 4}$$

$= -2$ یا -5 (شکل میں نقاط M اور M')
ماس اور محور سمجھنے اور ان نقاط کو معلوم کر لینے کے بعد جہاں
یہ محوروں سے ملتا ہے ہم منحنی کی خاصی درست ترسیم حاصل کر سکتے

ہیں۔
مثال ۳۔ جو منحنی مساوات

$$y^2 - 2x^2 - 6x - 4y - 6 = 0$$

سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مترس کرو۔
یہاں اوب۔ ۲ معنی ہے اس لئے معنی قطع زائد ہے۔
چونکہ یہاں ۲ = ۱ - ۱/۲ = ۱/۲، ب = ۲، گ = ۳، ف = ۴، ج = ۵۔
اس لئے مرکز کے محدود حاصل کرنے کی مساواتیں

$$۲ - لا - ۱/۲ = ۳ - اور - ۱/۲ - لا - ۲ = ۴ - ۱/۲ = ۵$$

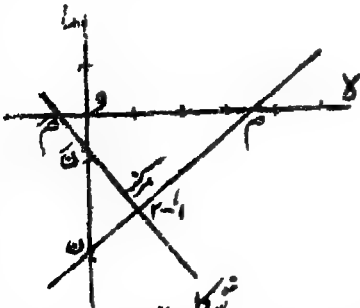
ہیں جن سے لا = ۱، ۱/۲ = ۲۔
اگر مبدأ کو مرکز پر منتقل کیا جائے تو مساوات بالا ہو جاتی ہے۔

$$۲ - لا - ۱/۲ = لا - ۱/۲ - ۱ = ۲ - (۱ - ۱/۲) = ۳ - یا ۲ - لا - ۱/۲ = لا - ۱/۲ = ۴ -$$

لہذا مساوات زیر بحث دو علی القوانم خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔
انتباہ۔ اگر عمل کے دوران میں معلوم ہو جائے کہ معنی
دو علی القوانم خطوط مستقیم میں تحول ہو جاتا ہے تو ہمیں فوراً اس امر کی
تصدیق خطوط مستقیم کی جانچ کرنے والے طریقہ سے کرنی چاہئے یعنی
دیکھ لینا چاہئے کہ مقدار اوب ج + ۲ ف گ ھ۔ اوب ب گ ج ھ
صفر ہو جاتی ہے یا نہیں۔ یہاں مقدار مندرجہ بالا کی قیمت

$$۲ = (۲ - ۱/۲) + (۳ - ۱/۲) - (۴ - ۱/۲) - (۵ - ۱/۲) = (۳ - ۱/۲) - (۴ - ۱/۲) - (۵ - ۱/۲) = ۳ - ۱/۲ - ۴ + ۱/۲ - ۵ + ۱/۲ = ۳ - ۴ - ۵ + ۱/۲ = -۶ + ۱/۲ = -۱۱/۲$$

$$- (۳ - ۱/۲) -$$



شکل ۵۲

$$= ۱ + ۱۸ + ۲۳ \frac{۱}{۲} - ۱۰ \frac{۱}{۲} - ۱۶ =$$

اس سے عمل بالا کی صحت کی تصدیق ہوتی ہے۔
جہاں معنی محور و لا سے ملتا ہے وہاں

$$= ۲ - لا - ۱/۲ = ۴ -$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$= 5.35 \text{ یا } -5.35 \text{ تقریباً (نقاط ص اور م)}$$

جہاں یہ محور و ما سے ملتا ہے وہاں

$$= 2 + 6 + 2 = 10$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = -2.35 \text{، تقریباً (شکل میں نقاط 'ن'، 'ن')}$$

پس مساوات زیر بحث دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو ایک دوسرے کو نقطہ (۱-۲) پر قطع کرتے ہیں۔ پس اس نقطہ کو ہر دو محاور اور منحنی کے تقاطع تقاطع کے ساتھ ملانے سے منحنی مطلوبہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۴۔ جو منحنی مساوات

$$25 = (2 - 6 + 2) + (1 + 6 - 2)$$

سے تعبیر ہوتا ہے اسے مرسم کرو

ہم دیکھتے ہیں کہ دو خطوط مستقیم

$$2 + 6 - 2 = 6 \text{ اور } 1 + 6 - 2 = 5$$

ایک دوسرے پر عمود ہیں اور خطوط دھدانی کے اندر کے جملات ان عمودوں کے متناسب ہیں جو منحنی کے کسی نقطہ (۱، ۲) سے ان دو خطوط مستقیم پر جو جملوں سے تعبیر ہوتے ہیں نکالے جائیں۔

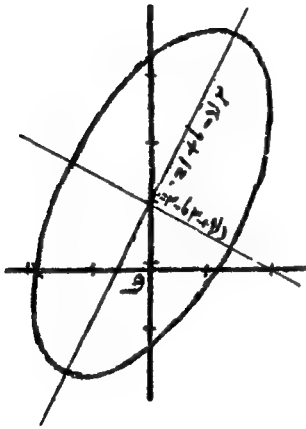
خطوط دھدانی کے اندر کے جملوں کو عمودوں کے فی الحقیقت

$$\text{مساوی بنانے سے } \left(\frac{2 - 6 + 2}{5} \right) + \left(\frac{1 + 6 - 2}{5} \right) = 5$$

$$9 = \frac{25}{5} =$$

$$\left. \begin{aligned} &= 2 - 6 + 2 \\ &= 1 + 6 - 2 \end{aligned} \right\} \text{ پس اگر ہم } (1) \dots \dots \dots$$

کو بالترتیب لا اور ما کا محور فرض کریں تو مساوات بالا کے یہ معنی ہیں کہ
(ن سے لا کے محور پر کا عمود) + (ن سے ما کے محور پر کا عمود) = ۱



یہ صریحاً قطع ناقص ہے جس کے
محور خطوط (۱) سے تعبیر ہوتے ہیں
اور جس کے نصف محوروں کے طول
بالترتیب ۳ اور $\frac{۳}{۲}$ ہیں۔

$$\text{انتباہ} = \frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲} = ۱$$

کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ظاہر
ہے کہ ۳ اُس نصف محور کا طول ہے
جو خط ۲ لا۔ ما + ۱ = ۰ پر پایا جائے
کیونکہ یہ خط معیاری مساوات میں

ما = ۰ کے متناظر ہے۔ اس نکتہ کو اچھی طرح ذہن نشین کر لینا چاہئے۔
عمل کی تصدیق کر لینے کے لئے ہم ابتدائی محوروں پر مقطوعات
کے طول دریافت کرتے ہیں۔

$$لا = ۰ \text{ سے } (۲ - ما) ۲ + (۱ - ما) ۲ = ۲۵ \text{ یعنی } ما = ۳۶ \text{ یا } ۱۳۶$$

$$ما = ۰ \text{ سے } (۲ - لا) ۲ + (۱ + لا) ۲ = ۲۵ \text{ یعنی } لا = ۱۱۹ \text{ یا } ۱۶۲$$

انتباہ۔ مندرجہ بالا طریقہ صرف اُسی صورت میں کارآمد ہو سکتا ہے جبکہ
مساوات مفروضہ شکل لا + ب س = ۱ مستقل میں معلوم ہو جہاں لا = ۰
اور س = ۰۔ دو علی القوائم خطوط مستقیم کو تعبیر کرتے ہیں، طریق عمل ایک
حد تک ایسا ہی ہے جیسا قطع مکانی کی صورت میں۔

$$\text{مثال ۵۔ منحنی لا + ما + ۳ لا + ما + ۴ = ۰ کو مرتسم کرو}$$

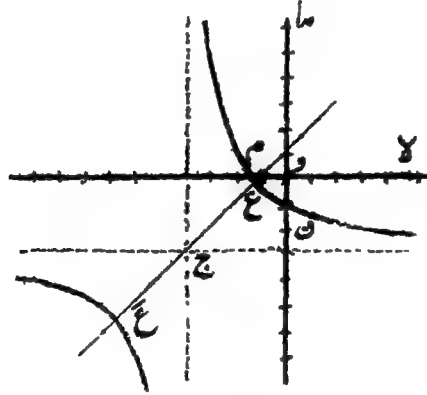
یہاں لا ب۔ ھ = ۰۔ (۱/۲) یعنی منفی مقدار پس مساوات بالا

قطع زائد کو تعبیر کرتی ہے۔
یہاں عمل کو مختصر کیا جاسکتا ہے کیونکہ ہم مساوات کو شکل

$$۸ = (۲ + ۱۱)(۳ + ۱۱)$$

میں لکھ سکتے ہیں اس سے ظاہر ہے کہ مساوات مذکورہ سے
تمام قطع زائد تعبیر ہوتا ہے جس کے متقارب $۱۱ = ۲ + ۱۱$ اور $۱۱ = ۳ + ۱۱$
ہیں اور مرکز -۲ ، -۳ ہے (در اصل منحنی کے کسی نقطہ سے ان خطوط
پہ کے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہے)
مبدأ کو مرکز پر منتقل کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے

$$۸ = لا ما$$



شکل ۵۴

[کیونکہ مبدأ کو نقطہ $(۲، -۳)$ پر منتقل کرنے سے ہم مساوات میں لا کی
جگہ -۲ اور -۳ کی بجائے -۱ لکھنا پڑے گا]۔ اب منحنی کو قسّم
کر لینا کچھ مشکل نہیں ہے کیونکہ لا کو بالترتیب $(۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰)$
قیمتیں دینے سے $ما$ کی متناظر قیمتیں فوراً معلوم ہو سکتی ہیں اور منحنی مرسم
کیا جاسکتا ہے۔

نصف عمودوں کے طول مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\frac{1}{r} - \left(\frac{1}{14}\right) = 0$$

کیونکہ $ل = ب = ۰$ اور $م = \frac{1}{14}$ نہ $۲ = ۱۶$ پس حقیقی نصف محور کا طول ۴ ہے اور مرکز کو اگر مبدأ مانا جائے تو اس کی سمت لا۔ ما۔ سے تعبیر ہوتی ہے، اس سے نقاط تقاطع ع، غ حاصل ہوتے ہیں، دوسرا محور خط لا + ما۔ ہے۔ جن نقطوں پر منحنی ابتدائی محوروں سے ملتا ہے وہ یہ ہیں۔

ما۔، لا۔، $\frac{۱}{۲}$ (یہ نقطہ شکل میں م سے تعبیر کیا گیا ہے)

اور لا۔، ما۔، ۱ (یہ نقطہ شکل میں ن سے تعبیر کیا گیا ہے)

اس طرح مرسم کرنے سے جو منحنی حاصل ہوتا ہے اس کی شکل اوپر دکھائی گئی ہے۔

مثال ۶۔ جو منحنی مساوات

$$لا + ۲ لا + ما + ۲ ما + ۷ لا + ۱۴ + ۶ = ۰$$

سے تعبیر ہوتا ہے اس کو مرسم کرو۔

ا ب۔ $۲ = ۲ \times ۱ = ۲$ ۔ پس منحنی قطع مکانی ہے

مساوات کو شکل $(لا + ۲ ما) + (۷ لا + ۱۴ + ۶) = ۰$ میں لکھنے کے بعد ہم اس میں حسب معمول لہ داخل کرتے ہیں، تب

$$(لا + ۲ ما + لہ) = - (۷ لا + ۱۴ + ۶) - (۲ - لہ) - (۱۴ - ۲ لہ) - (۶ - ۲ لہ)$$

دو خطوط مستقیم لا + ۲ ما + لہ = ۰ اور لا (۷ - ۲) + ما (۱۴ - ۲ لہ) + ۶ (۱ - لہ) = ۰

ایک دوسرے پر عمود دار ہوں گے اگر $۷ - ۲ = ۲۸ - ۲ لہ = ۰$ یعنی

$$اگر لہ = \frac{۳}{۲}$$

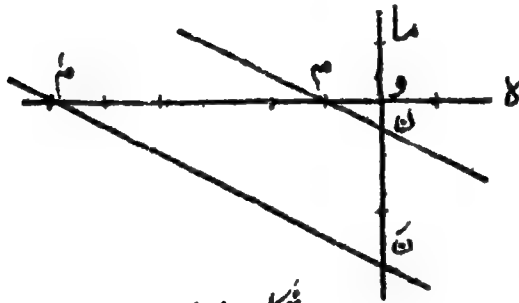
پس مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$(لا + ۲ ما + ۳ \frac{۱}{۲}) = ۱۲ - ۶ = ۶$$

ظاہر ہے کہ اس سے ذیل کے متوازی خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں

$$لا + ۲ + ۱ = ۳ + \frac{۱}{۲} \pm \frac{۱}{۲}$$

یعنی لا + ۲ + ۱ = ۰ اور لا + ۲ + ۱ = ۶ والے ضابطہ کی رو سے
وہ ج + ۲ ف گ - ۱ ف - والے ضابطہ کی رو سے
اوپر کے نتیجہ کی تصدیق کرو۔



شکل ۵۵

یہ نئی ابتدائی محور و لا کو قطع کرتا ہے جہاں لا = ۱ - یا - ۲ (دیکھو نقاط م اور م)
اور ابتدائی محور و ما کو قطع کرتا ہے جہاں ما = ۱ - یا - ۳ (نقاط ن' و ن)
ان امور کو مد نظر رکھ کر مطلوبہ خطوط مستقیم نہایت آسانی سے کھینچے جاسکتے

ہیں۔
یہ امر کہ مساوات زیر بحث سے دو متوازی خطوط مستقیم ہی تعبیر ہوتے ہیں
از خود واضح ہے کیونکہ ہم مساوات کو شکل

$$= (لا + ۲ + ۱) + (۱ + لا + ۲ + ۱) = ۶ +$$

$$یا (لا + ۲ + ۱) (۱ + لا + ۲ + ۱) = ۶ +$$

میں لکھ سکتے ہیں۔

اوپر کی بحث سے ظاہر ہے کہ نئی کی صحیح نوعیت حسب معمول
طریقہ سے کافی آسانی کے ساتھ معلوم ہو سکتی ہے۔

مثال ۷۔ مساوات ۴ لا + ۱۳ لا - ۱۰ لا - ۲۰ لا + ۲۴ = ۰

سے جو منحنی تعبیر ہوتا ہے اس کو مرسم کرو۔
چونکہ اب $۲ = ۳۶ - (۱ - ۲) = ۳۶$ یعنی منفی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ
منحنی قطع زائد ہے۔

مرکز کے لئے مساواتیں یہ ہیں

$$۴ لا + ۶ ما - ۲۰ = ۰ \quad \text{اور} \quad ۶ لا - ما - ۱۰ = ۰$$

جن سے $لا = ۲$ ، $ما = ۲$
مرکز کو مبدأ ماننے سے منحنی کی مساوات ہو جاتی ہے
 $۴ لا + ۱۲ لا - ما - ۲۶ = ۰$

$$\text{یا} \quad \frac{۴}{۴۴} لا + ۲ \times \frac{۱}{۴} لا - ما = ۱$$

لہذا نصف محوروں کے لئے مساوات $\frac{۱}{۲۲} - \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۲} - \frac{۵}{۱۴۴} = ۰$ ہے

$$\text{اس سے} \quad \frac{۳۶}{۵} = ۱ - \frac{۳۶}{۸}$$

پس نصف متقاطع محور کا طول ہے $\frac{۶}{۳۱} = \frac{۲۱۶}{۳۱} = ۲۱۶$ تقریباً

اور اسکی سمت $(\frac{۸}{۳۶} - \frac{۳۶}{۳۶}) لا + \frac{۱}{۱۲} ما = ۰$ یا $ما - لا = ۳۶$ سے معلوم ہوتی ہے

متقاربوں کی مساوات کی شکل

$$۴ لا + ۱۲ لا - ما - ۲۰ = ۰ \quad \text{یا} \quad ما - لا = ۲۰$$

جہاں ج کی قیمت خطوط

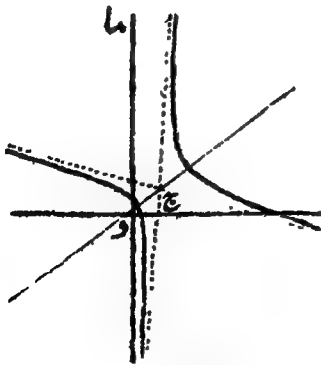
مستقیم کی شرط کی رو سے معلوم

کرنی چاہئے۔ ہم آسانی سے

معلوم کر سکتے ہیں کہ ج = ۶۰

پس متقاربوں کی مساوات

یہ ہے



شکل ۵۶

$$۴ لا + ۱۲ لا - ۲۰ = ۶۰ + ۲۰ لا - ۴۰ = ۰$$

جہاں مقارب ولا سے ملتے ہیں وہاں لا = ۱۶/۸۴ یا ۱۵/۸۴

اور جہاں یہ وما سے ملتے ہیں وہاں لا = ۲۰/۶۴ یا ۲۲/۶۴
ان نقاط کو مرسم کر لینے کے بعد اگر اس امر کو ملحوظ رکھا جائے کہ مقارب
ایک دوسرے سے نقطہ (۲، ۲) پر ملتے ہیں تو مقاربوں کا مرسم کرنا کچھ مشکل
نہیں ہے منحنی مذکور ولا سے جس مقام پر ملتا ہے وہاں
لا = ۱۰ + لا + ۶ = ۰ ∴ لا = ۳/۹ یا ۷/۹ تقریباً

اسی طرح سے جہاں یہ وما سے ملتا ہے وہاں

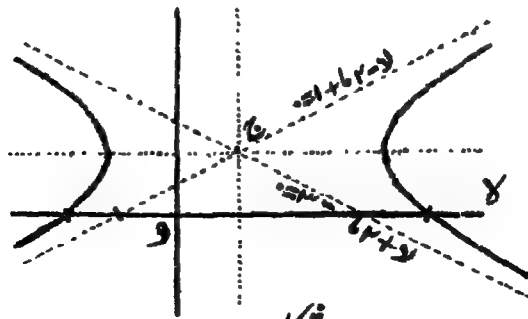
$$۲۰ + ۲۰ لا - ۲۴ = ۰ اس لئے لا = ۱۵/۱۵۱ یا ۲۲/۱۵۱$$

منحنی اوپر شکل ۵۶ میں دکھایا گیا ہے۔

مثال ۸۔ منحنی (لا - ۲ + لا + ۱) (لا + ۲ - ۳) = ۵ کو مرسم کرو
منحنی صریحاً قطع زائد ہے جس کے مقارب لا - ۲ + لا + ۱ = ۰

اور لا + ۲ - ۳ = ۰ ہیں۔

لایا ما کو خاص قیمتیں دینے سے ہم اس امر کا آسانی سے فیصلہ کر سکتے
ہیں کہ منحنی متقابل زاویوں کے کون سے زوج میں واقع ہوتا ہے مثلاً
اگر لا = ۰ تو ما خیالی ہوتا ہے اور اگر ما = ۰ تو لا = ۳ یا ۲، یا بطرز
دیگر ہم دیکھتے ہیں کہ منحنی ہر کے کسی نقطہ کے لئے لا - ۲ + لا + ۱ اور لا + ۲ - ۳



شکل ۵۷

دونوں مثبت ہیں یا دونوں منفی لیکن مبدا کے لئے پہلا جملہ مثبت ہے
۱ اور دوسرا منفی۔ پس جس زاویہ میں مبدا واقع ہے اس زاویہ میں منحنی واقع
نہیں ہوتا۔

محور تقارباتوں کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتے ہیں اس لئے انہیں ہم
آسانی سے کھینچ سکتے ہیں۔ اس خاص صورت میں تقارب لا۔ ۲ + ۱ = ۰ اور
لا۔ ۲ + ۳ = ۰ حوالہ کے محوروں سے مساوی زاوے بناتے ہیں
لہذا منحنی کے محور حوالہ کے محوروں کے متوازی ہیں۔

معمومی طریقہ سے منحنی پر چپٹا اور نقطے معلوم کئے جاسکتے ہیں اور
منحنی مرتسم ہو سکتا ہے۔

اس طریقہ میں صرف یہ نقص ہے کہ اس کے ذریعہ خروج المکرز
مستطاع اور مزدوج محوروں کے طول آسانی معلوم نہیں ہو سکتے۔

باب یازدہم پر متفرق مشقیں

ذیل کے نتجیات کو مرتسم کرو

$$۱ - ۶ لا - لا ۱۲ - لا ۸ + لا ۲۹ - لا ۱۴ = ۰$$

$$۲ - ۱۱ لا - لا ۴ لا ۱۲ + لا ۲۴ = ۰$$

$$۳ - ۹ لا - لا ۲۴ لا ۱۶ + لا ۴۴ + لا ۵۸ = ۰$$

$$۴ - ۴ لا - لا ۳ + لا ۲۹ + لا ۱۲ + لا ۱۰ = ۰$$

$$۵ - ۵ لا + لا ۶ لا ۵ - لا ۲۲ لا ۱۸ - لا ۷ = ۰$$

$$۶ - ۶ لا - لا ۱۲ + لا ۳۰ + لا ۲۹ + لا ۱۰ = ۰$$

$$۷ - ۷ لا - لا ۱۵ لا ۲۳ - لا ۳۴ = ۰$$

$$۸ - لا - لا ۱۰ لا ۴ + لا ۷ = ۰$$

$$۹ - لا - لا ۷ لا ۷ لا ۱۸ + لا ۱۸ = ۰$$

$$۱۰ - لا - لا ۲ لا ۲ - لا ۲ لا ۱۰ + لا ۵ = ۰$$

$$\begin{aligned}
 ۱۱- &= (۹+۶۳-۷۱)(۱۲+۶-۷۱) \\
 ۱۲- &= ۳۵-۶۳۷+۷۱+۶۱۵-۶۷۲ \\
 ۱۳- &= ۳+۶۳+۷۱+۶۱۵-۶۷۲ \\
 ۱۴- &= ۱+۶۷-۷۱+۶۹+۶۷۱۲-۶۷۲ \\
 ۱۵- &= ۶۲+۶۷۱۲+۶۷۲ \\
 ۱۶- &= (۱-۶+۷۱)۹- (۳+۶۲-۷۱)۶ \\
 ۱۷- &= ۳+۷۱+۶۳+۶۷۱ \\
 ۱۸- &= (۹+۶۳-۷۱)(۱۲+۶-۷۱) \\
 ۱۹- &= (۳-۶+۷۱)۲+ (۱+۶-۷۱)۲ \\
 ۲۰- &= ۶۳۷-۷۱۳+۶۹+۶۷۱۲-۶۷۲ \\
 ۲۱- &= ۲-۶۷+۷۱-۶۷۱ \\
 ۲۲- &= ۲+۶۵+۶۲-۶۷۱ \\
 ۲۳- &= ۵-۶۷+۷۱-۶۹+۶۷۱۲-۶۷۲ \\
 ۲۴- &= (۳+۶۷-۷۱)۸+ (۳-۶۷+۷۱)۳ \\
 ۲۵- &= ۷-۶۳۹+۷۱+۶۲۸-۶۷۱۲-۶۷۲ \\
 ۲۶- &= ۱۲+۶۱۵+۷۱+۶۹+۶۷۱۲-۶۷۲ \\
 ۲۷- &= ۲۷-۶۲۸-۷۱+۶۳۰+۶۷۱۳-۶۷۲ \\
 ۲۸- &= ۲۰+ (۶+۶-۷۱)(۲-۶+۷۱) \\
 ۲۹- &= ۱۲+۶۸+۷۱۳+۶۷۱+۶۷۱۲+۶۷۱۳-۶۷۲ \\
 ۳۰- &= ۲+ (۶۲+۷۱)۳+ (۶۲+۷۱)۲ \\
 ۳۱- &= ۲۸۹+۶۷۱-۶۷۱۲+۶۷۱۳-۶۷۲ \\
 ۳۲- &= ۳۷-۶۷۸+۷۱-۶۷۱۳-۶۷۱۲-۶۷۱۳-۶۷۲ \\
 ۳۳- &= ۱۳+۷۱+۶۷۱۲+۶۷۱۳-۶۷۲ \\
 ۳۴- &= (۳۷+۲)۲-۶(۳۷-۱۱)۲-۷(۳۷-۹)۲-۶۷۱+۶۷۱۲-۶۷۱۳-۶۷۲ \\
 ۳۵- &= ۱۹۷+۶۵۷-۷۲۸-۶۷۱+۶۷۱۳+۶۷۱۲-۶۷۲
 \end{aligned}$$

$$۳۶ - ۳ لا^۲ + ۲ لا لا + ۶ لا - ۱۰ لا - ۱۴ + ۱۴ = ۰$$

$$۳۷ - (۳ لا + ۶ لا^۲) + (۲ لا لا - ۶ لا + ۶ لا^۲) = ۰$$

آزمائشی پرچہ ۳

۱۔ بتاؤ کہ منحنی $۲ لا^۲ + ۲ لا لا + ۶ لا - ۱۰ لا - ۱۴ + ۱۴ = ۰$ کے مرکز کے محدد (لا، لا) کیسے معلوم ہو سکتے ہیں اور ثابت کرو کہ متقاربوں کی مساوات

$$۲ لا^۲ + ۲ لا لا + ۶ لا - ۱۰ لا - ۱۴ + ۱۴ = ۰$$

$$۲ لا^۲ + ۲ لا لا + ۶ لا - ۱۰ لا - ۱۴ + ۱۴ = ۰$$

۲۔ ایک قطع زائد کے متقاربوں کی مساواتیں

$$۲ لا - ۶ لا - ۳ = ۰ \text{ اور } ۳ لا + ۶ لا - ۶ = ۰$$

ہیں اور قطع زائد نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ

نقطہ (۴، ۱۹) میں سے بھی گزرتا ہے اور اس کا خروج المرکز $۴۴ + ۲۴$ ہے۔

۳۔ مجمل طور پر بیان کرو کہ درجہ دوم کی عام مساوات سے جو طریق تعبیر ہوتا ہے اسکی نوعیت کیسے معلوم کرنی چاہئے جبکہ حوالہ گئے محور علی القوائم ہوں۔

۴۔ ذیل کی مساواتوں کی تعبیریں بیان کرو۔

$$(۱) لا^۲ + ۶ لا لا + ۶ لا^۲ + ۴ لا - ۱۲ + ۱۲ = ۰$$

$$(۲) لا - ۶ لا - ۴ + ۴ = ۰$$

ذیل کے منحنیات کو مرتسم کرو۔

$$۵ - (۲ لا - ۶ لا) = ۵ (۲ لا - ۶ لا)$$

$$۶ - (۲ لا + ۶ لا) + (۲ لا + ۶ لا) = ۰$$

$$۷ - ۱۸ لا^۲ + ۱۲ لا لا + ۱۵ لا - ۸ لا - ۱۴ لا - ۲۳ = ۰$$

- ۸۔ $۲۵ لا + ۱۲۰ لا + ۱۲۲ ما - ۱۲۶ لا - ۱۱۹ ما - ۱۱ =$ ۔
- ۹۔ دو ناقصوں کی مساواتیں معلوم کرو جن کے اصلی محور
- $۳ لا + ۱۱ ما - ۱ = ۰$ اور $۳ لا + ۲ ما - ۲ = ۰$ ہوں اور جن کے محور اعظم اور
- محور اصغر کے طول بالترتیب ۶ اور ۴ ہوں۔
- ۱۰۔ کن شرائط کے ماتحت
- $ولا + ۲ لا + ۱۱ ما + ۱۲ ما + ۲ گ لا + ۲ ف + ۱۱ ج =$ ۔
- دو متوازی خطوط مستقیم کو تعبیر کریگی۔



اس مساوات میں رکی بڑی سے بڑی قوت ۲ ہے، اس لئے اسے ہم ر
میں مساوات درجہ دوم خیال کر سکتے ہیں جس سے مطلوبہ فاصلے حاصل ہوتے

ہیں۔ اور یہ از خود عیاں ہے کہ یہ مساوات درجہ دوم کی ہونی چاہیے کیونکہ ہر ایک خط منحنی سے ٹیک دو نقطوں پر ملتا ہے۔
اس مساوات کو بلحاظ ر کی قوتوں کے ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$R^2 (R^2 + 2R + 1) = 2R^2 + 2R + 1 \quad \text{جب } R = 1 \text{ (۱)}$$

$$R^2 + 2R + 1 = 2R^2 + 2R + 1 \quad \text{جب } R = 1 \text{ (۱)}$$

اس مساوات کی دو اصلیں مطلوبہ فاصلے ہیں۔
لفٹ اس ثبوت میں یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ محور علی التوائم ہیں۔
ذیل کی دفات میں ہم ا پر کی مساوات درجہ دوم سے نہایت ضروری نتائج اخذ کریں گے جو مسائل ضروریات میں بڑی اہمیت رکھتے ہیں۔
۱۲۶۔ اوپر لکھے گئے مساوات درجہ دوم ہے اس سے کئی نتائج حاصل ہوتے ہیں
مساوات کی ایک اصل صفر۔

مساوات کی ایک اصل صفر ہوگی اگر

$$R^2 + 2R + 1 = 2R^2 + 2R + 1 \quad \text{جب } R = 1 \text{ (۱)}$$

جو اس امر کی شرط ہے کہ نقطہ (۱، ۱) منحنی پر واقع ہو۔ اور یہی ہوتا چاہیے کیونکہ صرف اسی صورت میں کہ ایک قیمت صفر ہو سکتی ہے۔

$$۱۲۷۔ دونوں اصلیں صفر۔$$

مساوات کی دونوں اصلیں صفر ہوگی اگر (۱، ۱) منحنی پر واقع ہو

اور مزید برآں

$$R^2 + 2R + 1 = 2R^2 + 2R + 1 \quad \text{جب } R = 1 \text{ (۱)}$$

[یوٹو ریل الجبر حصہ دوم، دفعہ ۱۶۵]

اس صورت میں خط صریحاً نقطہ (۱، ۱) پر حماس ہے کیونکہ یہ منحنی سے ایسے دو نقطوں پر ملتا ہے جو (۱، ۱) پر منطبق ہوتے ہیں، اسلئے مساوات

(۲) سے (لا، ما) پر کے حماس کی سمت حاصل ہوتی ہے یعنی

$$\text{سس ط} = \frac{\text{لا + ہ + ما + گ}}{\text{ہ لا + ب + ما + ف}} \dots (۳)$$

۱۲۸۔ (لا، ما) پر کے حماس کی مساوات معلوم کرو

[انتباہ۔ حماس کی مساوات کی باضابطہ تحقیق دفعات ۱۲۴، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸ پر مشتمل ہونی چاہیئے]

مساوات مطلوبہ ہے

(ما۔ ما) = (لا۔ لا) سس ط [حصہ اول دفعہ ۱۰ ب]
جہاں ط میلان ہے ولا کے ساتھ۔
دفعہ ۱۲۷ کی رو سے یہ ہوگی

$$(ما۔ ما) = (لا۔ لا) \left(\frac{\text{لا + ہ + ما + گ}}{\text{ہ لا + ب + ما + ف}} \right)$$

یا (لا۔ لا) (لا + ہ + ما + گ) + (ما۔ ما) (ہ لا + ب + ما + ف) = ۰
ضرب دئے جانے پر یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{لا} (\text{لا + ہ + ما + گ}) + \text{ما} (\text{ہ لا + ب + ما + ف}) - (\text{لا + ہ + ما + گ}) (\text{ہ لا + ب + ما + ف}) = ۰$$

لیکن چونکہ (لا، ما) سخی پر واقع ہے اس لئے

$$\text{لا}^۲ + \text{لا} \text{ہ} + \text{لا} \text{ما} + \text{ب} \text{لا} + \text{ب} \text{ما} + \text{گ} \text{لا} + \text{ف} \text{لا} + \text{ج} = ۰$$

$$\text{ما}^۲ + \text{ما} \text{ہ} + \text{ما} \text{لا} + \text{ب} \text{ما} + \text{گ} \text{ما} + \text{ف} \text{ما} - (\text{گ} \text{لا} + \text{ف} \text{لا} + \text{ج}) = ۰$$

اس لئے حماس کی مساوات ہے بالآخر

$$\text{لا} (\text{لا + ہ + ما + گ}) + \text{ما} (\text{ہ لا + ب + ما + ف}) + \text{گ} \text{لا} + \text{ف} \text{لا} + \text{ج} = ۰ \dots (۴)$$

اسے ہم شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔

۱ لا لا + ھ (لا لا + لا ما) + ب ما + گ (لا + لا) + ف (با + با) + ج =
 جو منحنی کی مساوات میں لا کی بجائے لا لا، لا کی بجائے لا با، لا کی بجائے لا ما
 کی بجائے لا ما + لا ما، لا کی بجائے لا لا اور لا کی بجائے لا با + لا ما
 رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اس شکل کو یاد رکھنا چاہیے۔

ماسات کی مساواتیں چند سادہ صورتوں میں

ضابطہ ۳ کی رو سے مکافی ما = ۳ لا = ۱ کی صورت میں ماس ہے

$$ما = لا (۱۲) - ۵۲ لا = ۰$$

$$ما = لا (۱۲) - ۵۲ لا = ۰ \quad \text{یعنی} \quad (۵)$$

$$\text{ناقص} \quad ۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} \quad \text{کی صورت میں ماس ہے}$$

$$۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} \quad (۶)$$

$$\text{زائد کی} \quad ۱ = \frac{لا}{ب} - \frac{ما}{ب} \quad \text{کی صورت میں ماس ہے}$$

$$۱ = \frac{لا}{ب} - \frac{ما}{ب} \quad (۷)$$

۱۲۹۔ عام طریقہ کا استعمال چند سادہ صورتوں میں

اس طریقہ کو توضیحاً ہم چند خاص صورتوں میں استعمال کریں گے اور مکافی

$$ما = ۳ لا اور ناقص \quad ۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} \quad \text{کے لئے مساوات درجہ دوم اور ماس}$$

کی مساوات معلوم کریں گے، سب عمل ابتدائی اصولوں کی بنا پر ہوگا۔

۱۔ مکافی ما = ۳ لا کے لئے، مساوات درجہ دوم معلوم کرو اور اس سے

منحنی کے نقطہ (لا، ما) پر ماس کی مساوات حاصل کرو۔

اگر خط نقطہ (لا، ما) میں سے کھینچا جائے اور ایک مطلوبہ قیمت ہو تو

(حصہ اول، دفعہ ۱۰، ب، نتیجہ صریح کی رو سے)
نقطہ (لا + رجب طہ، ما + رجب طہ) سنخنی پر واقع ہوگا معنی
(ما + رجب طہ) = ۴۰ (لا + رجب طہ)

یعنی رجب طہ + ۲ (ما + رجب طہ - ۲۰ جم طہ) + ما - ۴۰ لا = ۰
جو مساوات مطلوبہ ہے

اس کی ایک اصل صفر ہوگی اگر ما - ۴۰ لا = ۰
یعنی اگر (لا، ما) سنخنی پر واقع ہو، دوسری اصل صرف اسی صورت میں صفر
ہوگی جبکہ خط نقطہ (لا، ما) پر ماس ہو، اس کے لئے شرط ہے
ما + رجب طہ - ۲۰ جم طہ = ۰

اس لئے ماس کی مساوات ہے

$$\frac{ما - ۴۰ لا}{لا - ۲۰ جم} = \frac{۲۰ جم طہ - ۴۰ لا}{۲۰ جم طہ - ۴۰ لا}$$

$$\therefore ما - ۴۰ لا = ۲۰ جم طہ - ۴۰ لا$$

$$ما = ۲۰ جم طہ$$

لیکن اس لئے مساوات مطلوبہ ہے ما = ۲۰ جم طہ (لا + لا)

۲ - ناقص $\frac{لا}{۲۰ جم طہ} + \frac{ما}{۲۰ جم طہ} = ۱$ کے لئے ر، مساوات درجہ دوم معلوم کرو

اور اس سے سنخنی کے نقطہ (لا، ما) پر ماس کی مساوات حاصل کرو۔

نقطہ (لا + رجب طہ، ما + رجب طہ) لازماً سنخنی پر واقع ہوتا ہے اس لئے

$$۱ = \frac{(لا + رجب طہ)}{۲۰ جم طہ} + \frac{(ما + رجب طہ)}{۲۰ جم طہ}$$

$$یعنی ۲ (جم طہ + جب طہ) + ۲ (لا جم طہ + ما جم طہ) + (ما - ۴۰ لا) + (لا - ۲۰ جم طہ) = ۰$$

جو مساوات مطلوبہ ہے

اس کی ایک اصل صفر ہوگی اگر

$$1 = \frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲}$$

یعنی اگر نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہو، اس مساوات کی دوسری اصل صرف اُسی صورت میں صفر ہوگی جبکہ یہ خط اس نقطہ پر ناقص کا حماس ہو، اس کے لئے شرط یہ ہے

$$0 = \frac{ما جب طہ}{۲} + \frac{لا جم طہ}{۲}$$

$$یا \quad س طہ = - \frac{ما لا}{۲}$$

اس لئے حماس کی مساوات ہے

$$\frac{ما - لا}{لا - لا} = س طہ = - \frac{ما لا}{۲}$$

$$یا \quad \frac{لا}{۲} (لا - لا) + \frac{ما}{۲} (ما - ما) = 0$$

$$اور چونکہ \quad 1 = \frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲}$$

$$اس لئے حماس کی مساوات ہو جاتی ہے \quad 1 = \frac{ما ما}{۲} + \frac{لا لا}{۲}$$

مشقیں

۱۔ مساوات $\frac{لا^۲}{۲} - \frac{ما^۲}{۲} = 1$ کی صورت میں ثابت کرو کہ ر، مساوات درجہ دوم ہے

$$۲۔ \left(\frac{جم طہ}{۲} - \frac{جب طہ}{۲} \right) + ۲ \left(\frac{لا جم طہ}{۲} - \frac{ما جب طہ}{۲} \right) + \left(\frac{لا^۲}{۲} - \frac{ما^۲}{۲} \right) = 1$$

۱۰۔ مکانی کے کسی نقطہ ن پر کاماس مرتب سے قی پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن ق کے محاذی ماسک پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۱۔ ایک خط مستقیم مکانی کے محور کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ مرتب سے ک پر، منحنی سے کو پر اور اس ماسکی وتر سے جو و پر کے حماس کے متوازی ہو قی پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ک و = وقی

۱۲۔ ر، مساوات درجہ دوم سے مزید نتائج۔ ایک اصل لامتناہی۔ مساوات کی ایک اصل لامتناہی ہوگی اگر (یو ٹوریل الجبر دوم دفعہ ۱۶۶)

$$\text{و جم}^2 \text{ طہ} + ۲ \text{ جب طہ جم طہ} + \text{ب جب}^2 \text{ طہ} = ۰ \dots\dots (۸)$$

$$\text{یا ب مس}^2 \text{ طہ} + ۲ \text{ مس طہ} + ۱ = ۰$$

جو مس طہ میں ایک مساوات درجہ دوم ہے، اس سے معلوم ہوتا ہے کہ طہ کی دو قیمتیں ہیں جن کے لئے خط منحنی کو لامتناہی پر کاٹتا ہے، یا بالفاظ دیگر کسی نقطہ میں سے دو ایسے خط کھینچے جاسکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کا ایک نقطہ تقاطع منحنی کے ساتھ لامتناہی پر ہو، نیز ظاہر ہے کہ یہ دو خطوط

$$\text{و لا}^2 + ۲ \text{ لا ما} + \text{ب ما}^2 = ۰$$

کے متوازی ہیں یعنی یہ مخروطی کے متقاربوں کے متوازی ہیں۔

یہ خط حقیقی اور غیر منطبق ہونگے اگر ا ب > ۱ یعنی اگر منحنی قطع زائد ہو

(دفعہ ۹۱)

یہ منطبق ہونگے اگر ا ب = ۱ یعنی اگر منحنی مکانی ہو (دفعہ ۵۲)

اور یہ خیالی ہونگے اگر ا ب < ۱ یعنی منحنی قطع ناقص ہو

متذکرہ بالا سے ان سب امور کی تصدیق ہوتی ہے جو ہر سہ تراشہاں مخروطی کی صورت میں خطوط کے لامتناہی پر ملنے کے لئے بیان کئے گئے ہیں۔

۱۳۔ دونوں اصلیں لامتناہی۔ متقاربوں کی مساوات

اگر دونوں اصلوں میں سے ہر ایک لامتناہی ہو تو ل اور ل کے سر دونوں

لازمًا صفر ہونگے اسلئے [یونیورسٹی الجبرا، دوم دفعہ ۱۶۷ کی رو سے]

$$\text{اجم طہ} + ۲ \text{ جب طہ جہم طہ} + \text{ب جب طہ} = ۰$$

اور جہم طہ (ا + لا + ہ + با + گ) + جب طہ (ہ + لا + ب + ما + ف) = ۰
دوسری مساوات سے مس طہ کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے اسی پہلی مساوات
میں مندرج کرنے سے ہم طہ کو ساقط کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ (لا + با) ایک
ایسا نقطہ نہیں ہے کہ اس کا مقام ہم جہاں چاہیں فرض کر سکیں بلکہ یہ لازماً
مساوات ذیل کے طریق پر واقع ہے

$$\text{ب (ا + لا + ہ + با + گ)} - ۲ \text{ ہ (ا + لا + ہ + با + گ)} + \text{ہ (لا + ب + ما + ف)} = ۰$$

اب دونوں اصلیں لامتناہی اسی صورت میں ہو سکتی ہیں جبکہ مخفی کو کاٹنے
والا خط مستقیم متقارب ہو، اسلئے اگر شرط (ا) پوری ہو تو (لا + با) متقارب
پر واقع ہوتا ہے، اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دونوں متقاربوں کی مساوات
ب (ا + لا + ہ + با + گ) - ۲ ہ (ا + لا + ہ + با + گ) + ہ (لا + ب + ما + ف) = ۰
مزید برائیں ہم جانتے ہیں کہ مخروطی کا مرکز ذیل کی دو مساواتوں کے
حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا + لا + ہ + با + گ} = ۰ \quad \text{اور} \quad \text{ہ + لا + ب + ما + ف} = ۰$$

اس لئے مساواتیں ا + لا + ہ + با + گ = ۰ اور ہ + لا + ب + ما + ف = ۰
ایسے دو خطوط کو تعبیر کرتی ہیں جو مرکز میں سے گزرتے ہیں، اس لئے مساوات
(ب) جو درجہ دوم کی ایک متجانس مساوات ہے مرکز میں سے گزرنے والے
دو خطوط کو تعبیر کرتی ہے، اور ہونا بھی یہی چاہیے کیونکہ متقارب مرکز
میں سے گزرتے ہیں۔

مساوات (ب) میں ضرب دینے اور رتوم کو ترتیب وار لکھنے سے
طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ متقاربوں کی مساوات کی اس شکل میں اور
شکل دفعہ ۱۱۰ میں صرف اتنا فرق ہے کہ اس میں ا ب - ہ بطور ضارب

جزو ضربی کے ہر رقم کے ساتھ موجود ہے۔

۱۳۲۔ اگر نقطہ و میں سے دو وتر ثابت سمتوں میں کھینچے جائیں اور وہ ایک مخروطی سے ن، ق اور ن، ق پر ملیں تو ثابت کرو کہ سطوح ون × وق اور ون × وق کی باہمی نسبت و کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

فرض کرو کہ و کے محدد (لا، ہا) ہیں اور وتروں کی سمتیں ولا کے ساتھ زاوئے طہ اور طہ بناتی ہیں، اگر مخروطی عام مساوات درجہ دوم سے تعبیر ہو تو ون، وق کے طول مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

$$ر (اجم ط + ۲ھ جب ط جم ط + ب جب ط)$$

$$+ ۲ + \{جم ط (لا + ہا + گ) + جب ط (ہا + ب + ہا + ف)\}$$

$$+ لا + ۲ھ لا + ہا + ب + ہا + گ + لا + ۲ف + ہا + ج = ۰ \quad [دفعہ ۱۲۵]$$

اسلئے مساوی مساوات درجہ دوم کی رو سے

$$\frac{لا + ۲ھ لا + ہا + ب + ہا + گ + لا + ۲ف + ہا + ج}{اجم ط + ۲ھ جب ط جم ط + ب جب ط} = ون \times وق$$

اور اسی طرح سے

$$\frac{لا + ۲ھ لا + ہا + ب + ہا + گ + لا + ۲ف + ہا + ج}{اجم ط + ۲ھ جب ط جم ط + ب جب ط} = ون \times وقی$$

$$\text{جس سے } \frac{ون \times وق}{ون \times وقی} = \frac{اجم ط + ۲ھ جب ط جم ط + ب جب ط}{اجم ط + ۲ھ جب ط جم ط + ب جب ط} \quad (۱۰)$$

چونکہ $\frac{ون \times وق}{ون \times وقی}$ کی قیمت میں جو اوپر معلوم ہوئی لا یا ہا میں سے کوئی بھی شامل نہیں ہوتا اس لئے یہ و کے مقام پر منحصر نہیں ہے لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ یہ قیمت صرف ان سمتوں پر موقوف ہے جن میں کم

وتر کیجئے گئے ہیں۔

نتیجہ صریح - بالخصوص جب نقطہ ن اور ق ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں فرض کرو کہ نقطہ م پر اور ن، ق منطبق ہو جائیں م پر تو یہ خط ماس ہو جائیں گے، اس صورت میں اوپر کی نسبت $\frac{وم}{وم}$ کے مساوی ہوگی۔

مشق

۱۲۔ اگر مخروطی دائرہ ہو تو مسئلہ بالا سے حاصل کرو کہ

ون × وق = ون × وق [اقلیدس م ۳ ش ۳۵، ۳۶] کسی نقطہ سے ایک مرکز دار تراش کے جو ماس کیج سکتے ہیں ان کے طولوں کو آپس میں وہی نسبت ہے جو ان کے متوازی نیم قطروں کو آپس میں ہے۔

فرض کرو کہ ماسات وم، دم نقطہ و میں سے گزرتے ہیں اور محور لا کے ساتھ لاوئے طہ اور طہ بناتے ہیں، نیز ل ج ل اور ن ج ن مخروطی کے دو قطر ہیں جو بالترتیب ان ماسوں کے متوازی ہیں تب اوپر کے عام نتیجہ کی رو سے

$$\frac{وم}{وم} = \frac{ل ج \times ج ل}{ل ج \times ج ن} = \frac{اجم طہ + ۲ جب طہ جم طہ + ب جب طہ}{اجم طہ + ۲ جب طہ جم طہ + ب جب طہ}$$

$$= \frac{ج ل}{ج ن} \text{ کیونکہ ج ل = ج ل اور ج ن = ج ن}$$

$$\therefore \frac{وم}{وم} = \frac{ج ل}{ج ن}$$

دائرہ کی صورت میں یہ نتیجہ بالکل ظاہر ہے کیونکہ دائرہ کے ماس مساوی ہوتے ہیں اور قطر بھی باہم مساوی ہوتے ہیں۔

مثال - نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرنے والے ان دو خطوط کی سمتیں معلوم کرو جو منحنی لا - ۳ لا ۲ لا ۲ لا ۲ لا - کو لاتا ہی پر کے ایک

معلوم کرو جن پر یہ خط منحنی سے ملتے ہیں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۲، ۳) میں سے صرف ایک خط کھینچا جاسکتا ہے جس کا ایک نقطہ تقاطع منحنی $لا^۲ + لا + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} = ۰$ کے ساتھ لاتنا ہی پر ہو، اس کی کیا وجہ ہے؟ محدود نقطہ تقاطع کے محدود معلوم کرو۔

۱۵۔ ابتدائی اصولوں سے حسب دفعہ ۱۳ اذیل کے منحنیات کے متقارب معلوم کرو۔

$$\frac{لا^۲}{لا} - \frac{لا^۳}{لا^۲} = ۱ \text{ اور } لا^۳ - لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ - لا^۵ - لا^۶ - لا^۷ - لا^۸ - لا^۹ - لا^{۱۰} = ۰$$

۱۶۔ نتیجہ دفعہ ۱۳۲ سے ثابت کرو کہ اگر ایک مرکز دار تراشش اور ایک دائرہ ایک دوسرے کو چار نقطوں پر قطع کریں تو ان کے مشترک وتر مخروطی کے محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

۱۷۔ اگر ایک دائرہ ایک ناقص کو 'ن' پر مس کرے اور نقاط 'ق'، 'ر' پر کاٹے تو ثابت کرو کہ 'ن'، 'ق'، 'ر' اور ناقص کے محور سے ایک مثلث متساوی الساقین بنتا ہے۔

۱۸۔ ایک متغیر نقطہ 'و' میں سے ایک خط ایک ثابت سمت میں کھینچا گیا ہے جو مخروطی سے 'ن' اور 'ق' پر ملتا ہے، و کا طریق معلوم کرو۔

(۱) جبکہ 'ون' + 'وق' مستقل ہو (۲) 'ر'، 'ق'، 'ن'، 'و'، 'ر'، 'ق' مستقل ہو۔
دائرہ کی صورت میں نتیجہ (۲) کیا ہو گا؟

[مخروطی کی مسادات عام شکل میں در اور استعمال کرو سمتی مسادات درجہ دوم بجاظر کے]

۱۹۔ اب ہم ایک اور طریقہ بیان کریں گے جس کی مدد سے مخروطی کے کسی نقطہ پر کے تماس کی مسادات اور علاوہ اسکے کئی اور ضروری نتائج حاصل ہو سکتے ہیں، اس طریقہ کو ابتدا میں ہم ایک سادہ منحنی کی صورت میں استعمال کرتے ہیں۔

۳۵۔ جس نسبت سے کہ مکانی $ما = ۴$ و $لا$ دو نقاط کو ملانے والے خط کی تقسیم کرنا ہے اسے معلوم کرو اور اس سے مکانی کے نقطہ $(لا، ما)$ پر کے مماس کی مساوات حاصل کرو۔

چونکہ خط مستقیم مکانی کو دو نقطوں پر کاٹتا ہے اس لئے ابتدا میں ہی اسے ہم بھانپ لیتے ہیں کہ اس نسبت کے لئے ہیں مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی۔

فرض کرو کہ $لا، ما$ اور $ب، لا، ما$ دو مفروضہ نقطے ہیں۔ اگر ن خط $اب$ کو اس طرح تقسیم کرے کہ

$$ا : ن : ب = ک : ل$$

تو ن کے محدود ہونگے $\frac{ک لا + ل لا}{ک + ل}$ ، $\frac{ک ما + ل ما}{ک + ل}$ [حصہ اول و ثانیہ]

اس لئے ہیں نسبت ک : ل ایسی معلوم کرنا ہے کہ یہ نقطہ ن منحنی پر واقع ہو

$$اس لئے \frac{(ک لا + ل ما)^2}{(ک + ل)^2} = ۴ \text{ و } \frac{ک لا + ل لا}{ک + ل}$$

$$یا (ک ما + ل ما)^2 = ۴ \text{ و } (ک لا + ل لا) (ک + ل)$$

$$: ک^2 (ما - ۴ لا) + ۲ ک ل (ما - ۲ لا - ۲ لا ل) + ل^2 (ما - ۴ لا) = ۰$$

جو پنج نسبت ک کے مساوات درجہ دوم ہے، اس سے اُن نقاط کے لئے جہاں مکانی خط کو کاٹتا ہے ک کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

نسبت $\frac{ک}{ل}$ کی ایک قیمت صفر ہوگی جب $ما = ۴$ و $لا = ۰$ یعنی جب

نقطہ $لا، ما$ منحنی پر واقع ہو۔ اس نسبت کی دوسری قیمت صرف اُسی صورت میں صفر ہو سکتی ہے جبکہ $(لا، ما)$ نقطہ $(لا، ما)$ پر کے مماس پر واقع ہو، اسکے لئے شرط یہ ہے

$$لا، ما - ۲ لا - ۲ لا ل = ۰$$

اس لئے ماس کی مساوات حسب سابق یہ ہے

$$۱۱ = ۲ + (۱۱ + ۱)$$

مشق

دفعہ ۱۳۵ کے طریقہ سے ناقص $\frac{۱۱}{۱۱} + \frac{۱۱}{۱۱} = ۱$ کے کسی نقطہ پر کے ماس کی مساوات معلوم کرو۔

۱۳۵۔ جس نسبت سے مخروطی تراش $۱۱ + ۲$ ہ $۱۱ + ۱$ ب $۱۱ + ۲$ گ $۱۱ + ۱$ ج۔ دو نقطوں کو ملانے والے خط کی تقسیم کرتی ہے اسے معلوم کرو۔

دفعہ ۱۳۵ کے موافق اگر $(۱۱، ۱۱)$ ، $(۱۱، ۱۱)$ دو معلومہ نقطے ہوں اور ک : ل مطلوبہ نسبت ہو تو نقطہ

$$\frac{ک + ۱۱}{ک + ۱۱} ، \frac{ک + ۱۱}{ک + ۱۱}$$

لازمًا منحنی پر واقع ہونا چاہیئے۔

اس کے لئے شرط یہ ہے

$$۱) \frac{ک + ۱۱}{ک + ۱۱} + ۲) \frac{ک + ۱۱}{ک + ۱۱} (ک + ۱۱) + ب) \frac{ک + ۱۱}{ک + ۱۱}$$

$$+ ۲) گ) \frac{ک + ۱۱}{ک + ۱۱} + ۲) ف) \frac{ک + ۱۱}{ک + ۱۱} + ج = ۰$$

یا (ک + ل) کے ساتھ ضرب دینے سے

$$۱) ک + ۱۱ + ۲) ک + ۱۱ (ک + ۱۱) + ب) ک + ۱۱ + ۲) ک + ۱۱$$

$$+ ۲) گ + ۱۱ (ک + ۱۱) + ۲) ف + ۱۱ (ک + ۱۱) + ج + ۱۱ = ۰$$

ک اور ل میں اس مساوات کو بطور متجانس مساوات کے ترتیب دینے سے

$$\begin{aligned} & \text{ک}^1 (\text{ل}^1 + \text{ہ}^2 + \text{ل}^1 \text{ب}^1 + \text{ب}^1 \text{ب}^2 + \text{گ}^2 + \text{ل}^1 + \text{ف}^2 + \text{م}^1 + \text{ج}^1) \\ & + \text{ک}^2 \text{ل}^1 (\text{ل}^1 + \text{ل}^1 + \text{ہ}^2 + \text{ل}^1 \text{ب}^1 + \text{ب}^1 \text{ب}^2 + \text{گ}^2 + \text{ل}^1 + \text{ف}^2 + \text{م}^1 + \text{ج}^1) \\ & + \text{ل}^1 (\text{ل}^1 + \text{ل}^1 + \text{ہ}^2 + \text{ل}^1 \text{ب}^1 + \text{ب}^1 \text{ب}^2 + \text{گ}^2 + \text{ل}^1 + \text{ف}^2 + \text{م}^1 + \text{ج}^1) = 0 \end{aligned}$$

یا مختصراً اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$\text{ک}^1 \text{س}^1 + \text{ک}^2 \text{ل}^1 \text{م}^1 + \text{ل}^1 \text{س}^1 = 0 \dots\dots\dots (11)$$

جہاں س^1 بمعنا $\text{ل}^1 \text{ب}^1$ اور ل^1 بمعنا $\text{ل}^1 \text{ب}^1$ کے متشاکل ہے (یعنی یہ نہیں بدلتا اگر ل^1 کا تبادلہ ل^1 سے اور ب^1 کا ب^2 سے کر دیا جائے) مساوات (11) نسبت ک^1 : ل^1 میں مساوات درجہ دوم ہے جس کو حل کرنے سے مطلوبہ نسبت حاصل ہوتی ہے، اسے یو عاکستال کا نتیجہ کہتے ہیں۔

نوٹ: درجہ دوم کی عام مساوات کو جب ہم آئندہ $\text{س}^1 = 0$ سے تعبیر کریں گے تو $\text{س}^1 = 0$ اس نتیجہ کو تعبیر کریں گے جو $\text{ل}^1 \text{ب}^1$ کی بجائے جملہ س^1 میں $\text{ل}^1 \text{ب}^1$ مندرج کرنے سے حاصل ہو۔

$$\text{نتیجہ صریح} - \text{اگر مساوات } \left(\frac{\text{ک}^1}{\text{ل}^1}\right) \text{س}^1 + \left(\frac{\text{ک}^2}{\text{ل}^1}\right) \text{م}^1 + \text{س}^1 = 0$$

کی اصلیں حقیقی ہوں تو خط مستقیم منحنی سے دو حقیقی نقاط ا^1 و ب^1 پر ملے گا اور اگر نسبت کی قیمت $\frac{\text{ک}^1}{\text{ل}^1}$ کے جواب میں نقطہ ف^1 ہو تو جب یہ قیمت مثبت ہوگی ف^1 نقاط ا^1 و ب^1 کے درمیان واقع ہوگا اور اگر یہ منفی ہوگی تو باہر واقع ہوگا۔

اگر اصلیں مساوی ہوں تو خط مخروطی سے دو منطبقہ نقاط پر ملے گا یعنی اسے مس کریں گے۔

اگر اصلیں خیالی ہوں تو خط مخروطی سے خیالی نقاط پر ملے گا۔
اب ہم چند مثالیں اس غرض سے درج کریں گے کہ طالب علم اس ضروری

اصول کی اہمیت سے جو اد پر بیان ہوا پورے طور پر واقف ہو جائے۔
 مثال ۱۔ جس نسبت سے خط لا + لا + ب + ما + ج = ۰ نقاط (لا، ما)
 اور (لا، ما) کے ملانے والے خط کو تقسیم کرتا ہے اسے معلوم کرو۔
 اگر ک : ل مطلوبہ نسبت ہو تو نقطہ $\frac{\text{ک لا} + \text{ل لا}}{\text{ک} + \text{ل}}$ ، $\frac{\text{ک ما} + \text{ل ما}}{\text{ک} + \text{ل}}$
 خط لا + لا + ب + ما + ج = ۰ پر واقع ہے اور اس سے حاصل ہوتا ہے
 (ک لا + ل لا) + (ک ما + ل ما) + ج (ک + ل) = ۰

$$\text{یا } \frac{\text{ک}}{\text{ل}} = \frac{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}{\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج}}$$

جس سے مطلوبہ نسبت حاصل ہوتی ہے۔
 اس صابطہ سے ایک مندرجہ نتیجہ تشریح ہوتا ہے، فرض کرو کہ لا (لا، ما)
 ہے اور لا (لا، ما) اب اگر لا، لہ خط کی متقابل جانبوں میں واقع ہوں
 تو یہ خط لا، لہ کو داخلا تقسیم کرے گا اور نسبت ک : ل نسبت ہوگی،
 اس لئے اس صورت میں لا + لا + ب + ما + ج اور لا + لا + ب + ما + ج کی
 علامات مختلف ہوں گی۔ اگر لا، لہ خط کے ایک ہی جانب واقع ہوں تو نسبت
 ک : ل منفی ہوگی، اس صورت میں لا + لا + ب + ما + ج اور لا + لا + ب + ما + ج
 کی وہی علامت ہوگی۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ان تمام نقطوں کیلئے جو خط لا + لا + ب + ما + ج = ۰
 کے ایک ہی جانب واقع ہوں جملہ لا + لا + ب + ما + ج کی علامت ایک ہی ہوگی
 اور ان نقطوں کے لئے جو خط کی متقابل جانبوں میں واقع ہوں جملہ کی علامتیں
 مختلف ہوں گی اور خط پر کے تمام نقطوں کے لئے یہ جملہ صفر ہوگا
 [دیکھو حصہ اول، دفعہ ۱۳]

مثال ۲۔ جس نسبت سے دائرہ لا + ما = ۶۵ نقاط (لا، ما) (۱۵، ۳)

اور (۷۶) کے ملانے والے خط کو تقسیم کرتا ہے اُسے معلوم کرو۔
 اگر مطلوب نسبت ک:ل ہو تو نقطہ $\frac{ک}{ل} = \frac{ک + \frac{۱۵}{۴}}{ک + ل}$ ، $\frac{ک}{ل} = \frac{ک + \frac{۵}{۴}}{ک + ل}$
 دائرہ پر واقع ہوگا اور اسلئے

$$(\frac{ک}{ل} + \frac{۱۵}{۴})^۲ = (\frac{ک}{ل} + \frac{۵}{۴})^۲ + ۶۵$$

جو تحویل کے بعد ہوجاتی ہے $۸ک - ۲ل = ۲ل$.

$$\frac{ک}{ل} = \frac{۱}{۲} \quad \text{یا} \quad \frac{ک}{ل} = \frac{۱}{۲}$$

پس ایک نقطہ تقاطع اندرونی ہے اور دوسرا بیرونی اور پہلے نقطہ کے قریب تر ہے۔

نقاط تقاطع کے محدود معلوم کرنے کے لئے ہمیں اوپر کی نسبتیں استعمال کرنی چاہئیں۔ اندرونی نقطہ تقاطع کے محدود ہیں

$$\frac{\frac{۵}{۴} \times ۲ + ۴ \times ۱}{۲+۱} \quad ، \quad \frac{\frac{۱۵}{۴} \times ۲ + ۶ \times ۱}{۲+۱}$$

اور بیرونی نقطہ کے محدود ہیں

$$\frac{\frac{۵}{۴} \times ۳ - ۴ \times ۱}{۳-۱} \quad ، \quad \frac{\frac{۱۵}{۴} \times ۳ - ۶ \times ۱}{۳-۱}$$

اور اس کی آسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ دونوں نقطے فی الحقیقت منحنی پر واقع ہیں۔

مشقیں

۱۹۔ جس نسبت سے خط مستقیم ۳ لا + ۶ = ۱ نقاط (۱، ۱) ، (۳، ۵) کے

ملانے والے خط کو تقسیم کرتا ہے اُسے معلوم کرو۔

۲۰۔ خط مستقیم ۲ لا + ۶ = ۵ ایک متحرک نقطہ اور (۱، ۱) کے ملانے

ماس پر واقع ہو۔

اسکے لئے شرط یہ ہے $m = 0$ یعنی

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z = 0$$

$$یا \quad a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z = 0$$

اب چونکہ یہ اس امر کی شرط ہے کہ $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z)$ کے ماس پر واقع ہو اس لئے ماس کی مساوات ہے

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z) = 0$$

جیسا ہم پہلے طریقہ سے معلوم کر چکے ہیں۔

یہ طریقہ قابل ترجیح ہے کیونکہ اس کا اطلاق دونوں صورتوں پر ہو سکتا ہے خواہ محور قائم ہوں یا مائل، چنانچہ مسئلہ بالا کو ثابت کرنے میں کوئی ایسی خاصیت تسلیم نہیں کر لی گئی جو قائم محوروں سے بالخصوص متعلق ہو۔

مشقیں

۲۴۔ مکانی لا = ۸ ماس کے اُن نقطوں پر کے مساوات کی مساواتیں معلوم کرو جہاں لا = ۲، ۳، ۴، ۵ بالترتیب۔

۲۵۔ زاویہ لا = $\frac{1}{9}$ - $\frac{1}{10}$ کے اُن نقاط پر کے مساوات کی مساواتیں معلوم کرو جہاں لا = ۲، ۳، ۴ بالترتیب۔

۲۶۔ منحنیات ذیل کے اوتار خاص کے سروں پر جو ماس کھینچ سکتے ہیں ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

$$(a) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \quad (b) \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (c) \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

۲۷۔ منحنیات (a) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (b) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ میں سے

سادہ صورتوں میں یہ مساوات ذیل کی شکلیں اختیار کرتی ہے۔
مکانی ما^۲ - م^۱ ولا^۲ = ۰ (لا، ما) سے حماس ہیں

$$\begin{aligned} \{ \text{ما} - \text{لا} \} &= \{ (\text{لا} + \text{لا}) \} = \{ (\text{ما} - \text{م} \text{ ولا}) (\text{ما} - \text{م} \text{ ولا}) \} \\ \text{ناقص} &= \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1, \text{ نقطہ } (\text{لا}, \text{ما}) \text{ سے حماس ہیں} \\ (\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1) &= (\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1) (\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1) \\ \text{زائد} &= \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1, \text{ نقطہ } (\text{لا}, \text{ما}) \text{ سے حماس ہیں} \\ (\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1) &= (\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1) (\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1) \end{aligned}$$

طالب علم کو ابتدائی اصولوں سے حسب بالا یہ سب مساواتیں حاصل کرنی چاہئیں۔ رہنمائی کی غرض سے ہم ناقص کی صورت میں تفصیلی عمل ذیل میں درج کرتے ہیں۔

مثال - نقطہ ن (لا، ما) سے ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے جو دو حماس کھینچ سکتے ہیں ان کی مساوات معلوم کرو۔

اگر کسی حماس پر قی (لا، ما) ایک نقطہ ہو تو ن اور ق کے ملنے والا خط ناقص سے دو منطبقہ نقاط پر ملے گا، اب ہم اس نسبت کی قیمتیں معلوم کریں گے جس نسبت سے یہ ناقص اس خط کو تقسیم کرتا ہے اور اس امر کے لئے شرط دریافت کریں گے کہ یہ قیمتیں باہم مساوی ہیں۔ جو نقطہ ن کو نسبت ک:ل سے تقسیم کرتا ہے اس کے معاد ہیں

$$\frac{\text{ک ل} + \text{ل لا}}{\text{ک} + \text{ل}} = \frac{\text{ک ما} + \text{ل لا}}{\text{ک} + \text{ل}}$$

اگر یہ نقطہ ناقص پر ہو تو

$$1 = \frac{1}{\frac{2}{b} + \frac{1}{a}} \times \frac{(k + \frac{1}{a})^2}{(k + \frac{1}{b})^2} + \frac{1}{\frac{2}{a} + \frac{1}{b}} \times \frac{(k + \frac{1}{b})^2}{(k + \frac{1}{a})^2}$$

(ک + ل) کے ساتھ ضرب دینے اور قوم کو ترتیب وار اکٹھا کرنے سے

$$k^2 \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a^2} \right\} + k \left\{ 1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right\} + \left\{ 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right\} = 0$$

اگر $\frac{k}{l}$ میں اس مساوات کی اصلیں مساوی ہوں تو

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a^2} \right) \left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)$$

پس معلوم ہوا کہ (لا، ما،) کے کسی ایک حماس پر واقع ہونے کے لئے ہی شرط ہو۔
پس حماسوں کی مساوات مطلوبہ ہے

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a^2} \right) = \left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \left(1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

مشقیں

۳۰۔ نقطہ (۱۱-۵) سے ۳ (لا + ۴ ما = ۳۲ کے حماسوں کی مساوات معلوم کرو۔

۳۱۔ نقطہ (۱۰-۴) سے مکانی ۱ = ۳ ف لا کے حماسوں کی مساوات دریافت کرو۔

۳۲۔ مبدأ سے منحنی $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ کے حماسوں کی مساوات معلوم کرو۔

۳۳۔ نقاط (۱) (۳۱) (ب) (۱۱) سے ناقص $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ کے حماسوں کی مساوات معلوم کرو، دوسری صورت میں نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔

ہے اور بائیں جانب کا کرن بھی صفر کے مساوی ہے کیونکہ (لا، ما، با) مخروطی پر واقع ہے، اس لئے
(لا، با) خط مستقیم پر واقع ہے اسی طرح (لا، ما، با) بھی خط پر ہے۔
اس لئے مساوات (۱۳) نقاط (لا، ما، با) اور (لا، ما، با) کو ملانے
والے خط کی مساوات ہے۔

اگر ہم اس میں رکھیں لا = لا اور ما = ما تو (لا، با) پر کے ماس
کی مساوات حاصل ہوگی یعنی

۲ (لا-لا) + ۲ (لا-لا) + (لا-لا) + (ما-ما) = لا + لا + ۲ (لا-لا) + ۲ (ما-ما) + ۲ (ف-ف) + ج
مرجع لینے اور رقوم کو اکٹھا کرنے سے

۲ (لا-لا) + ۲ (لا-لا) + (لا-لا) + (ما-ما) + ۲ (لا-لا) + ۲ (ما-ما) + ۲ (ف-ف) + ج =
= (۲ لا + ۲ لا + لا + ۲ ما + ۲ ما + ۲ ف + ج) =

چونکہ (لا، با) منحنی پر واقع ہے۔
اس لئے ۲ پر تقسیم کرنے سے ماس کی مساوات حسب سابق حاصل ہوگی

لا (لا-لا) + ۲ (لا-لا) + (لا-لا) + (ما-ما) + ۲ (لا-لا) + ۲ (ما-ما) + ۲ (ف-ف) + ج =
طالب علم دتر کی مساوات میں سرنیں کے جملات کو مرتب کر کے
کی نذر کہ بائیں پر اچھی طرح غور کرے۔

(لا) بائیں جانب ہم وہ جملہ رکھتے ہیں جسے اگر صفر کے مساوی رکھا جائے
تو دہ مخروطی کی مساوات ہو جاتی ہے۔

(ج) دائیں طرف اسے جملات رکھے جاتے ہیں جو صرف درجہ دوم کی
رقموں پر مشتمل ہیں۔ دائیں طرف کے جملہ کو مرتب کر ٹیکا قاعدہ یہ ہے۔

درجہ دوم کی رقوم میں سے لا کی بجائے (لا-لا) (لا-لا) (لا-لا) رکھو
ما کی بجائے (ما-ما) (ما-ما) اور لا-لا میں سے ایک لا-لا کے لئے
(لا-لا) (لا-لا) (ما-ما) اور دوسرے لا-لا کے لئے (لا-لا) (ما-ما)

اس میں ہم دراصل ایک ایسا جملہ مرتب کرنے کی کوشش کرتے ہیں جو لا = لا اور ما = ما اور نیز لا = لا اور ما = ما کے لئے متطابقاً صفر ہو اسکے لئے ضروری ہے کہ ہر رقم میں لا - لا یا ما - ما اور لا - لا یا ما - ما بطور جزو صفر فی کے شریک ہو۔

علاوہ ازیں یہ ضروری ہے کہ دونوں طرف درجہ دوم کی رقیبیں وہی ہوں۔

مثالیں۔ (۱) مکافی ما^۲ = لا^۲ میں وتر کی مساوات ہے

$$(ما - ما)(ما - ما) = ما^۲ - لا^۲$$

(۲) ناقص $\frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲} = ۱$ میں وتر کی مساوات ہے

$$۱ - \frac{ما^۲}{۲} + \frac{لا^۲}{۲} = \frac{(ما - ما)(ما - ما)}{۲} + \frac{(لا - لا)(لا - لا)}{۲}$$

مشقیں

نسیات ذیل پر نقاط (لا، ما) اور (لا، ما) فرض کر کے ان کو ملائے والے دتروں کی مساواتیں دریافت کرو اور ان سے چھوٹ میں (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات حاصل کرو ماس کی عام مساوات کے ساتھ مقابلہ کرنے سے اپنے جواب کی تصدیق کرو۔

$$۳۶ - لا^۲ + \frac{ما^۲}{۲} = ۱ \quad ۳۷ - ما^۲ - لا^۲ = ۱$$

$$۳۸ - لا = ما = ج \quad ۳۹ - لا + لا + ۲ ما + ما = ۱$$

$$۴۰ - لا + لا + ۲ ما + ما = ۱ \quad ۴۱ - ماس کی مساوات معلوم کرنے کے تین طریقے جو اوپر دیئے گئے ہیں ان کا مقابلہ۔$$

ہم بتا چکے ہیں کہ پہلا طریقہ صرف قائم محوروں کی صورت میں استعمال

ہو سکتا ہے لیکن دوسرے اور تیسرے طریقہ کے لئے یہ قید نہیں ہے کہ یہ ہر دو قائم اور مائل محوروں کی صورت میں باسانی استعمال ہو سکتے ہیں مگر یاد رہے کہ پہلے طریقہ میں خاص خوبی یہ ہے کہ اس کی مدد سے چند ضروری مسائل جو ذروں کی سطوح سے متعلق ہیں باسانی حاصل ہوتے ہیں لیکن دوسرے طریقوں سے ان کا حاصل کرنا مقابلاً دشوار ہے۔

دوسرا طریقہ نسبتی مساوات درجہ دوم پر موقوف ہے، اس کی مدد سے کسی نقطہ سے ایک مخروطی کے دو ماسوں کی مساوات باسانی حاصل ہوتی ہے تیسرا طریقہ گواہیت کے لحاظ سے باقی دو سے کم درجہ پر ہے تاہم اسکے ذریعہ ہم دتر کی مساوات کو سادہ اور کارآمد صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ یہ کہنا بیجا نہ ہو گا کہ یہ تینوں طریقے یاد رکھنے چاہئیں اور اگر ایک دفعہ طالب علم ان پر حاوی ہو جائے تو مخروطیوں کا باقی علم ہندسہ اس کے لئے آسان ہو جائے گا۔

۴۱۔ اس امر کی شرط کہ خط ل لا + م م + ا = ۰ ایک مخروطی کو مس کرے۔

یہ شرط معلوم کرنے کے کئی طریقے ہیں جیسا دفعہ ۶ میں اوپر بیان ہو چکا ہے ماس کو ساقط کرنے کے بعد ہم اس امر کی شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ لا میں مساوات درجہ دوم کی اصلیں مساوی ہیں، سادہ صورتوں کے لئے یہی طریقہ مناسب ہے کیونکہ یہ ابتدائی اصولوں پر مبنی ہے لیکن بعض اوقات ذیل کا طریقہ بھی سودمند ثابت ہوتا ہے۔

فرض کر دو کہ مخروطی $\frac{لا}{ا} + \frac{م}{ب} = ۱$ ہے اور ل لا + م م + ا = ۰

اس کو نقطہ (لا، م) پر مس کرتا ہے۔

چونکہ (لا، م) پر کا ماس $\frac{لا}{ا} + \frac{م}{ب} = ۱$ ہے اس لئے یہ

خط اور مفروضہ خط ل لا + م م + ا = ۰ ایک ہی ہیں۔

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

جس سے لڑے۔ وال، مارے۔ بام

$$I = \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_d}{r_f} \quad \text{لیکن}$$

۱۱. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ مطلوبہ شرط ہے

اسی طرح سے محزوطی $\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_3}{r_2} = 1$ کی صورت میں شرط

مطابق ہوگی $\frac{1}{2}l - b^2 = a^2 = 1$

۴۲-۱۔ مکانی $\lambda = ۴۰$ لا کی صورت میں (λ, μ) پر کا ماس ہے

$$(2 + 2) \cdot 2 = 8$$

اور اگر یہ مساوات اور $l + m + n = 1$ ایک ہی خط کو تعبیر کریں تو

$$y_1 y_2 = \frac{b^2}{c} = \frac{1}{m}$$

اس لئے $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$ ، یا $\frac{1}{L} = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2}$

لیکن $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$$= \frac{1}{J} \times 12 + \frac{2}{J} \times 12 \quad \therefore$$

۱۴۴۔ اس امر کی شرط کہ خط مستقیم مخروطی کو مس کرتا ہے۔

منتخب اول طریقہ -

ایک خاص صورت میں یہی شرط معلوم کرنے کا ایک اور طریقہ ہم اس جگہ

مسند ج کر بنگے، یعنی بحر یہ معاوم کر بنگے کہ کسرا بشرط کے ماتحت خط

لاجم عدد + واجب عدد = ناقص $\frac{9}{14} + \frac{1}{14} = 1$ کو مس کرتا ہے

نقاط تقاطع کو مبدأ سے ملانے والے خطوط کی مساوات یہ ہے

$$= \left(\frac{\text{لاجم عم} + \text{ماجب عم}^2}{ع} \right) - \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}$$

$$یا \text{لا}^2 \left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جم عم}^2}{ع} \right) - 2 \text{لا ما} \frac{\text{جب عم جم عم}}{ع} + \text{ما}^2 \left(\frac{1}{\text{ب}^2} - \frac{\text{جب عم}^2}{ع} \right) = 0$$

اگر خط مستقیم ناقص کو مس کرے تو یہ دونوں خط ایک دوسرے پر منطبق ہونگے

$$\text{یعنی } \frac{\text{جب عم جم عم}^2}{ع} = \left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جم عم}^2}{ع} \right) \left(\frac{1}{\text{ب}^2} - \frac{\text{جب عم}^2}{ع} \right)$$

جس سے اختصار کے بعد

$$ع = \text{لا}^2 \text{جم عم} + \text{ب}^2 \text{جب عم} \dots\dots\dots (۱۵)$$

پس جس خط کی مساوات

$$\text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} = \pm \text{لا}^2 \text{جم عم} + \text{ب}^2 \text{جب عم}$$

$$\text{ہے وہ ناقص } = \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} = 1 \text{ کو مس کرتا ہے۔}$$

مشقیں

۴۱۔ اگر لا + ما = ج ناقص ۲ لا + ۳ ما = م کو مس کرے تو
(۱) طریقہ دفعہ ۱۴۱ نیز (۲) طریقہ دفعہ ۱۴۳ سے ج کی قیمت معلوم کرو۔
۴۲۔ دفعہ ۱۴۳ کی طرح ثابت کرو کہ

$$\text{لاجم عم} + \text{ماجب عم} = \pm \text{لا}^2 \text{جم عم} - \text{ب}^2 \text{جب عم}$$

$$\text{زائد } \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} = 1 \text{ کا مماس ہے۔}$$

$$۴۳۔ اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ خط لا + ما = ۱$$

ناقص $\frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲} = ۱$ کو مس کرے۔

۴۴۔ ناقص $\frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲} = ۱$ کے اُن تماسات کی مساواتیں دریافت کر دو جو محور ما کے ساتھ ۳۰ کا زاویہ بنائیں۔

۴۵۔ مبدأ سے منحنی ب' لا' + لا' ما' = لا' ب' کے اُس تماس کا فاصلہ معلوم کر دو جو محور ما کے ساتھ ۶۰ کا زاویہ بنائے۔

۴۶۔ ثابت کرو کہ اگر ل لا + م ما + ۱ = ۰ مخروطی لا' + لا' ۲ + ۲ ما + ب ما' + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰

کو مس کرے تو اس کے لئے یہ شرط پوری ہونی چاہئے

ل' (بج - ف) + م' (ج - و - گ) + ن' (اب - ہ) + م' ۲ (ن - گ - ہ - اف)

+ ۲ ن ل (ہف - بگ) + ل م (فگ - جہ) = ۰

۴۴۔ مخروطی کے دو علی التوائم تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق دائرہ ہوگا اگر یہ مخروطی مرکز دائرہ تراشش ہو اور خط مستقیم ہوگا اگر یہ مکانی ہو۔

اس مسئلہ کو حل کرنے کے لئے ہم (لا' ما') سے مخروطی کے دو تماسات کی مساوات حاصل کرتے ہیں اور پھر اس امر کی شرط معلوم کرتے ہیں کہ یہ خطوں کا جوڑا علی التوائم ہے، اس طرح سے ہمیں لا' ما' میں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جو مطلوبہ طریق کو تعبیر کرتی ہے۔

مثلاً ناقص $\frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲} = ۱$ کی صورت میں (لا' ما') سے منحنی

کے تماسات ذیل کی مساوات سے تعبیر ہوتے ہیں

$$\left(1 - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲}\right) \left(1 - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲}\right) = \left(1 - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{ما^۲}{۲}\right)$$

اور اگر یہ خط علی التوائم ہوں تو لا' اور ما' کے سروں کا مجموعہ صفر ہوگا

(حصہ اول دفعہ ۲۹) یعنی

$$= \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

یا مختصر کرنے پر

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

اس لئے مطلوبہ طریق دائرہ ہے۔

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots (۱۷)$$

جو ناقص کے ساتھ ہم مرکز ہے اور جس کے نصف قطر کا مربع نصف محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اس دائرہ کو ناقص کا مرتبہ دائرہ کہتے ہیں

اسی طرح زائد $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ کیلئے یہ طریق دائرہ ہے جس کی مساوات ہے

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \dots (۱۸)$$

مکانی کی صورت میں اگر مساوات $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ لا لی جائے تو $(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})$ سے معنی کے ماسوں کی مساوات ہوگی

$$\left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right\} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

اس میں $\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{2}$ کے سر میں بالترتیب $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

اس لئے مطلوبہ طریق ہے $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \dots (۱۹)$$

نماہر ہے کہ یہ معنی کے مرتبہ کی مساوات ہے (دفعہ ۳۱) بالکل سچا عمل تمام مساواتوں کے لئے استعمال ہو سکتا ہے۔

۱۴۵۔ دفعہ آخر کے مسئلہ کو حل کرنے کے کئی اور کارآمد طریقے ہیں۔

مثلاً ناقص کی صورت میں ہم نے دیکھا ہے (صفحہ ۶۸) کہ خط
 $ما = م لا \pm ما ب^۲ + م^۲$ کی تمام قیمتوں کے لئے ناقص کو ہمیں
 کرتا ہے۔

اگر ماس (لا، ما) میں سے گزرے تو

$$۱۔ م لا = ما ب^۲ + م^۲$$

$$یا (ما - م لا) = ما ب^۲ + م^۲$$

$$یا م^۲ (لا - ۱) + م لا ما = ما ب^۲ - ما^۲$$

م میں یہ مساوات درجہ دوم ہے اس لئے اس سے لا، ما میں سے
 گزرنے والے دو ماسوں کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں۔ اگر یہ ماس علی التوا
 ہوں تو اصلوں م، م کا حاصل ضرب = ۱۔

$$\therefore \frac{ما - م لا}{لا - ۱} = ۱$$

$$جس سے حسب سابق لا، ما = ما + م لا$$

طالب علم اس طرح کے نتائج مساوات $ما = م لا + \frac{۱}{م}$ سے نکالنے کے لئے

دو مساوات $ما = م لا \pm ما ب^۲ + م^۲$ سے زائد کے لئے حاصل کرے۔

۲۔ متبادل طریقہ نامیں اور زائد کی صورت میں۔

$$لاجم عہ + ما جب عہ = ما^۲ جم عہ + ما جب عہ$$

$$عہ کی تمام قیمتوں کے لئے $\frac{لا}{ما} + \frac{۱}{ما} = ۱$ کو س کرتا ہے۔$$

جو ماس اس پر محدود ہے اس کی مساوات ہوگی

$$لاجم (عہ + ۱) + ما جب (عہ + ۱) = ما^۲ جم (عہ + ۱) + ما جب (عہ + ۱)$$

کیونکہ اگر مبدأ سے اس پر عمود نکالا جائے تو وہ محوروں سے زاویہ (۹۰° + عم) بنائے گا۔

پس مذکورہ بالا مساوات ہے۔ لا جب عم + ما جم عم = ما^۲ جب عم + ب^۲ جم عم
نقطہ تقاطع کا طریق عم کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا، ہر مساوات کا مربع اٹھانے اور جمع کرنے سے حسب سابق لا^۲ + ما^۲ = ب^۲ + ۱
۱۴۷ - ظاہر ہے کہ جن سوالات میں ماسوں کی سمتوں سے بجٹ ہواں میں اس طرح کی ماسی مساواتوں کو استعمال کرنا زیادہ سودمند ہوگا مثلاً

$$ما = م لا + ما^۲ م + ب^۲$$

$$ما = م لا + \frac{۱}{م}$$

طالب علم دیکھے کہ کس سہولت سے ہم نے اوپر اس قسم کی مساواتوں کو علی القوام ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنے میں استعمال کیا ہے تمام صورتوں میں ہم (لا، ما) کو ایک ایسا نقطہ خیال کر سکتے ہیں جس سے منحنی کے ماس کھینچے گئے ہیں اور مساوات ایک ایسی مساوات درجہ دوم متصور ہو سکتی ہے جس سے ماسوں کے "م" حاصل ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) سے جو ناقص $\frac{لا^۲}{۱} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے ماس کھینچے جا سکتے ہیں ان کا درمیانی زاویہ مطلوب ہے۔

$$ہم جانتے ہیں کہ مسطہ = \frac{ما - ۱}{ما + ۱}$$

جہاں م م مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

$$(م - لا) = م لا^۲ م + ب^۲$$

$$یا م^۲ (لا - لا^۲) + م لا^۲ م + ب^۲ - ما^۲ = ۰$$

$$\therefore م + م = - \frac{ما^۲ - ب^۲}{لا - لا^۲} \quad م م = \frac{ب^۲ - ما^۲}{لا - لا^۲}$$

$$\begin{aligned}
 \text{اس لئے } (م - م) &= (م + م) - ۲م \\
 &= (۲م - ۲م) = ۰ \\
 &= \frac{(۲م - ۲م)}{۲(۲م - ۲م)} \\
 &= \frac{۲م - ۲م}{۲(۲م - ۲م)} \\
 &= \frac{۲م - ۲م}{۲(۲م - ۲م)} \\
 \therefore \text{مس ط} &= \frac{۲م - ۲م}{۲(۲م - ۲م)} \times \frac{(۲م - ۲م)}{۲م - ۲م} \\
 &= \frac{۲م - ۲م}{۲م - ۲م} \\
 &= \frac{۲م - ۲م}{۲م - ۲م}
 \end{aligned}$$

پس ط اسی صورت میں صفر ہو گا جبکہ (۲م، ۲م) منحنی پر واقع ہو یعنی جبکہ ماس ایک دوسرے پر منطبق ہوں اور ط اُس وقت $\frac{۲م}{۲م}$ کے مساوی ہو گا جبکہ (۲م، ۲م) مرتب دائرہ پر واقع ہو جیسا اوپر معلوم کیا گیا ہے۔

۱۸۔ اگر ناقص کے ماسکے سے کسی ماس پر عمود نکالا جائے تو اس کے پایہ کا طریق ایک ایسا دائرہ ہو گا جو محور اعظم کے قطر پر بنایا جائے۔

اس فرض کے لئے ماس کی مساوات $م + لا = ماب + ۲م$ فرض کر دیاں ناقص مذکور $\frac{۲م}{۲م} + \frac{۲م}{۲م} = ۱$ ہے۔ ماسکے کے عمود (لا، ۲م) ہیں۔

کسی ایسے خط کی مساوات جو ماس پر عمود ہو $م + لا = ک$ ہے اور اگر یہ ماسکے مذکور میں سے گزرے تو $م + لا = ک$ یعنی $ک = لا$

اس لئے عمود کا پایہ خطوط $م + لا = ماب + ۲م$

اور $م + لا = لا$

کا نقطہ تقاطع ہے، اگر ہم ان سے $م$ کو ساقط کر دیں تو ہمیں ایک مساوات

حاصل ہوگی جس کو تمام عمودوں کے پائے پورا کرینگے اور یہی طریق مطلوب ہے
دووں مساواتوں کا مربع اٹھانے اور ان کو جمع کرنے سے

$$(۱+۲م)(۱+۲م) = ۲ب + ۲م + ۲$$

$$= ۲(۱+۲م) \text{ چونکہ } ۲ب = ۲(۱+۲م)$$

$$۱+۲م = ۲ \dots\dots\dots (۲۰)$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے -

تقریباً - جو دائرہ محور اعظم کے قطر پر بنایا جائے اسے امدادی دائرہ کہتے ہیں
اسی طرح سے ہم دیکھتے ہیں کہ دوسرے ماسک (۱۰) سے اگر ماسوں
پر عمود کھینچے جائیں تو انکے پائے بھی اسی دائرہ پر واقع ہونگے اور یہ ظاہر ہے
کیونکہ عل بالائیں صرف عمود کی مساوات ہمیں بدلتی پڑیگی م + ۱ = ۱۰ اور
اور مربع اٹھانے پر یہ اختلاف بھی جاتا رہیگا -

مشق

۱۴۹ - اسی طریقہ سے دائرہ کی صورت میں ثابت کرو کہ یہ طریق $۱+۲م = ۱۰$ ہے
یعنی ایک ایسا دائرہ ہے جو قاطع محور کے قطر پر بنایا جائے -

۱۵۰ - مکانی کی صورت میں ثابت کرو کہ اگر ماسک سے کسی ماس پر عمود
نکالا جائے تو اس کے پائے کا طریق راس پر کا ماس ہے -

فرض کرو کہ مکانی $۱۰ = ۳$ والا ہے اور ماسک (۱۰) مکانی
کے کسی ماس کی مساوات ہے

$$۱۰ = ۳ + ۱$$

نقطہ (۱۰) سے اس پر کے عمود کی مساوات ہے

$$(۱۰ - ۳) + ۱ = ۱۰$$

مطلوبہ طریق حاصل کرنے کے لئے ان دو مساواتوں سے م کو ساقط کرنا چاہیے

پہلی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے $m - a = \frac{a}{b} = m^2 - a^2$
 اور دوسری اس طرح $m - a = \frac{a}{b} = m^2 - a^2$
 اسلئے $m^2 - a^2 = \frac{a}{b}$ اسلئے طریق مطلوب $a = 0$ ہے
 ۱۵۰۔ اگر ناقص کے ماسکوں سے کسی ماس پر عمود کھالے جائیں تو ان کا
 حاصل ضرب نصف محور اصغر کے مربع کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ناقص $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = 1$ ہے اور ماسکے (۱۵۰) اور
 (۱۵۰) ہیں۔

اب ناقص کا کوئی ماس لا جم $m +$ واجب $a = c$ سے تعبیر ہوتا ہے جہاں

$$c = m + a \text{ جم } a + b \text{ جب } a$$

ماسکوں (۱۵۰) اور (۱۵۰) سے اس ماس پر عمود ہیں بالترتیب

$$- \text{ لا جم } m - c \text{ اور لا جم } m - c$$

ان کا حاصل ضرب $c = m - a$ جم a

$$= \text{ لا جم } m + b \text{ جب } a - \text{ لا جم } m$$

$$= \text{ لا جم } m (1 - a) + b \text{ جب } a$$

$$\text{ لیکن } b = m (1 - a)$$

اس لئے حاصل ضرب $b = m (جم m + جب a)$

$$b =$$

مشقیں

۴۸۔ اسی طریقہ سے مسئلہ دفعہ ۱۵۰ کو زائد $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 1$ کی صورت

میں حاصل کرو۔

ناقص کے لئے مسئلہ دفعہ ۱۵۰ کو اُس صورت میں ثابت کرو جبکہ ماس کی

مساوات $m - a + m^2 + b = 1$ لی جائے۔

باب دوازدهم پر متفرق مشقیں

۴۹۔ اس کی شرط معلوم کرو کہ خط ل لا + م م = ع مخروطی مآ = لا + ب لا کو مس کرے۔

۵۰۔ نقطہ (۱، ۱) میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محور لا کے ساتھ زاویہ مس ایسا بنا تا ہے، نقطہ (۱، ۱) سے اُن نقاط کے فاصلے معلوم کرو جہاں یہ

$$(۱) \text{ ناقص } \frac{۱}{۲} \text{ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ م} = ۱$$

$$(۲) \text{ قائم قطع زائد لا} + \text{م} = ۲$$

$$(۳) \text{ مکانی } \text{م} = ۱ + ۲ + لا$$

سے ملتا ہے۔

۵۱۔ نقطہ و (لا، م) میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محور لا سے زاویہ

$$\text{طہ بنا تا ہے، اگر یہ ناقص } \frac{۱}{۲} \text{ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ م} = ۱ \text{ سے ن اور ق پر ملے تو}$$

$$\text{ثابت کرو کہ ون} \times \text{وق} = \frac{۱ - \frac{۱}{۲} \text{ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ م}}{\frac{۱}{۲} \text{ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ م}} \text{، ون} + \text{وق} = \frac{(\frac{۱}{۲} \text{ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ م})^2}{\frac{۱}{۲} \text{ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ م}}$$

$$\frac{(\frac{۱}{۲} \text{ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ م})^2}{1 - \frac{۱}{۲} \text{ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ م}} = \frac{۱}{\text{وق}} + \frac{۱}{\text{ون}}$$

۵۲۔ ثابت کرو کہ اُن دو خطوط مستقیم کے جوڑے کی مساوات جو مبدأ کو خط مستقیم

$$\text{لا-ج} + \text{لہ-م} = ۰ \text{ اور } \frac{۱}{۲} \text{ لا} - \frac{۱}{۲} \text{ م} + \frac{۱}{۲} \text{ لا} = ۰ \text{ کے نقاط تقاطع سے ملاتے ہیں}$$

$$\text{لا} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) - \left(\frac{۱}{۲} \text{ لہ} + \frac{۱}{۲} \text{ م} \right) = ۰$$

ایک مشترک اصل رکھتی ہیں۔
یہ حاصل کرو کہ مشترک نقاط اور (لا، با) کے ملانے والے خطوط
کی مساوات ہے

(لا + لا + ۲ + ہ + ب + ما + ۲ + گ + لا + ۲ + ف + ما + ج) (ف + لا + ق + ما + ر)

۲ - (ف + لا + ق + ما + ر) {لا (لا + ب + ہ + گ) + ما (ہ + لا + ب + ف)}

+ گ + لا + ف + ما + ج {ف + لا + ق + ما + ر}

+ {لا + لا + ۲ + ہ + ب + ما + ۲ + گ + لا + ۲ + ف + ما + ج} {ف + لا + ق + ما + ر}۔

دفعہ ۳۸ حصہ اول کی مدد سے اس نتیجہ کی اُس صورت میں تصدیق کرو جبکہ (لا، با)
مبدأ ہو۔



میں سے معلوم ہوتا ہے کہ مظلوم طریق کی مساوات ہے

$$ل + لا + م + گ + م (م + لا + ب + م + ف) = (۱)$$

۱۵۲۔ متوازی وتروں کے نقاط نصف کے طریق معلوم کرنے کا وہ سراسر طریقہ۔

باب با قبل کے پہلے طریقہ کو ہم اس جگہ استعمال کریں گے

فرض کرو کہ متوازی وتر نور لا سے زاویہ ط بناتے ہیں اور $م = لا$

کے متوازی ہیں یعنی $م = مس ط$ نیز فرض کرو کہ ان میں سے ایک وتر کا نقطہ نصف (لا، م) ہے تب (لا، م) سے ان نقاط کے فاصلے جہاں یہ وتر مخروطی سے ملتا ہے ذیل کی مساوات درجہ دوم سے حاصل ہوتے ہیں

$$ر (ل + جم ط + م + جب ط + جم ط + ب + جب ط) +$$

$$+ ر (جم ط + ل + لا + م + گ + م + جب ط + لا + ب + م + ف) +$$

$$+ ل + لا + م + ر + لا + م + ب + م + گ + ل + ف + م + ج + م$$

چونکہ وتر کی نصفیت (لا، م) پر ہوتی ہے اس لئے یہ فاصلے مقدار میں

ساوی اور علامت میں مختلف ہیں یعنی ان کا مجموعہ صفر ہے۔

اس کے لئے یہ شرط ہے کہ $ر$ کا سراپہ کی مساوات میں صفر ہو یعنی

$$جم ط (ل + لا + م + گ + م + جب ط + لا + ب + م + ف) = ۰$$

اس لئے چونکہ $م = مس ط$

$$ل + لا + م + گ + م (م + لا + ب + م + ف) = ۰$$

یعنی (لا، م) کا طریق ایک خط مستقیم ہے جسکی مساوات ہے

$$ل + لا + م + گ + م (م + لا + ب + م + ف) = ۰ \dots (۱)$$

نتیجہ صریح۔ $م$ کی تمام قیمتوں کے لئے یہ خط خطوط

$$ل + لا + م + گ + م = ۰ \quad \text{اور} \quad م + لا + ب + م + ف = ۰$$

کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

اب ہم جانتے ہیں کہ مرکز دار تراش کی صورت میں یہ خط مرکز میں سے

گزرتے ہیں کیونکہ مرکز ان دونوں خطوں پر واقع ہے پس معلوم ہوا کہ مرکز دار مخروطی

میں متوازی وتروں کے نقاط نصف کا طریق ہمیشہ منحنی کا قطر ہوتا ہے [دیکھو دفعہ ۹۶]

اگر مخروطی قطع مکانی ہو تو خط

لا + ص + ما + گ = ۰ اور ص + لا + ب + ما + ف = ۰

یہ متوازی ہیں پس م کی مختلف قیمتوں کے لئے طریق متوازی خطوط مستقیم سے تعبیر ہوتے ہیں۔

مکانی ما = م لا = ۰ اور ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ب}{۲} = ۱$ کی صورت میں اس جگہ ہم اوپر کی تحقیق کا جدا گانہ اضافہ کرینگے۔
(۱) مکانی ما = م لا کے لئے مساوات درجہ دوم ہوگی

$$(لا + رجب ط) = م ر (لا + رجم ط)$$

یا رجب ط + ۲ (ماجب ط - م رجم ط) + م لا - م لا = ۰
اگر (لا) = ۱ وتر کا نقطہ تنصیف ہو تو اس میں مساوی اور مختلف علامت ہوں گی

$$\text{یعنی } ماجب ط - م رجم ط = ۰$$

$$\therefore ۱ = م رجم ط$$

اس لئے اگر مکانی کے متوازی وتروں کا نظام ایسا ہو کہ اس کے وتر محور سے

زاویہ ط بنائیں تو ان کے نقاط تنصیف کا طریق ما = م رجم ط ہوگا۔

(۲) ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ب}{۲} = ۱$ کے لئے مساوات ہوگی

$$۱ = \frac{(لا + رجم ط)}{۱} + \frac{(ماجب ط)}{۲}$$

$$۱ = \frac{(لا + رجم ط)}{۱} + \frac{(ماجب ط)}{۲} + \frac{(لا)}{۱} + \frac{ب}{۲} - ۱ = ۰$$

اگر (لا) = ۱ وتر کا نقطہ تنصیف ہو تو ر کا سر لازماً صفر ہوگا یعنی

$$۰ = \frac{لا رجم ط}{۱} + \frac{ماجب ط}{۲}$$

اس لئے ایسے وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو محور اعظم سے زاویہ ط بنائیں

$$\text{خط } ۰ = \frac{لا رجم ط}{۱} + \frac{ماجب ط}{۲} \text{ ہے}$$

اگر وتر $ما = م$ لا کے متواری ہوں تو مس $ط = م$

اور طریق مطلوب ہوگا $ما = - \frac{ب^2}{وا} = \frac{ب^2}{جیب ط}$ لا معنی $ما = - \frac{ب^2}{وا}$

۱۵۲۔ مخروطی کا صرف ایک ہی وتر ایسا ہو سکتا ہے جسکی نصفیت ایک نقطہ معلوم پر ہوتی ہے
فرض کرو کہ (لا، با) میں سے گذر نیوالے وتر کی مسادات ہے

$$\frac{لا - لا}{جیب ط} = \frac{ما - با}{جیب ط}$$

اگر اسکی نصفیت (لا، با) پر ہوتی ہو تو

$$مس ط = - \frac{وا + لا + جیب با + گ}{جیب لا + جیب با + ت} \quad [دفعہ ۱۵۱]$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط کی صرف ایک ہی سمت ہو سکتی ہے یعنی ایسا
وتر صرف ایک ہی ہے اور اسکی مسادات ہے $ما - با = (لا - لا) مس ط$

جہاں مس ط کی قیمت اوپر بندرج ہے پس اس وتر کی مسادات ہوگی

$$(لا - لا) (وا + لا + جیب با + گ) + (ما - با) (جیب لا + جیب با + ت) = ۰$$

وتر کی مسادات کی یہ شکل بعض اوقات بہت کار آمد ہوتی ہے۔

ناقص $\frac{لا}{وا} + \frac{ب^2}{جیب ط} = ۱$ کی صورت میں ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات

$$\frac{لا}{وا} + \frac{ب^2}{جیب ط} = \frac{ما}{جیب ط} + \frac{لا}{وا}$$

ہے اور مکانی $ما = م$ لا کی صورت میں

$$ما - با = لا - لا = ۰$$

اس مساوات کو لکھنے کا عام طریقہ یہ ہے ”دائیں رکن کو اسطرح لکھ جاؤ گویا

ماس کی مسادات لکھ رہے ہو اور بائیں جانب کی رقم مائل کو اس طرح منتخب

کرو کہ اس مساوات سے تعبیر ہو نیوالا خط مستقیم (لا، با) میں سے

گذرے۔“

اس کے استعمال کی توضیح کے لئے دیکھو مثال صفحہ ۲۵۱

مشقیں

۱۔ ابتدائی اصولوں کی بناء پر ہر دو قاعدوں (دفعات ۱۵۱، ۱۵۲) سے لا + لا + لا + لا کے اُن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق دریافت کرو جو (۱) لا = لا (۲) لا = لا کے متوازی ہوں۔

۲۔ ثابت کرو کہ مکانی ما = م لا میں اُن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو ما = م لا کے متوازی ہوں خط مستقیم ما = م لا ہے۔

۳۔ زائد لا = م لا - م لا = ا کی صورت میں دونوں قاعدوں سے ثابت کرو کہ مطلوبہ طریق خط مستقیم ما = م لا ہے۔

۴۔ عام صورت میں ثابت کرو کہ اُن تمام وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو ثابت نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں ذیل کی مخروطی تراش ہے
لا + لا + لا + لا + لا + لا (گ - لا - لا - لا - لا - لا) + (ف - لا - لا - لا - لا - لا) = ۰

[اشارہ۔ اسکے لئے شرط لکھو کہ وہ وتر جسکی تنصیف لا کا پر ہوئی ہے (ما) میں سے گزرتا ہے]

۱۵۴۔ ادپر ہم نے اجمالی طور پر اُن طریقوں کو بیان کیا جو عام مساوات کی صورت میں استعمال ہو سکتے ہیں اب ہم بالخصوص ناقص زائد اور مکانی کی صورت میں متوازی وتروں کے نظاموں کی خاصیتوں پر تفصیل بحث کریں گے۔

اگرچہ زائد اور ناقص کی خاصیتوں میں بالعموم خاص مشابہت پائی جاتی ہے تاہم یاد رہے کہ ان میں ضروری فرق بھی موجود ہیں مثلاً ہم جانتے ہیں کہ انکی مساویں بالفاظ اہلی محوریوں کے بہت مشابہ ہیں مگر اُن مساواتوں سے جو منحنیات کی

شکلیں حاصل ہوتی ہیں وہ ایک دوسرے سے کہیں مختلف ہیں نیز یہ ضروری فرق اگلے چند صفحات میں اکثر زیر بحث رہیگا کہ زائد کا ایک مخصوص سے حقیقی نقاط پر نہیں ملتا۔ اس کتاب میں جہاں تک مکانی کی خاصیتوں پر بحث ہوگی وہ مرکز دار

تراشوں کی خاصیتوں سے بالکل جدا گانہ ہیں۔

۱۵۵۔ اگر مرکز دار مخروطی تراشوں کے دو قطروں میں سے ایک قطر دوسرے

کے متوازی وتروں کی تقصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے کے متوازی وتروں کی تقصیف کریگا۔

مرکز کو متبادلاً مانو، اس طرح مخروطی کی مسادات اس شکل کی ہوگی

$$1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

نفرض کرو کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ دو قطر ہیں۔

فرض کر دو کہ (لا با) (لا با) ایسے وتر کے سرے ہیں جو مائے م لا کے

متوازی ہے جیسا ہم نے دفعہ ۱۵ میں دیکھا اس وترگی مساوات ہوگی

$$\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)b + \left\{\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-b\right) + \left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\right\} \infty + \left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)2$$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

چونکہ یہ $m = \lambda$ کے متوازی ہے اس لئے

$$\mu = \frac{11}{16}$$

$$m = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\infty + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})1}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\infty + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\infty}$$

پس اگر (لاما) دتر کا نقطہ تعصیف ہو تو یہ مساوات ہوگی

$$r = \frac{bpx_{\infty} + Urx_1}{bpx_{\infty} + Urx_{\infty}}$$

پس $6 = m$ لا کے متوازی وتروں کے تقاطع تنصیف کا طریق ہے

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z = 0$$

حسب مفروض یہ ہے $m = 1$ $\therefore m = \frac{m+1}{m+2}$

$$1 + \dots + (m+m) + \dots + m = m^2 \dots (m)$$

اسی طرح اگر $a = \frac{b}{c}$ یا $b = ac$ کے متوازی وتروں کی تصنیف کرے تو

$$0 = 1 + (m + m) - m + m$$

اور یہ وہی شرط ہے جو اوپر معلوم کی گئی ، اس لئے مسئلہ ثابت ہوا

مشقیں

۱۔ ابتدائی اصولوں کی بنیاد پر دو قاعدوں (دفعات ۱۵۱، ۱۵۲) سے لا + لا + لا + لا کے اُن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق دریافت کرو جو (۱) لا = لا (۲) لا = لا کے متوازی ہوں۔

۲۔ ثابت کرو کہ مکانی لا = لا میں اُن وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو لا = لا کے متوازی ہوں خط مستقیم لا = لا ہے۔

۳۔ زائد لا = لا - لا = لا کی صورت میں دونوں قاعدوں سے ثابت کرو کہ مطلوبہ طریق خط مستقیم لا = لا ہے۔

۴۔ عام صورت میں ثابت کرو کہ اُن تمام وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق جو ثابت نقطہ (لا، لا) میں سے گزرتے ہیں ذیل کی مخروطی تراش ہے
لا + لا = لا + لا + لا (گ - لا - لا) (ب - لا - لا) (ف - لا - لا) = لا

[آشارہ۔ اسکے لئے شرط لکھو کہ وہ وتر منسلکی تنصیف لا کا پر ہوئی ہے (لا، لا) اس سے گزرتا ہے]

۱۵۲۔ اوپر ہم نے اجمالی طور پر اُن طریقوں کو بیان کیا جو نام مساوات کی صورت میں استعمال ہو سکتے ہیں، اب ہم بالخصوص ناقص زائد اور مکانی کی صورت میں متوازی وتروں کے نظاموں کی خاصیتوں پر بالتفصیل بحث کریں گے۔

اگرچہ زائد اور ناقص کی خاصیتوں میں بالعموم خاص مشابہت پائی جاتی ہے تاہم یاد رہے کہ ان میں ضروری فرق بھی موجود ہیں مثلاً ہم جانتے ہیں کہ اتنی مساویں بلحاظ اہلی محوروں کے بہت مشابہ ہیں مگر اُن مساواتوں سے جو منحنيات کی شکلیں حاصل ہوتی ہیں وہ ایک دوسرے سے کہیں مختلف ہیں نیز یہ ضروری فرق اگلے چند صفحات میں اکثر زیر بحث رہیگا کہ زائد کا ایک مخصوص سے حقیقی نقاط نہیں ملتا۔ اس کتاب میں جہاں تک مکانی کی خاصیتوں پر بحث ہوگی وہ مرکز دار تراشوں کی خاصیتوں سے بالکل جداگانہ ہیں۔

۱۵۵۔ اگر مرکز دار مخروطی تراشوں کے دو قطروں میں سے ایک قطر دوسرے قطر

کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو دوسرا قطر چلے کے متوازی وتروں کی تنصیف کریگا۔

مرکز کو مبدأ مانو، اس طرح مخروطی کی مساوات اس شکل کی ہوگی

$$ل + لا + ۲ ص لا + ما + جب ما = ۱$$

فرض کر دو کہ ما = م لا اور ما = م لا دو قطر ہیں۔

فرض کر دو کہ (لا، با) (لا، با) ایسے وتر کے سرے ہیں جو ما = م لا کے

متوازی۔ چنے جیسا ہم نے دفعہ ۱۵ میں دیکھا اس وتر کی مساوات ہوگی

$$و (لا-لا) (لا-لا) + ص (لا-لا) (لا-لا) + (با-با) (با-با) + جب (با-با) (با-با) =$$

$$ل + لا + ۲ ص لا + ما + جب ما = ۱$$

چونکہ یہ ما = م لا کے متوازی چنے ہیں اس لئے

$$\frac{لا}{ما} = \frac{لا}{ما} = م -$$

$$یا \quad م - = \frac{(لا + لا) + ص (لا + لا)}{(با + با) + جب (با + با)}$$

پس اگر (لا، ما) وتر کا نقطہ تنصیف ہو تو یہ مساوات ہوگی

$$م - = \frac{لا \times ۲ + ص لا \times ۲}{ما \times ۲ + جب ما \times ۲}$$

پس ما = م لا کے متوازی وتروں کے تقاطع تنصیف کا طریق ہے

$$لا + ص ما + م (ص لا + جب ما) = ۰ یا لا (لا + ص م) + ما (ص جب + م) = ۰$$

حسب مفروض یہ ہے ما = م لا $\therefore م = \frac{لا + ص م}{ص جب + م}$

$$یا \quad ل + ص (م + م) + جب م م = ۰ \dots \dots \dots (۴)$$

اسی طرح اگر ما = م لا اور ما = م لا کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو

$$جب م م + ص (م + م) + ل = ۰$$

اور یہ وہی شرط ہے جو اوپر معلوم کی گئی، اس لئے مسئلہ ثابت ہوا

شرط (۴) یاد رکھنی چاہیے۔

نوٹ اس قطر کی مساوات جو $م = لا$ کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے عام نتیجہ میں $گ = ف = .$ اور $ج = ا =$

رکھنے سے حاصل ہو سکتی تھی، لیکن یہاں اسے دوبارہ معلوم کر لینا مناسب ہے، اس طرح ہر صرف وتر کی مساوات کا ہی یاد رکھنا ضروری ہوتا ہے۔

۱۵۶۔ مزدوج قطر۔ تعریف۔ اگر دو قطر ایسے ہوں کہ ان میں سے کوئی سا ایک قطر دوسرے کے تمام متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو انہیں مزدوج قطر کہتے ہیں۔

مزدوج قطروں کی نہایت سادہ صورت دائرہ کے دو علی الفواقم قطر ہیں ان میں سے ہر ایک قطر دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

۱۵۷۔ کسی قطر کے سروں پر کے مماس اسکے مزدوج کے متوازی ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ $ق ق' ق'' ق''' ق'''$

متوازی وتروں کا ایک نظام ہے اور قطر $ج ن$ انکی تنصیف کرتا ہے

ہیں ثابت کرنا ہے کہ $ن$ پر کا مماس ہر ایک وتر کے متوازی ہے۔

اب نقاط $ق$ اور $ق'$ اور $ق''$ اور $ق'''$ اور $ق'''$ کی متقابل جانبوں

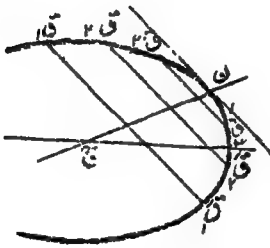
میں واقع ہیں نیز ہم جانتے ہیں کہ جب ایک وتر کے سرے ایک دوسرے کے لائنتہا قریب ہوں تو اسوقت وہ مماس بن جاتا ہے پس چونکہ وتر کے سرے ہمیشہ

$ج ن$ کی متقابل جانبوں میں واقع ہونگے اس لئے معلوم ہوا کہ اگر وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوں تو انہیں نقطہ $ن$ پر منطبق ہونا چاہئے اس لئے

$ن$ پر کا مماس ایک وتر کا انتہائی مقام ہے اسلئے یہ $ق ق'$ وغیرہ کے متوازی ہے

مشقیں

۵۔ ناقص $\frac{لا}{لا} + \frac{لا}{لا} = ا$ کے اس وتر کی مساوات جبکی تنصیف (لا) پر ہوتی ہے



شکل ۵۸

$$-\frac{1}{c} + \frac{u}{v} = \frac{11}{c} + \frac{uv}{v}$$

۶۔ ابتدائی اصولوں سے حسب دفعہ ۱۵۵ ثابت کرو کہ اگر $\frac{1}{m} = \frac{1}{n}$ یا ناقص

۱ = $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ کے اُن سب وتروں کی تعریف کرے جو $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

کے متوازی ہوں تو $m = \frac{p}{v}$

۷۔ زمانہ $\frac{11}{19}$ - $\frac{11}{19}$ = ۱ کی صورت میں اسطرح ثابت کر دے کہ یہ شرط ہونی چاہیے

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

۸۔ تھیلی طریقہ سے دفعہ ۱۵ کے مسئلہ کو ثابت کرو۔

[فرض کر دو کہ مخروطی $لا + ۲ = لا + ج + ما = اے (لا + ج)$ پر کاہن ہے

$$1 = (1 \cdot b + 0 \cdot c) \cdot b + (0 \cdot b + 1 \cdot c) \cdot c$$

یہ = م لا کے متوازی ہوگا اگر (ا + ب + ج) + م = (د + ب + م) =

یعنی اگر (لاہ) مزدوج و تہریر واقع ہو

۹۔ اگر $a = m$ اور $b = m$ ، تو $a + b = m + m = 2m$ ہے۔

مزدوج قطر ہوں تو اس کے لئے کیا شرط ہونی چاہئے۔

۱۰۔ ثابت کر دو کہ $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ کے متقارب $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ کے لیے $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ ۔

کے مروج قطر ہونگے اگر $a + b + c = 2r$ ۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ اگر ناقص کی مساوات $2\lambda + 3\mu = 4$ ہو تو قطر $a = 2\lambda$ اور $b = 4 - 2\lambda$ ۔

ایک دوسرے کے مزدوج ہیں۔

۱۲۔ مثال ۶ کے نتیجہ کو استعمال کرنے سے اس امر کی شرط معلوم کر دو کہ خطوط

۱. لا + لا = لا ما + ما = لا . ناقص $\frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3}{12} = 1$ کے مزید قطر پڑی

۱۳- ثابت کرد که خطوط $1A + 2A + 3A + 4A + 5A = 0$ مخروطی $1A + 2A + 3A + 4A + 5A + 6A = 0$

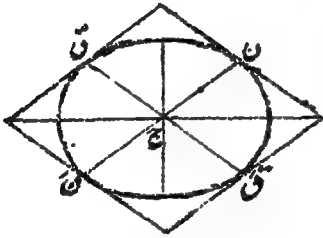
کے مزدوج قطریوں گے اُپر

اب ۱۰ ب ۲ - ۳ = ۰

[دیکھو دفعہ ۱۵۵] اس نتیجہ کو یاد رکھنا چاہیے
۱۴۔ ثابت کرو کہ قائم قطع زائد کے مزدوج قطر کسی ایک شعارب سے مساوی زاوے بناتی ہیں
[زائد کی مسافات لا = ج فرض کرو]

۱۵۔ اگر دائرہ کو مرکز دار تراشیں خیال کیا جائے تو اس کے مزدوج قطر کیا ہونگے؟ اس دفعہ کے غائبوں سے ثابت کرو کہ یہ علی القوائم ہیں۔
۱۵۸۔ ناقص کے مزدوج قطروں کی خاصیتیں۔

فرض کرو کہ ج ن اور ج ق ناقص لا + ج = لا = ۱ کے مزدوج قطر ہیں جہاں ج ب ناقص کے نصف محور ہیں اور ن کے عدد (لا) ہیں اور ق کے (لا) اس طرح نقطہ ن (لا) ہوگا اور ق (لا)۔ غائبیں حسب ذیل ہیں



شکل ۵۹

(۱) لا لا + لا لا = (۵)
کیونکہ فرض کرو کہ ج ن کی مسافات لا = ج لا ہے اور ج ق کی لا = ص لا اب چونکہ یہ مزدوج قطر ہیں اسلئے ص ص = لا

لیکن ص لا اور ص لا = لا
پس لا لا = لا لا یا لا لا + لا لا = لا لا

(۲) لا لا = لا لا اور ج ب = لا لا

جہاں دونوں بنجی یا دونوں ادیر کی علامتیں ایک ساتھ لینی چاہئیں۔
(۱) کی رو سے لا لا = لا لا اور تناسب کے خواص کی رو سے

$$1 \pm = \frac{\pi}{\pi} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\pi} + \frac{\pi}{\pi}}}{\sqrt{\frac{\pi}{\pi} + \frac{\pi}{\pi}}} = \text{ان میں سے ہر نسبت}$$

اس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے، شقیہ علامت کے پیدا ہونے کا باعث یہ ہے کہ اگر ایک قطر کا سران متعین کر لیا جائے تو ق و دوسرے قطر کا کوئی سا سہرا ہو سکتا ہے۔ شکل میں ادیکہ کی علامت ق سے متعلق پہلی ق سے

نتیجہ صریح۔ $\frac{ب}{ق} = \frac{ل}{د}$ اور $\frac{ب}{ق} = \frac{ل}{د}$ (۳) دو مزدوج نیمہ قطروں کے مربعوں کا مجموعہ نصف محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ (۷)

کیونکہ ج ن = ل + ب اور ج ق = ل + د
لیکن ل = $\frac{ب}{ق} \times د$ اور $\frac{ب}{ق} \times د = \frac{ب}{ق} \times د$ اس لئے

$$\begin{aligned} ج ن + ج ق &= ل + ب + ل + د \\ &= (ل + ب) + (ل + د) \\ &= (ل + ب) + (ل + د) \end{aligned}$$

∴ ج ن + ج ق = ل + ب + ل + د (۷)
(۸) ج ن اور ج ق کو متصل اضلاع مان کر جو متوازی الاضلاع بنایا جائے اس کا مرقبہ = ل ب (۸)

متوازی الاضلاع = $\Delta ۲ = ج ن ق = \frac{۱}{۲} (ل + د - ل - د) = ل - د$
 $ل = \frac{ب}{ق} \times د + ل = ل + \frac{ب}{ق} \times د$
= ل ب ادیہی مطلوب تھا

(۵) ج ق = سن × سن
ہم عرفین کو ل کی رقم میں بیان کرینگے جو ن کا فصلہ ہے۔

$$ج ق = لا + با = \frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = \frac{لا + با}{ب} = \frac{لا}{ب} + \left(1 - \frac{لا}{ب}\right) = \frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب}$$

$$= \frac{لا - \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب}}{ب} = \frac{لا}{ب} \quad [دفعہ ۵۵]$$

$$نیز س ن \times س ن = (1 + لا) (1 - لا) = 1 - لا^2 = 1 - \frac{لا^2}{ب^2} = \frac{ب^2 - لا^2}{ب^2} \quad [دفعہ ۶۳]$$

$$\therefore ج ڈ = س ن \times س ن = \frac{ب^2 - لا^2}{ب^2} \quad (۹)$$

(۶) اگر اس عمود کا طول جو مرکز سے ن پر کے ماس پھینچا جائے ع ہو تو ع \times ج ق = لا ب

$$ن (لا + با) پر کا ماس = \frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = 1 = ۱$$

$$\therefore ع = \frac{1}{\frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب}}$$

$$ج ڈ = لا + با = \frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = \frac{لا + با}{ب} = \frac{لا}{ب} + \left(1 - \frac{لا}{ب}\right) = \frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب}$$

$$اے ع \times ج ق = لا ب \quad (۱۰)$$

(۶) نتیجہ (۶) سے بھی حاصل ہو سکتا ہے کیونکہ ن اور ق پر کے ماس س ج ن اور ج ق کے ساتھ مل کر نتیجہ (۶) کا متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

۱۵۹ - مساوی مزدوج قطر - اگر ناقص کے دو قطر مزدوج ہوں اور باہم

مساوی بھی ہوں تو انہیں مساوی مزدوج قطر کہتے ہیں۔

طالب علم ان کی حسب ذیل خاصیتیں خود حاصل کرے۔

مشقیں

۱۔ اگر ناقص میں محوروں کے سروں پر ماس کھینچے جائیں تو ان سے ایک مستطیل بنتا ہے ثابت کرو کہ اس مستطیل کے قطر مساوی مزدوج قطر ہیں اور ان کی مساوی معلوم کرو۔

ما میں جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی اس میں ۱ کا سرعہ قدر ہونا چاہیے (اس لئے
ص = ۰) پس مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$لا + ب = ما = ۱$$

اگر قطروں کے طول ۲ و ۲ ب ہوں تو مساوات $لا + ب = ما = ۱$ میں
ما = ۰ رکھنے سے لا کی قیمتیں لازماً $لا = ۱$ حاصل ہونی چاہئیں

$$لا = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \quad \text{اسی طرح} \quad ب = \frac{۱}{۲}$$

پس مساوات مطلوبہ ہے $\frac{لا}{۲} - \frac{ب}{۲} = ۱$ (۱۱)

جو بعینہ اُس شکل کی مساوات ہے جو اصلی محوروں کو حوالہ کے محور ماننے سے
حاصل ہوتی ہے، لیکن یاد رہے کہ موجودہ صورت میں محور مائل ہیں۔

نوٹ اس صورت میں بھی تماس کی مساوات اُس قطر کی مساوات
جو $ما = ۰$ کے متوازی دتروں کی تنہیف کرے اور دو نقطوں کے
باہم مزدوج ہونے کی شرط کسب وہی ہوئی جو قائم محوروں کی صورت میں۔

مشق

۲۲۔ ناقص کی مساوات بلحاظ اس کے مساوی مزدوج قطروں کے
 $لا + ما = ج = ۰$ ہوگی۔

۱۶۱۔ زائد کے مزدوج قطر۔ اگر زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک
منفی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہو تو دوسرا سے خیالی نقاط پر ملیگا۔

فرض کرو کہ زائد کی مساوات ہے

$$۱ = \frac{لا}{۲} - \frac{ب}{۲}$$

تب $ما = ۰$ کا منفی سے حقیقی نقاط پر ملیگا اگر $م$ تعداداً $\frac{۱}{۲}$ سے
کم ہو کیونکہ $ما = \frac{۱}{۲}$ لا منفی کا متقارب ہے اور کوئی خط جو متقارب
اور قاطع محور کے درمیانی زاویہ سے بڑا زاویہ قاطع محور کے ساتھ بنائے

منحنی سے نہیں مل سکتا (دفعہ ۷۶)
اب $ما = م لا$ اور $ما = م لا$ زائد کے مزدوج قطر ہونگے اگر
$$\frac{ما}{لا} = \frac{م لا}{ما}$$

پس اگر $م$ $\left(\frac{ما}{لا} = \frac{م لا}{ما} \right)$ اور اگر $م$ $\left(\frac{ما}{لا} = \frac{م لا}{ما} \right)$ تو $م$ $\left(\frac{ما}{لا} = \frac{م لا}{ما} \right)$
اس لئے ایک قطر منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور دوسرا خیالی نقاط پر۔
ایسا زائد کی صورت میں متوازی وتروں کا نظام ایسا ہو سکتا ہے کہ اس کے
کسی وتر کے سرے منحنی کی ایک ہی شاخ پر یا مختلف شاخوں پر واقع ہوں پہلی
صورت میں صرف ایک وتر کو اس کے متوازی حرکت دینے سے ہم ایسے منحنی کا ماس
بنا سکتے ہیں اس لئے نقطہ تماس میں سے گزرنے والا مزدوج قطر منحنی سے
حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور ان میں سے ایک نقطہ ایک شاخ پر واقع ہوتا ہے اور دوسرا
دوسری شاخ پر لیکن اگر وتر کے سرے مختلف شاخوں پر واقع ہوں تو وتر کا طول
نہیں لا آتا کہ منحنی پر ہو سکتا ہے کہ شاخیں کھینچ کر، دوسرے کے لا انتہا قریب نہیں
آ سکتے ہاں اس کے مزدوج قطر منحنی سے حقیقی نقاط پر نہیں ملتا۔

۱۶۲۔ تانص کی صورت میں اگر ایک قطر دیا ہوا ہو تو اس کے مزدوج قطر کے
سروں سے ہم نے وہ نقطے مراد لئے ہیں جہاں یہ منحنی سے ملتا ہے لیکن زائد کی
صورت میں چونکہ دو مزدوج قطروں میں سے ایک قطر منحنی سے خیالی نقطوں پر
ملتا ہے (دفعہ ۱۶۱) اس لئے اس کے سروں کی حسب بالا تعریف
نہیں ہو سکتی پس اس جگہ ہمیں بالکل نئے تخیلات سے کام لینا ہوگا انہیں ہم
اگلی دفعات میں بیان کریں گے۔

۱۶۳۔ مزدوج قطع زائد۔ تعریف۔ جس زائد کی مسادات

$$\frac{لا}{ما} - \frac{ما}{لا} = ۱ - \dots \dots (۱۲)$$

ہے اس کو زائد $\frac{لا}{ما} - \frac{ما}{لا} = ۱$ کا مزدوج قطع زائد کہتے ہیں

۱۶۴۔ زائد اور اس کے مزدوج زائد کے خواص۔

(۱) دونوں خفیات کے محور وہی ہوتے ہیں لیکن ایک کا قاطع محور دوسرے کا مزدوج محور ہوتا ہے اور برعکس اسکے۔

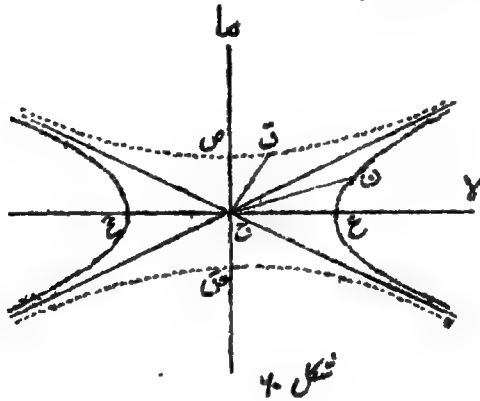
قاطع محور وہ محور ہے جو مخفی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے۔ اس تعریف کو ملحوظ رکھتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ ما =

$$1 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

کا قاطع محور ہے اور

$$1 - \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{c^2}$$

کا مزدوج محور ہے کیونکہ اس سے یہ خیالی نقاط پر ملتا ہے صریحاً لا = ۰۔
مؤخر الذکر کا قاطع محور ہے۔



(۲) دونوں خفیات کے مقارب وہی ہوتے ہیں

دونوں کے مقارب صریحاً $\frac{a}{b} = \pm \frac{a}{c}$ ہیں کیونکہ مقاربوں کی

مساوات حاصل کرنے کے لئے ہم درجہ دوم کی رقوم کو صفر کے مساوی رکھتے ہیں [دفعہ ۱۶۴] (۳) مرکز میں سے گزرنیوالا کوئی خط ایک زائد سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور دوسرے سے خیالی نقاط پر بشرطیکہ یہ دونوں کا مشترک مقارب نہ ہو۔

کیونکہ $ما = م لا$ پہلے زائد سے ملیگا جہاں

$$لا = \left(\frac{۲}{ب} - \frac{۱}{ا} \right) = ۱ +$$

اور دوسرے سے ملیگا جہاں

$$لا = \left(\frac{۲}{ب} - \frac{۱}{ا} \right) = ۱ -$$

یہ خط پہلے زائد سے حقیقی نقاط پر ملیگا یعنی لا کی قیمت مثبت ہوگی اگر

$$\frac{۲}{ب} - \frac{۱}{ا} \text{ مثبت ہو}$$

اور یہ خط دوسرے سے حقیقی نقاط پر ملیگا اگر

$$\frac{۲}{ب} - \frac{۱}{ا} \text{ منفی ہو}$$

اس لئے اگر $م \pm \frac{۲}{ب}$ کے مساوی نہ ہو تو خط مذکور ایک منحنی سے حقیقی نقاط پر ملیگا اور دوسرے سے خیالی نقاط پر۔
دونوں منحنیات کی شکلیں تصویر ۶۰ میں دکھائی گئی ہیں مسلسل

منحنی مساوات $\frac{لا}{ا} - \frac{۲}{ب} = ۱ +$ کی ترسیم ہے اور نقطوں والا منحنی

$$\frac{لا}{ا} - \frac{۲}{ب} = ۱ - \text{ کی۔}$$

(۴) اگر دو قطر بلحاظ ایک زائد کے مزدوج ہوں تو وہ بلحاظ مزدوج زائد کے بھی مزدوج ہوں گے۔

$$ما = م لا \text{ اور } ما = م لا \text{ بلحاظ } \frac{لا}{ا} - \frac{۲}{ب} = ۱ = \frac{لا}{ا} - \frac{۲}{ب} \text{ کے مزدوج ہوں گے اگر } م = م$$

$$\frac{لا}{ا} - \frac{۲}{ب} = ۱ - \text{ یا } \frac{لا}{ا} - \frac{۲}{ب} = ۱ \text{ کیلئے نظرونکے ازدواج کی}$$

متناظر شرط لا اور ما کا ۱ اور جب کا باہم تبادلہ کرنے اور م کی بجائے $\frac{1}{م}$ اور م کی بجائے $\frac{1}{م}$ نکلنے سے حاصل ہوگی [کیونکہ اس صورت میں ما = م لا محور ما کے ساتھ ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا ماس $\frac{1}{م}$ ہے]

شرط مطلوبہ اس لئے یہ ہے

$$\frac{1}{م} \times \frac{1}{م} = \frac{1}{جب} \quad \text{یا} \quad م م = جب$$

جو پہلی صورت میں اوپر بیان کی گئی ہے اس لئے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ کسی زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک قطر اس زائد سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا قطر اسکے مزدوج زائد سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے۔ پس مزدوج قطروں کی ایک نئی تعریف ہم حسب ذیل وضع کرتے ہیں۔

۱۶۵۔ مزدوج نیم قطر۔ تعریف۔ اگر ایک قطر ن ج ن زائد $\frac{1}{ن}$ - $\frac{1}{جب}$ = ۱ سے حقیقی نقاط ن اور ن پر ملے تو

اس کا مزدوج قطر مزدوج زائد $\frac{1}{ن}$ - $\frac{1}{جب}$ = ۱ سے حقیقی نقاط ق اور ق پر ملیگا۔ ج ق کو ج ن کا مزدوج نیم قطر بلحاظ مقدار اور سمت کے کہتے ہیں۔

پس مزدوج قطر کے سرے وہ نقطے ہیں جہاں یہ مزدوج زائد سے ملتا ہے۔ ۱۶۶۔ ایک زائد دیا جواسے اس کے مزدوج زائد کی مساوات معلوم کر دو۔ سادہ سے سادہ صورت میں زائد اس کے متقاربوں اور اس کے مزدوج زائد کی مساواتیں بالترتیب یہ ہیں

$$\frac{1}{ن} - \frac{1}{جب} = ۱, \quad \frac{1}{ن} - \frac{1}{جب} = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{1}{ن} - \frac{1}{جب} = -۱$$

اب کسی اور محروں کے لحاظ سے (خواہ یہ محور قائم ہوں یا مائل)

ان مساواتوں کو تھیل کرنے کے لئے ہمیں اس قسم کے اندراج کرنے ہونگے

$$لا = لا + م + ن$$

 اوپر کی تین مساواتیں ہو جائیں گی

$$\frac{(لا + م + ن)}{ب} - \frac{(لا + م + ن)}{ب} = ۱$$

$$\frac{(لا + م + ن)}{ب} - \frac{(لا + م + ن)}{ب} = ۰$$

$$\frac{(لا + م + ن)}{ب} - \frac{(لا + م + ن)}{ب} = ۱$$

اس سے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ زائد کی مساوات سے متقاربوں کی مساوات
 حاصل کرنے کے لئے ہم زائد کی رقم مستقل سے ایک خاص مقدار مثلاً
 ۱۰ تفریق کرتے ہیں اور مزدوج زائد کی مساوات حاصل
 کرنے کے لئے ہم متقاربوں کی مساوات سے وہی مقدار ۱۰ تفریق کرتے ہیں
 یاد رہے کہ ۱۰ کا ایک کے مساوی ہونا ضروری نہیں کیونکہ ہر ایک
 مساوات کو انکا باہمی تعلق بدلنے کے بغیر ایک ہی مقدار سے ضرب
 دیا جاسکتا ہے [دفعہ ۹۰]

مثال - زائد لا + ما + م = ۰ کے مزدوج زائد کی مساوات معلوم کرو۔
 اوپر کی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$(لا + م) (۱ + ما) = ۰$$

$$۰ = (۱ + ما) (۱ + لا)$$

$$۰ = ۵ + (۱ + ما) (۱ + لا)$$

$$۰ = لا + ما + م + ۶$$

مشقیں

۲۵۔ ان زائدوں کی مساواتیں معلوم کرو جو بالترتیب

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 2 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 3 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 4 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 5 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 6 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 7 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 8 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 9 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 10 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r}$$

کے مزدوج ہوں۔

۲۶۔ $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ اور اس سے مزدوج زائد کی مساوات حاصل کرو۔

۲۷۔ اگر $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ جی جی ایک زائد کے مزدوج قطریوں جہاں ق مزدوج زائد پر واقع ہے تو ثابت کرو کہ ق پر کا ماس جی جی کے متوازی ہوگا۔

۲۸۔ زائد کے مزدوج قطروں کی خاصیتیں۔

فرض کرو کہ زائد $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ کے مزدوج نیم قطروں جی جی اور جی جی کے سرے (۱) اور (۲) ہیں جہاں ن زائد پر واقع ہے اور اس لئے ق مزدوج زائد پر ہے۔

$$\text{تب } \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 2 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 3 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 4 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 5 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 6 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 7 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 8 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 9 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 10 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r}$$

خواس ذیل کے ثبوت بالکل ویسے ہی ہیں جیسے ناقص کی صورت میں (دفعہ ۱۵۸) اور طالب علم انہیں مشق کے طور پر حل کرے۔

$$(1) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 2 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 3 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 4 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 5 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 6 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 7 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 8 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 9 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 10 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r}$$

$$(2) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 2 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 3 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 4 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 5 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 6 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 7 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 8 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 9 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 10 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r}$$

$$(3) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 2 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 3 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 4 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 5 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 6 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 7 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 8 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 9 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 10 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r}$$

(۴) جی جی اور جی جی کو متصل اضلاع مان کر جو متوازی الاضلاع بنایا جائے اس کا

رقبہ = $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ (۱۶)

$$(5) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 2 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 3 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 4 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 5 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 6 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 7 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 8 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 9 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} \quad 10 - \frac{1}{p} = \frac{1}{r}$$

(۶) اگر اس عمود کا طول جو مرکز سے ن پر کے ماس پر کھینچا جائے ع ہو تو

ع × ج ق = ا ب (۱۸)
۱۶۸۔ زائد کی مساوات جبکہ مزدوج قطروں کو حوالہ کے محور مانا جائے۔
چونکہ مرکز مبدا ہے اس لئے مساوات اس شکل کی ہوگی

$$ا^۲ + ۲ ص لا + ما + ب^۲ = ۱$$

اب محور لا ہر ایک ایسے وتر کی تنصیف کرتا ہے جو محور ما کے متوازی ہو اس لئے لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی اور مختلف الطولست قیمتیں حاصل ہونی چاہئیں اس لئے ص = ۰۔

اس لئے مساوات ہو جاتی ہے $ا^۲ + لا^۲ + ب^۲ = ۱$
اس لئے متقاربوں کی مساوات جو مبدا میں سے گزرنیوالے دو خطوط مستقیم ہیں یہ ہے $ا^۲ + لا^۲ + ب^۲ = ۱$ ۔

اس لئے وقفہ ۱۶۶ کی رو سے مزدوج زائد کی مساوات ہے

$$ا^۲ + لا^۲ + ب^۲ = ۱ - ۱$$

اب فرض کر دو کہ اس قطر کا طول جو محور لا پر منطبق ہوتا ہے اور منحنی کو کاٹتا ہے ۲ ا ہے اور دوسرے کا طول جو مزدوج زائد کو قطع کرتا ہے ۲ ب ہے۔
اس لئے اگر ہم مساوات $ا^۲ + لا^۲ + ب^۲ = ۱$ میں ما کو صفر کے مساوی رکھیں تو لازماً حاصل ہونا چاہیے $ا^۲ + لا^۲ = ۱$ اور اگر مساوات $ا^۲ + لا^۲ + ب^۲ = ۱ - ۱$ میں ہم $ا^۲ + لا^۲ = ۱$ رکھیں تو حاصل ہونا چاہیے $ب^۲ = ۰$ ۔

اس لئے $ا^۲ + لا^۲ = ۱$ اور $ب^۲ = ۰$ ۔

اس لئے مساوات ہوگی $\frac{ا^۲}{۱} - \frac{لا^۲}{۱} = \frac{۱}{۴}$ (۱۹)

مشقیں

۲۸۔ زائد $ا^۲ + لا^۲ + ب^۲ = ۱$ کا وہ قطر معلوم کر دو جو $ا^۲ + ب^۲ = ۰$ کا مزدوج ہو اور فی الحقیقت اس کی تصدیق کر دو کہ دو قطروں میں سے ایک منحنی سے حقیقی نقاط پر ملتا ہے اور دوسرا خیالی نقاط پر۔

۲۹۔ ثابت کرو کہ اگر متوازی الاضلاع ج ن ل ق کی تکمیل کی جائے تو ل ایک متقارب پر واقع ہوگا۔

۳۰۔ اگر زائد کے مزدوج نیم قطر عم اور بہ ہوں اور انکا درمیانی زاویہ عمہ ہو تو ثابت کرو کہ $\angle = \angle = \angle$ ۔ جب \angle اور \angle بہ جب سر = وب اس لئے اگر مزدوج قطروں کا ایک جوڑا دیا ہوا ہو اور ان کا درمیانی زاویہ بھی معلوم ہو تو بتاؤ کہ محوروں کے طول کس طرح معلوم کئے جائیں۔

۳۱۔ مشتق ۳۰ میں اگر $\angle = \angle$ ، $\angle = \angle$ ، $\angle = \angle$ ہو تو اعتبار یہ کے دوسرے متا۔ تک \angle اور جب کے طول معلوم کرو۔
۳۲۔ نقطہ ن (۱) زائد ۳ ا - ۲ ا = ۱ پر واقع ہے مزدوج قطروں ج ن اور ج ق کے طول اور انکا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

س ن اور س ن کی قیمتیں فی الحقیقت معلوم کرنے سے اسکی تصدیق کرو کہ

$$س ن \times س ن = ج ق$$

۱۶۹۔ مکانی کے متوازی وتر۔ مکانی کے متوازی وتروں کے نقاط نصفیت کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو منحنی کے محور کے متوازی ہے۔ اس جگہ ہم عام نتیجہ کو استعمال کر سکتے ہیں، لیکن ابتدا سے ہی عمل کرنا بہتر ہوگا۔

فرض کرو کہ نور قائم ہیں اور مکانی کی مساوات $\angle = \angle$ لا ہے۔ منحنی پر کے نقاط (ل، ل) اور (ل، ل) کو ملانے والے وتر کی مساوات ہوں

$$(\angle - \angle) = \angle - \angle$$

$$\angle + (\angle - \angle) = \angle + \angle$$

اگر یہ وتر $\angle = \angle$ کے متوازی ہو تو

$$\angle = \frac{\angle}{\angle + \angle}$$

چونکہ $\frac{1}{\angle + \angle}$ وتر کے نقطہ نصفیت کا معین ہے اس لئے نقطہ نصفیت

$$\frac{\angle}{\angle} = \angle \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\angle} = \frac{\angle}{\angle}$$

پر واقع ہے۔ یہ ہیں سنی تیج ثابت ہوتا ہے۔

۱۷۔ مکانی کا قطر۔ تعریف۔ ایسا خط جو مکانی کے محور کے متوازی ہو مکانی کا قطر کہلاتا ہے۔

مرکز دار نرائشوں کے سب قطر ایک نقطہ میں اکرتے ہیں جسے تراش کا مرکز کہتے ہیں لیکن یاد رہے کہ مکانی کے قطر سب ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔ پس مشابہت کو قائم رکھنے کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ مکانی کے سب متوازی قطر لا انتہا فاصلے پر ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر ملتے ہیں اس نقطہ کو ہم مکانی کا مرکز خیال کر سکتے ہیں۔

۱۸۔ مکانی کا تپڑاں تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو اسکے سرے پر کے تماس کے متوازی ہوں۔

اس صورت میں ثبوت بالکل ویسا ہے جو ناقص کی صورت میں اسے بطور مشق کے طالب علم کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔

مشقیں

۳۳۔ مکانی ما = ۳ لا کی صورت میں اس قطر کی مساوات معلوم کرو جو ما = لا کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے اس کے سرے کے محدود بھی معلوم کرو۔

۳۴۔ مکانی ما = ۴ لا + ۳ میں وہ قطر معلوم کرو جو ۲ لا - ما = ۰ کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے اس کے سرے کے محدود معلوم کرو اور اسکی تصدیق کرو کہ سرے پر کا تماس وتروں کے نظام کے متوازی ہے۔

۳۵۔ مکانی کی مساوات جبکہ کوئی قطر اور اس کے سرے پر کا تماس حوالہ کے محور ہوں۔

فرض کرو کہ قطر محور ولا ہے اور تماس و ما۔

ہم معلوم کرتے ہیں کہ عام مساوات

$$۱ لا + ۲ لا + ما + ب + ۲ گ + ۲ ف + ج = ۰$$

[شق ۱۱ دفعہ ۱۲۹ کی رو سے]

$$ق م = ۲ و م$$

$$س ۲ =$$

$$\therefore ۲ س ۲ = ۲ و م = ۲ و م = ۲ و م = ۲ و م$$

$$\therefore ۲ س ۲ = ۲ و م$$

۱۷۳- دفعات ۱۶۰، ۱۶۸، ۱۷۲ کے نتائج کا مقابلہ اگر مرکز دار تراشوں کی اُن مساداتوں کے ساتھ کیا جائے جبکہ اصلی محور حوالہ کے محور ہوں تو ظاہر ہے کہ مسادات

$$\frac{لا}{۲} + \frac{لا}{۲} = \frac{لا}{۲} - \frac{لا}{۲} = ۱ = \frac{لا}{۲} = ۲ و م$$

کی شکلیں دونوں صورتوں میں وہی ہیں فی الحقیقت اصلی محور دفعات ۱۶۰، ۱۶۸ اور ۱۷۲ کے محاور کی خاص صورتیں ہیں مثلاً ناقص کے محور اعظم اور اصغر فی الحقیقت منحنی کے دو علی القوائم مزدوج قطر ہیں۔

مشق

۳۵- مکانی کے نقاط ن اور ن پر کے ماس ایک دوسرے کو ت پر قطع کرتے ہیں ن کا وسطی نقطہ ص ہے ت ص مکانی سے ق پر ملتا ہے ثابت کرو کہ ت ق = ق ص

[ن ن کے تنصیف کرنے والے قطر کو محور لا اور اس کے سرے پر کے ماس کو محور ما انو۔ اس طرح مکانی کی مسادات ہوگی ما = م و لا ق مبدأ ہے اور نقاط ن اور ن ہیں بالترتیب (لا، ما) اور (لا، م)]

توضیحی مثالیں

(۱) مکانی کے ماسکی دتروں کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کرو۔
فرض کرو کہ ما = م و لا کے ایک وتر کے نقطہ تنصیف کے محور (لا، ما) ہیں دفعہ ۱۵۲ کی رد سے وتر کی مسادات ہوگی
ما، ما - م و لا = ما - م و لا

اسے لازماً ماسک (۱۰) میں سے گننا چاہئے، اس لئے

$$۱ - ۲/۱۱ = ۲/۱۱$$

اس لئے طریق کی مساوات ہے $۱ - ۲/۱۱ = ۲/۱۱$ (۱۱-۱)

پس طریق مطلوب مکانی ہے جس کا محور وہی ہے جو اصلی مکانی کا ہے
لیکن اس کا رأس (۱۰) ہے جو دئے ہوئے مکانی کا ماسک ہے نیز اس کا
وتر خاص ۲ ہے۔

(۲) مخروطی تراش $\frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} = ۱$ خط مستقیم $۱ = م + لا + ج$ سے جو
حصہ باقی ہے اس کا نقطہ تنصیف معلوم کرو۔

ذیل کے طریقہ کا اطلاق عام صورتوں پر ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ خط اور منحنی کے نقاط تقاطع (لا) (با) اور (لا) (با) ہیں ان
نقطوں کے فیصلے معلوم کرنے کے لئے ہم ادھر کی دو مساواتوں سے ماسکو
ساقط کرتے ہیں، اس طرح ہمیں ذیل کی مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے

$$۱ = \frac{۱}{۱۱} + \frac{(م + لا + ج)}{۱۱}$$

$$۱ = ۱ - \frac{۱}{۱۱} + \frac{۲}{۱۱} + \left(\frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} \right) = ۱$$

$$۱ = ۱ - \frac{۱}{۱۱} + \frac{۲}{۱۱} + \left(\frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} \right) = ۱$$

لیکن اگر نقطہ تنصیف کے محدود (ع) ہوں تو

$$۱ = ۱ - \frac{۱}{۱۱} + \frac{۲}{۱۱} + \left(\frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} \right) = ۱$$

$$۱ = ۱ - \frac{۱}{۱۱} + \frac{۲}{۱۱} + \left(\frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} \right) = ۱$$

چونکہ نسبت $\frac{۱}{۱۱}$ کا انحصار ج پر نہیں ہے اس سے اس امر کا ایک
اور ثبوت حاصل ہوتا ہے کہ متوازی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق

ایک قطر ہے۔

(۳) ناقص کا ایک ماس مرتب دائرہ سے ن اور ق پر ملتا ہے اگر ج مرکز ہو تو ثابت کرو کہ ج ن ج ق مخروطی کے مزدوج قطریں

فرض کرو کہ ناقص کی مسادات ہے $\frac{لا}{وا} + \frac{لا}{بب} = ۱ \dots (۱)$

مرتب دائرہ کی مسادات ہوگی $لا + ما = لا + بب \dots (۲)$

(لا، با) پر کے ماس کی مسادات ہے $\frac{لا}{وا} + \frac{لا}{بب} = ۱ \dots (۳)$

چونکہ ج مبدأ ہے اسلئے ج ن ج ق کی مسادات (۲) اور (۳) کو اسطرح ملانے سے حاصل ہوگی کہ مسادات محصلہ لا، ما میں متجانس ہو جائے۔

یہ متجانس مسادات ہوگی $لا + ما = (لا + بب) \left(\frac{لا}{وا} + \frac{لا}{بب} \right)$

یا $لا (لا + بب) \left(\frac{لا}{وا} - ۱ \right) + لا ما \left(\frac{لا}{بب} \right) + ما (لا + بب) \left(\frac{لا}{وا} - ۱ \right) = ۰$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ $ما - م لا = ۰$ اور $ما - م لا = ۰$ باہم مزدوج ہونگے

اگر $م م = - \frac{لا}{بب}$

اور $م م = - \frac{لا}{ما}$ مسادات بالائیں میں اس لئے یہ خطوط

مزدوج قطر ہونگے اگر

$\frac{لا}{وا} \{ (لا + بب) \left(\frac{لا}{بب} - ۱ \right) \} + \frac{لا}{بب} \{ (لا + بب) \left(\frac{لا}{وا} - ۱ \right) \} = ۰$

یعنی اگر $\left(\frac{لا}{وا} + \frac{لا}{بب} \right) (لا + بب) \left(\frac{لا}{وا} - ۱ \right) + \frac{لا}{بب} \left(لا + بب \right) \left(\frac{لا}{وا} - ۱ \right) = ۰$

اور یہ شرط پوری ہوتی ہے کیونکہ (لا، با) مخروطی پر واقع ہے۔

(۴) مکانی کے دو ماس ایک ثابت نقطہ و پر کے ماس سے

کے اُن وتروں کے نقاط نصف کا طریق جو محور لا کے متوازی ہوں
 $لا + م + گ = ۰$ ہے۔

۳۸۔ ایک زائد کی مساوات $لا + ۱ + گ + ۲ + ف + م + ج = ۰$ ہے
 اسکے ستارہوں اور اسکے مزدوج زائد کی مساواتیں معلوم کرو۔

۳۹۔ اگر ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{۱}{ج} = ۱$ کے ماسکوں سے $ن$ کے
 ماس پر عمود $س$ ماس اور $س$ ماس کیلئے جائیں تو ثابت کرو کہ
 $س ماس \times س ماس = ج$ اور $س ن \times س ن = ج$ جی جی
 جہاں ج ق ج ن کا مزدوج نیم قطر ہے۔

۴۰۔ نقطہ و (لا، ۱) میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{۱}{ج} = ۱$

سے نقاط $ن$ اور $ق$ پر ملتا ہے اگر $ن ق$ کا نقطہ نصف $ر$
 ہو اور یہ خط و لا کے ساتھ زاویہ θ بنائے تو ثابت کرو کہ

$$ور = - \left(\frac{لا}{ج} + \frac{۱}{ج} \right) / \left(\frac{لا}{ج} + \frac{۱}{ج} \right)$$

$ر$ کے محدود حاصل کرو

۴۱۔ اسکے لئے کیا شرط ضروری ہے کہ خطوط $لا + ج + م + ج = ۰$ اور $لا + ج + م + ج = ۰$

ناقص $م$ لا + ۱ + ۱ = ۲ کے دو مزدوج قطروں کے متوازی ہوں۔

۴۲۔ ثابت کرو کہ مخروطی $لا + ۲ + م + ج + ۱ + گ + ۲ + ف + م + ج = ۰$

کے وہ نقطے جن پر کے ماس $م = لا$ کے متوازی ہیں قطر

($لا + م + گ$) + ($م + لا + ج + م + ف$) = ۰ کے سرے ہیں۔

۴۳۔ ایک ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ

۹۰ ہے ثابت کرو کہ منحنی کا خروج المکرر $\frac{۱}{۱۶}$ ہے۔

۴۴۔ ناقص کے ایک ماسک سے ایک مزدوج قطر پر اور دوسرے

ماسک سے دوسرے قطر پر عمود کیلئے گئے ہیں عمودوں کے نقطہ

تقاطع کا طریق دریافت کرو۔

۴۵۔ منحنی لا ما = ج لا + لا ما کو منقسم کرو اور اس کے اُن دتروں کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کرو جو لا = ما کے متوازی ہوں۔
 ۴۶۔ مکانی ما = لا کے اسکی دتر کے نقطہ تنصیف کا طریق معلوم کرو۔
 ۴۷۔ اسکی شرط معلوم کرو کہ ما = م لا اور ما = م لا مخروطی
 لا + لا + لا + لا + ج = ۲ + لا + ج = ۰

کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوں۔

۴۸۔ منحنی لا + لا + ج = ما = ا میں اُن خطوط کی مساواتیں معلوم کرو جو محاور لا اور ما کے بالترتیب مزدوج ہوں اگر یہ خط ایک دوسرے پر منطبق ہوں تو اس کے لئے ضروری شرائط معلوم کرو اور انکی ہندسی تعبیر لکھو۔

۴۹۔ مائل محوروں کے لحاظ سے جن کا درمیانی زاویہ ۹۰ درجہ ہو مساواتوں لا ± ما = لا کو تعبیر کرو اور نصف محوروں کے طول معلوم کرو۔

۵۰۔ اگر محور مائل ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات ما = ج لا - ک لا قطع ناقص، مکانی، زائد کو تعبیر کرتی ہے اگر ک بالترتیب مثبت، صفر یا منفی ہو۔ نیز ثابت کرو کہ محور لا منحنی کا قطر ہے اور محور ما اس کے راس پر کا ماس ہے۔

۵۱۔ ایک متغیر نقطہ ن سے ایک مخروطی کے ماس کھینچے گئے ہیں یہ ایک ثابت نقطہ لا میں سے گذرینوالے ماس کو قی اور ر پر قطع کرتے ہیں جہاں قی x لا ر ہمیشہ مستقل ہے ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو لا پر کے ماس کے متوازی ہے۔

۵۲۔ ایک ناقص کے مزدوج قطروں کا ایک جوڑا ن ج ن اور قی ج قی بننے اگر ن قی کا نقطہ تنصیف ص ہو تو ص کا طریق معلوم کرو اور ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع ن قی ن قی کا رقبہ مستقل ہے۔
 ۵۳۔ اگر ایک مرکز دار مخروطی پر کوئی نقطہ ن ہو اور ع ع محور غم کے

سرے ہوں تو ثابت کرو کہ ن ع اور ن ع مزدوج قطروں کے
تواری ہیں۔

۵۲۔ ایک ناقص کے کسی نقطہ ق سے ایک قطر ن ج ن سے ل اور ن ص کیلئے بھی درست ہوگا؟

۵۵۔ کئی ایسے متوازی الاضلاع ایک ناقص کے اندر بنائے گئے ہیں جن کے ضلع ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کے متوازی ہیں ثبات کرو کہ ان سب متوازی الاضلاعوں کے لئے اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔

۵۶۔ اگر دو مخروطی تراشوں میں سے ایک کے متقارب دوسری کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ دوسری کے متقارب پہلی تراش کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوں گے۔

۵۔ مخروطی $(\frac{r}{R} + \frac{r}{L})$ سے لا ما + ج ا + گ ل + م ف ت م ا ج =
کے اُن تمام دتروں کے تقاطع تنصیف کا طریق معلوم کرو جو مبدأ میں
سے گذرتے ہوں۔

۵۸۔ ثابت کر دو کہ خط مستقیم $MA = M$ لائن AA' کے ان تمام
دوروں کی تعینیت کرتا ہے جو $MA = M$ کے متوازی ہوں۔

۵۹۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم
 (حہ ۱۔ حہ ۲) لا + (ا ب۔ ا ب) لا ما + (حہ ب۔ حہ ب) لا =
 مخروطی لا لا + حہ لا ما + حہ ما = اکے اور نیز لا لا + حہ لا ما + حہ ما = اکے
 کے مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

[وکیہ مشتق ۱۳، کو فیہ ۱۵،]

۶۰۔ ناقص کے کسی ایک محور کے متوازی ایک ثابت خط مستقیم کھینچا گیا ہے جو ناقص کے مزدوج قطروں سے ک اور ل پر ملتا ہے ثابت کر اگر ک ل کے قطر پر ایک دائرہ بنایا جائے تو یہ دوسرے محور کے

دو ثابت نقطوں میں سے گزریگا۔

۶۱۔ اگر ناقص کے محور اعظم کے سروں پر تماس کیجئے جائیں اور ناقص کے کوئی دو مزدوج نیم قطر ان تماسات سے قی اور ر پر ہیں تو ثابت کرو کہ قی ر ناقص کو مس کرتا ہے۔

۶۱۔ اگر ناقص کے محور اعظم کے سروں پر تماس کیجئے جائیں اور ناقص کے کوئی دو مزدوج نیم قطر ان تماسات سے قی اور ر پر ہیں تو ثابت کرو کہ قی ر ناقص کو مس کرتا ہے۔

۶۲۔ ایک ثابت نقطہ میں سے ایک مکانی کے کئی وتر کیجئے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان سب کے وسطی نقطے ایک ایسے مکانی پر واقع ہوتے ہیں جس کا وتر خاص دئے ہوئے مکانی کے وتر خاص کا نصف ہے۔

۶۳۔ $MA = m$ لائے متوازی قطع ناقص کے متوازی دتروں کا ایک نظام ہے اور اس نظام کا ایک وتر LM ہے اگر L م پر ایک نقطہ N ایسا لیا جائے کہ $LN : N : m = 1 : 2$ تو N کا طریق ایک ہم مرکز قطع ناقص ہوگا۔



باب چہارم

مخروطی تراشوں کے عماد

[اس باب میں شروع سے آخر تک محدودوں کے محور قائم فرض کئے جائینگے]
 ۱۴۴۔ عماد۔ تعریف۔ مخروطی کے کسی نقطہ پر کا عماد وہ خط مستقیم ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنیوالے مماس پر اس نقطہ میں سے عمود کھینچا جائے۔
 عماد کی یہ تعریف ہر مثنیٰ کے لئے درست ہے مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ خط مستقیم کے کسی نقطہ پر کا عماد ایک خط ہے جو اس نقطہ میں سے مفروضہ خط مستقیم پر عمود ہو اور ایک دائرہ کے کسی نقطہ پر کا عماد اس نقطہ میں سے گزرنیوالا نصف قطر ہے۔

۱۴۵۔ مخروطی (لا) + ۲ ص لا + ما + ب + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج۔
 کے نقطہ (لا) + ما پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو
 نقطہ (لا) + ما پر کے مماس کی مساوات ہے
 لا (لا + ص ما + گ) + ما (ص لا + ب ما + ف) + گ لا + ب ما + ج = [دفعہ ۱۲۴]
 اب جس خط کی مساوات

$$\frac{لا}{لا + ص ما + گ} - \frac{ما}{ص لا + ب ما + ف} = ک$$

ہے وہ ک کی تمام قیمتوں کے لئے مماس پر عمود ہے [حصہ اول دفعہ ۱۹]
 اگر یہ خط (لا) + ما میں سے گزرے تو لازماً

$$\frac{لا}{لا + ص ما + گ} - \frac{ما}{ص لا + ب ما + ف} = ک$$

پس شرط مطلوبہ ہے

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا - با}{صه لا + ج با + ف} = \frac{لا - لا}{لا + صه با + گ}$$

جسے ہم فوراً نکھ سکتے تھے۔

۱۷۶۔ خاص صورتیں

طالب علم ذیل کے نتائج کو ابتدائی اصولوں سے حاصل کرے۔

$$(۱) \text{ مکانی } ما^۲ = ۴ لا$$

$$\text{عماد } ۰ = (لا - لا) با + (با - با) لا$$

$$(۲) \text{ ناقص } \frac{لا}{با} + \frac{ما^۲}{ج} = ۱ \text{ عماد } \frac{لا - لا}{لا} = \frac{لا - با}{ج}$$

$$(۳) \text{ زائد } \frac{لا}{با} - \frac{ما^۲}{ج} = ۱ \text{ عماد } \frac{لا - لا}{لا} = \frac{لا - با}{ج}$$

$$۱۷۷۔ \text{ ناقص } \frac{لا}{با} + \frac{ما^۲}{ج} = ۱ \text{ کے عماد کی مساوات ہے}$$

$$\frac{لا - لا}{لا} = \frac{لا - با}{ج} \text{ یا } \frac{لا}{لا} - \frac{لا}{لا} = \frac{لا - با}{ج} - \frac{لا - با}{ج}$$

$$\text{یعنی } \frac{لا}{لا} - \frac{لا}{با} = \frac{لا - با}{ج} \dots\dots\dots (۲)$$

اس شکل میں اسے یاد رکھنا چاہئے، اسی طرح زائد کے عماد کی مساوات ہے

$$\dots\dots\dots (۳) \dots\dots\dots \frac{لا}{لا} + \frac{لا - با}{ج} = ۱$$

مثال۔ نقطہ (۲) مخروطی لا + لا + ما + لا + با = ۱۰ پر

واقع ہے، اس نقطہ پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو۔

(لا، با) پر کے ماس کی عام مساوات ہے

$$لا (لا + صه با + گ) + ما (صه لا + ج با + ف) + گ (لا + ف + ج) =$$

اس صورت میں یہ ہو جائیگی

۹۔ اگر مکانی کے کسی نقطہ پر ماس اور عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ محور سے ایسے دو نسبتاً پریٹیکے جو ماسکے سے متساوی الفضل ہوں۔

۱۰۔ مکانی $\mu = \frac{m}{r}$ کے نقطہ (لا، لم) پر عماد منحنی سے دوبارہ ایک

ایسے نقطہ پر تہا ہے جس کے محدد $\frac{(m + m')}{r + r'}$ - $\frac{(m + m')}{r}$ ہیں

[مسادات (۱) میں لا اور نا کی بجائے $\frac{m}{r}$ اور $\frac{m'}{r'}$ رکھو]

۱۱۔ اگر مکانی $\mu = \frac{m}{r}$ کے نقطہ ن (لا، نا) پر عماد منحنی سے دوبارہ قی پر ملے تو ن ق کا طول معلوم کرو۔

۱۲۔ اگر ناقص کے وتر خاص کے ایک سرے پر عماد محور اصغر کے

ایک سرے میں سے گذرے تو $\frac{r}{a} + \frac{r'}{b} = \frac{r}{a} - \frac{r'}{b} = 0$ ۔

اس سے حاصل کرو کہ خروج المکرز ذیل کی مسادات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{r}{a} + \frac{r'}{b} = 1 - \frac{r}{a} = 0$$

۱۳۔ اگر ناقص $\frac{r}{a} + \frac{r'}{b} = 1$ کے نقطہ (لا، لم) پر عماد

محور لا سے حادہ زاویہ طہ بنائے اور اس نقطہ پر کے ماس پر مرکز سے جو عمود کھینچا جائے اس کا طول د ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ط} = \frac{r}{a} \text{، جب ط} = \frac{r}{b}$$

عماد کی مسادات ہے

$$\frac{r - r'}{a} = \frac{r - r'}{b}$$

اس کا خط کی شکل ذیل کے ساتھ مقابلہ کرنے سے

$$\text{جم ط} = \frac{r - r'}{a} = \frac{r - r'}{b} \text{ [حصہ اول، دفعہ ۱۰، ب]}$$

$$\text{لا} - \text{ر} = \frac{\text{د}}{\text{لا}} ، \text{ب} - \text{ر} = \frac{\text{د}}{\text{ب}}$$

اگر $\text{ر} = \text{ن گ}$ تو دوسرا محدود صفر ہونا چاہئے اس لئے

$$\frac{\text{ر}}{\text{ب}} = ۱ \quad \text{یا} \quad \text{ر} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$$

اگر $\text{ر} = \text{ن ح}$ تو پہلا صفر ہونا چاہئے اس لئے

$$\frac{\text{ر}}{\text{لا}} = ۱ \quad \text{یا} \quad \text{ر} = \frac{\text{لا}}{\text{د}}$$

(۲) اگر ہم نقطہ ن (لا، ما) سے ج ق کے مساوی طول ن ط اور ن ط عماد پر باہر اور اندر کی طرف ناپیں جہاں ج ق ' ج ن کا مزدوج نیقطر ہے تو

ج ط = لا + ج ، ج ط = ج ط = لا - ج
اور ج ط ' ج ط محوروں سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔
فرض کرو کہ نقطہ ط (لہ، مہ) ہے اور ط (کہ، سہ) تب اگر
ج ق = س تو

$$\text{لہ} = \text{لا} + \text{س} = \frac{\text{د}}{\text{لا}} ، \text{مہ} = \text{ما} + \text{س} = \frac{\text{د}}{\text{ب}}$$

$$\text{کہ} = \text{لا} - \text{س} = \frac{\text{د}}{\text{لا}} ، \text{سہ} = \text{ما} - \text{س} = \frac{\text{د}}{\text{ب}}$$

لیکن دس = لا ب

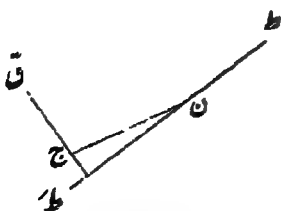
$$\text{لہ} = \text{لا} (۱ + \frac{\text{ب}}{\text{لا}}) = \frac{\text{د}}{\text{لا}} (۱ + \frac{\text{ب}}{\text{لا}})$$

$$\text{مہ} = \text{ما} (۱ + \frac{\text{ب}}{\text{ما}}) = \frac{\text{د}}{\text{ب}} (۱ + \frac{\text{ب}}{\text{ما}})$$

اسی طرح سے

$$\text{کہ} = \frac{\text{د}}{\text{لا}} (۱ - \frac{\text{ب}}{\text{لا}})$$

$$\text{سہ} = \frac{\text{د}}{\text{ب}} (۱ - \frac{\text{ب}}{\text{ما}})$$



شکل ۶۴

اس لئے ج ط = ل + م
 $(ل + ب) = \left\{ \frac{ل}{۹} + \frac{م}{۹} \right\} (ل + ب) =$
 $\therefore ج ط = ل + ب$ ایطرح ج ط = ل - ب

اور چونکہ $\frac{م}{۹} = \frac{ل}{۹}$
 اس لئے خطوط ج ط ، ج ط محاور سے مساوی زاوے بناتے ہیں۔
 (۳) ناقص کے دو مزدوج قطر بلحاظ مقدار اور محل کے معلوم ہیں، ناقص کے محور کھینچو۔

فرض کرو کہ ج ن اور ج ق مزدوج قطر ہیں۔

چونکہ ن پر کا عماد ج ق پر عمود ہے (دفعہ ۱۵) اس لئے ہم ط اور ط کے مقام آسانی معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ

$$ن ط = ن ط = ج ق$$

اب (۲) کی رو سے ناقص کے محور ج ط اور ج ط کے درمیانی زاویہ کے داخلی اور خارجی منصف ہیں اور

$$۱ = ج ط + ج ط ، ۲ = ج ط - ج ط$$

زائد کی صورت میں جب ط اور جم ط کے لئے جو تناظر ضابطے حاصل کئے گئے ہیں انہیں استعمال کرنے سے بعینہ ایسے نتائج حاصل ہو سکتے ہیں یہ مشق کے طور پر طالب علم کے لئے چھوڑے گئے ہیں۔

۱۸۰۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ معلومہ سے مکانی کے تین عماد کھینچ سکتے ہیں۔

نقطہ (لام، ل) پر کے عماد کی مسادات ہے

$$۱ = ل + ل = ل + ل + ل + ل$$

یا چونکہ $\frac{ل}{۹} = \frac{ل}{۹}$ اس لئے یہ مسادات ہو جاتی ہے

$$۱ = ل + ل = ل + ل + ل + ل$$

اگر عماد نقطہ (ف، گ) میں سے گزرے تو

$$۱ = گ + ف = ل + ل + ل + ل$$

$$یا \frac{۲}{۱۲} + ۱ (۲ - ۱) - ۲ = ۰$$

جو مائیں درجہ سوم کی مساوات ہے، اس مساوات کی تین اصلیں ہیں (یوٹوریل الجبرا، دوم دفعہ ۱۷۳) اور ہر اصل کے لئے منحنی پر ایک نقطہ ہے۔ پس معلوم ہوا کہ منحنی پر تین ایسے نقطے ہیں کہ ان پر کے عماد ایک نقطہ معلومہ میں سے گزرتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر مکانی کے تین نقطوں پر کے عماد ایک ہی نقطہ میں سے گزریں تو ان کے معینوں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

اوپر کی مساوات میں رقم ۱۲ موجود نہیں اس لئے اصلوں کا مجموعہ صفر ہے (یوٹوریل الجبرا، دوم دفعہ ۱۷۳)

مشقیں

۱۳۔ ناقص لا + ۳ ما = ۴ کے نقطہ (۱، ۱) پر کا عماد محور اعظم سے زاویہ عہ بناتا ہے، حجم عہ اور جب عہ کی قیمتیں معلوم کرو۔

۱۴۔ لا + ۳ ما = ۲ کے نقطہ (۱، ۱/۲) پر کا عماد جو زاویہ محور اعظم سے بناتا ہے اس کی جیب اور جیب التمام معلوم کرو۔

۱۵۔ قائم زاویہ کا ایک وتر جس کے محاذی ایک نقطہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے اس نقطہ پر کے عماد کے متوازی ہے۔

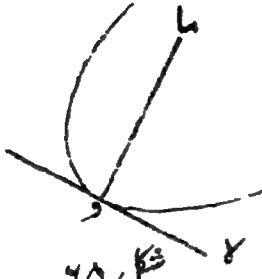
۱۶۔ مکانی ما = ۳ لا پر کے اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو جن پر کے عماد نقطہ (۱۵/۲ - ۳/۲) میں سے گزریں اور ایک شکل میں ان تین متراکز عمادوں کو دکھاؤ۔

[ما کے لئے کمبی مساوات حاصل کرو اور دیکھو کہ اس کی ایک اصل ایک ہی باقی دو اصلیں مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں]

۱۷۔ ناقص لا + ۲ ما = ۱ کے اُن نقطوں کے محدد معلوم کرو

۲۲۔ عمادی مساوات $ما = م لا - م ۲ - م ۳$ سے دفعہ ۱۸۰ کے نتائج حاصل کرو۔

۱۸۲۔ مخروطی کی مساوات جبکہ کسی نقطہ پر کا ماس اور عماد حوالہ کے محور ہوں۔ فرض کرو کہ نقطہ و پر کا ماس



محور لا ہے اور عماد محور ما۔

عام مخروطی کی مساوات اس شکل کی ہے

$$لا + ۲ + ۳ = لا + ۲ + ۳ + ج = ۰$$

لیکن چونکہ محور لا (۰ = ما) منحنی سے

ایسے زونقاط پر ملتا ہے جو مبدأ پر منطبق

ہوتے ہیں اس لئے مساوات $لا + ۲ + ۳ + ج = ۰$ کی دونوں اہلیں صفر ہونی چاہئیں۔

اس لئے $گ = ۰$ اور $ج = ۰$

اس لئے مطلوبہ مساوات ہے

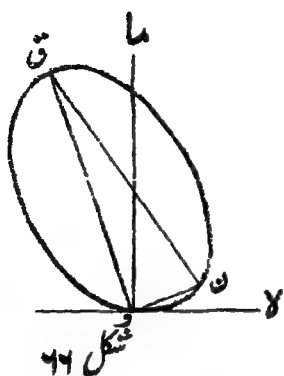
$لا + ۲ + ۳ = لا + ۲ + ۳ + ج = ۰$ (۱)
مساوات کی یہ شکل اکثر کارآمد ہوتی ہے کریک ایک فائدہ تو یہ ہے کہ محور قائم ہیں۔
مخروطیوں کی کئی خاصیتیں ان محوروں کو استعمال کرنے سے باسانی حاصل ہو سکتی ہیں مثلاً ملاحظہ ہوں ذیل کی مثالیں۔

توضیحی مثالیں

(۱) مخروطی کے جن وتروں کے محاذی منحنی کے ایک ثابت نقطہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے وہ سب کے سب اس نقطہ میں سے گذر نیوالے عماد کے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

کریک اس صورت میں ہیں ثابت نقطہ پر کے ماس اور عماد کو حوالہ کے محور فرض کرنا چاہئے۔

فرض کرو کہ مخروطی ہے $لا + ۲ + ۳ = لا + ۲ + ۳ + ج = ۰$



اور ایک وتر ہے $ل + لا + م = ا$
جو خط اس وتر کے سروں $ن$ $ق$ کو
مبدأ سے ملاتے ہیں انکی مساوات ہے
(حصہ اول مدفوعہ ۳۸ کی رو سے)

$$U_1 + U_2 + U_3$$

$$r + \text{فا} (ل لا م) = .$$

یا اولاً + ثانیاً (ص + فنل)

$$+ 1 (b + 2f m) =$$

لیکن چونکہ یہ مساوات دو علی القوائم خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اس لئے

$$1 + ب + ۲ ف م = ۰ \quad (\text{حصہ اول کو دفعہ ۲۹})$$

$$m = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

اسلئے معلوم ہوا کہ این تمام وتروں کے لئے م کی ایک ہی قیمت ہے۔
لیکن $ل = ا + م = ا = ا عماد (لا = ۰)$ سے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے
جس کا معین مساوات $م = ا = ا$ سے حاصل ہوتا ہے پس $م = ۱$ جو مستقل ہے۔
اسلئے ثابت ہوا کہ تمام ایسے وتر عماد پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے
گزرتے ہیں۔

(۲) مکانی $\alpha = 1, 2$ کے دو علی القوائم عمادوں کے تقاطع کا طریق معلوم کرو۔
فرض کرو کہ عماد کی مساوات ہے $\alpha = 1, 2, 3, \dots, m$ ۔
اگر عماد (ھٹک) میں سے گزرے تو

ک = م - م_۲ - م_۳

اس سے م کی تین قسمیں (م، م، م) حاصل ہوتی ہیں اور اگر مساوات کے
شکل ذیل میں لکھا جائے

$$= \frac{k}{1} + m \frac{x-1}{1} + n$$

تو مساواتوں کے مسائل کی رو سے

زاویے ط اور ذ بناتے ہیں جہاں مس ط x مس ذ = ۲، ثابت کر دیکھ
عماد ایک دوسرے کو مکافی پر قطع کرتے ہیں۔
۳۳۔ مکافی ما = ۲ لا کے عماد ن گ کا جو وسطی نقطہ ہے اس کا
طریق دریافت کرو۔

۳۴۔ $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ کے عماد کا جو حصہ عماد ر لا اور ما کے
درمیان کٹتا ہے اس کے نقطہ تنصیف کے عماد (لا، ما) ہیں ثابت کر دو کہ
 $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ (۱۔ ب) (۲۔ ب)
۳۵۔ ثابت کر دو کہ مکافی کے ایک ماس اور اس کے متوازی عماد کا فاصلہ
۱/۲ ط قطع ط ہے جہاں ط وہ زاویہ ہے جو انہیں سے کوئی خط محور سے
بناتا ہے۔

۳۶۔ ن کوئی نقطہ ناقص $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ پر ہے خط ن ق محور
لا کے متوازی کھینچا گیا ہے اور ناقص سے دوبارہ ق پر ملتا ہے
ن ر اور ما کے متوازی کھینچا گیا ہے اور منحنی سے دوبارہ ر پر ملتا
ہے ثابت کر دو کہ خط ق ر اور ن پر کے عماد کا نقطہ تقاطع ذیل کا
ناقص ہے

$$\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$$

۳۷۔ ون اور ون ایک مخروطی کے دو وتر ہیں جو و پر کے عماد
سے زاویے ط اور ط بناتے ہیں ثابت کر دو کہ اگر مس ط x مس ط
مستقل ہو تو ون ن عماد کو ایک ثابت نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

۳۸۔ قائم زاویہ میں ثابت کر دو کہ عماد کے اُس حصہ کی تنصیف جو محوروں کے
درمیان کٹتا ہے منحنی پر ہوتی ہے۔

۳۹۔ مخروطی کا ایک وتر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ خطوط ون، وق جو اس کے

سروں کو مخروطی کے ایک ثابت نقطہ و سے ملاتے ہیں و پر کے عماد کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں ثابت کرو کہ وتر و پر کے ماس سے ایک ثابت نقطہ پر ملتا ہے۔

۳۰۔ اگر (لا، با) ناقص $\frac{لا^2}{و} + \frac{با^2}{ب} = ۱$ پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{لا^2}{و} + \frac{با^2}{ب} = \left(\frac{۱}{و} + \frac{۱}{ب}\right) \left(\frac{لا}{و} + \frac{با}{ب}\right) - \left(\frac{لا}{و} + \frac{با}{ب}\right)$$

اس سے ثابت کرو کہ اگر ن (لا، با) پر کا عماد ناقص سے دوبارہ قی پر ملے تو

$$ر = \left(\frac{لا^2}{و} + \frac{با^2}{ب}\right) = \left(\frac{لا}{و} + \frac{با}{ب}\right)^2$$

جہاں د اُس ہموک کا طول ہے جو مرکز سے ن پر کے ماس پر کھینچا جائے اور ر = ن ق

$$یعنی \quad ر = \frac{۲ \frac{لا}{و} \frac{با}{ب}}{\left(\frac{لا}{و} + \frac{با}{ب}\right)^2}$$

[ق کے محد ہیں لا، - $\frac{لا}{و}$ ر، - $\frac{با}{ب}$ - د $\frac{لا}{و}$ ر، اس کیلئے شرط لکھو کہ ق منحنی پر واقع ہے۔]

۳۱۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا^2}{و} + \frac{با^2}{ب} = ۱$ کے عماد ن گ کے وسطی نقطہ کا طریق ہے

$$\frac{لا(۱+ز)}{۲} = \frac{با(۱+ز)}{ب} + \frac{لا}{و}$$

۳۲۔ اگر قائم زاؤ کے متغیر نقطہ ن پر کا عماد منحنی سے دوبارہ قی پر ملے تو ن ق ∞ ج ن جہاں ج مرکز ہے۔

۳۳۔ مکانی $ما = ۲$ لا کے تین عماد نقطہ (ھ، ک) میں سے کھینچے گئے ہیں اور محور سے بالترتیب گ، گ، گ، گ پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ

۱ گ + ۱ گ + ۱ گ = ۲ (۱ + ۱) جہاں ۱ منحنی کا رأس ہے۔
۲۲۔ ایک نقطہ معلوم ق سے مکانی ما = ۲ لا کے عماد کھینچے گئے
ہیں جو محور سے زاویے ط، ط، ط بناتے ہیں، ثابت کرو کہ
س ق = ۱ قط ط قط ط قط ط

آزمائشی پرچہ ۴

۱۔ (۱) منحنی م لا + ب ۱۔ ۲ گ لا + ۲ ف م۔ ج = ۰ کے
نقاط (ف، ق) اور (ف، ق) کو ملانے والے وتر کی مسادات
معلوم کرو اور اس سے نقطہ (ف، ق) پر کے ماس کی مسادات حاصل کرو۔
(ب) نقطہ (لا، م) سے منحنی لا + م = ۱ کے ماسات کی مسادات معلوم کرو۔

اس سے مرتب دائرہ کی مسادات حاصل کرو۔
۲۔ ثابت کرو کہ زائد کے ماس کے اُس حصہ کی تنصیف جو متقاربوں کے
درمیان کٹتا ہے نقطہ تماس پر ہوتی ہے۔
نیز اس طرح جو مثلث کٹتا ہے اس کا رقبہ مستقل ہے۔

۳۔ مکانی ما = ۲ لا کے نقطہ (۱، ۱) پر ماس کی مسادات معلوم
کرو اور ثابت کرو کہ ایک اور صرت ایک ماس کھینچ سکتا ہے جو محور تشاکل
کے ساتھ ایک دیا ہوا زاویہ بنائے۔

ثابت کرو کہ مکانی کے وہ ماس جو ایک دوسرے سے ۵۵ کا زاویہ بنائیں
ایک دوسرے کو قائم زائد پر قطع کرتے ہیں۔

۴۔ ابتدائی اصولوں کی بناء پر ۳ لا + ۲ لا + م لا + ۱ م + ۱ = ۰ کے
اُن متوازی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق معلوم کرو جو م = ۳ لا
کے متوازی ہوں۔

۵۔ مزدوج قطر مزدوج قطع زائد کی تعریفات لکھو اور ثابت کرو کہ اگر
مرکز دار تراش کے ایک قطر کے سروں پر ماس کھینچے جائیں تو وہ مزدوج قطر

کے متوازی ہوں گے۔

اس زائد کی مساوات دریافت کرو جو $۳لا - ۲لا + ۳لا - ۴لا = ۰$ کا

مزدوج ہو۔

۶۔ اگر ایک متقارب کے کسی نقطہ سے ایک زائد اور اس کے مزدوج کے

ماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاط ماس مزدوج قطروں کے سرے ہوں گے۔

۷۔ ثابت کرو کہ زائد کے ایک قطر اور اس کے مزدوج کے مربوں کا فرق متقل ہے۔

۸۔ مکافی کی مساوات دریافت کرو جبکہ اس کا ایک قطر اور قطر کے سرے پکا

ماس حوالہ کے محور ہوں۔

۹۔ منحنی ورجہ دوم کی مساوات کی شکل کیا ہو جاتی ہے جبکہ اس کا کوئی ماس اور

متناظر عماد حوالہ کے محور ہوں؟

۱۰۔ ثابت کرو کہ ناقص کے ایک ماسکی وتر کے سروں پر کے عماد ایک ایسے

خط مستقیم پر ملتے ہیں جو اس وتر کے نقطہ انصیف میں سے محور کے

متوازی کھینچا جائے۔



باب پانزدہم

قطب اور قطبی

۱۸۳۔ ثابت کرو کہ کسی ایک نقطہ سے مخروطی کے دو ماس کھینچ سکتے ہیں ان کے نقاط ماس معلوم کرو۔

اس مسئلہ کا پہلا حصہ اس سے قبل ثابت ہو چکا ہے کیونکہ ہم نے دو ماسوں کی مساوات دفعہ ۱۳۸ میں معلوم کی ہے۔

اب ہم ایک اور طرح سے اس کی تحقیق کریں گے اور اس طرح ایک ضروری نتیجہ پر پہنچیں گے جو کارآمد ہوگا۔

فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات ہے

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = 0$$

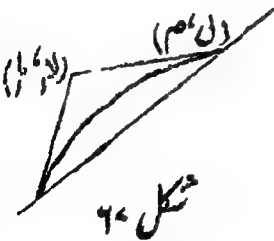
فرض کرو کہ جس نقطہ سے مخروطی کے ماس کھینچے گئے ہیں اس کے محدد (لام، مار) ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ایک ماس کا

نقطہ تماس (ل، م) ہے

تب نقطہ (ل، م) پر گئے

ماس کی مسارات ہیں [دفعہ ۱۲۷]



لا (اول + ہم + گ) + ما (حل + ب + م + ن) + گ ل + ن م + ج = ۰
اب یہ ماس نقطہ (لام، مار) میں سے گزرے گا اگر

$$لا (اول + ہم + گ) + مار (حل + ب + م + ن) + گ ل + ن م + ج = ۰$$

یا ترتیب بدلنے سے

ل (لا + لا + ہ + م + گ) + م (ہ + لا + ب + م + ف + ن) + گ (لا + ف + م + ج = (ا)
پس دو مجموعہ اول مقدار میں ل اور م میں یہ ایک مساوات ہے، ایک اور
مساوات یہ ہوگی

ا (ا + لا + ہ + م + گ + ل + ۲ + ف + م + ج = (ب)
پس نقاط تماس معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو مساواتوں (ا) اور (ب) کو
کوئی اور م کے لئے ایک ساتھ حل کرنا چاہئے۔

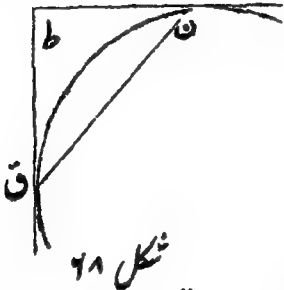
چونکہ (ا) نامعلوم مقدار میں درجہ اول کی مساوات ہے اور (ب) درجہ
دوم کی اس لئے (ا) کی مدد سے ہم (ب) میں سے ل کو ساقط کر کے
م میں ایک مساوات درجہ دوم حاصل کر سکتے ہیں۔ اس طرح ہم دو حل
حاصل ہوتے ہیں جن کو اگر ہم چاہیں تو آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔
اس بنا پر ہمیں دو ماس نہیں گے۔ ہم ان کے نقاط تماس کو معلوم
شد قرار دیتے ہیں کیونکہ ہمارے پاس ان سے محدود معلوم کرنے کے لئے
کافی مساواتیں موجود ہیں۔

۱۸۴۔ ان مساواتوں کی ہندسی تعبیر۔ مذکورہ بالا دو مساواتوں
(ا) اور (ب) کو بنیادیت آسان ہندسی معنی پہنائے جاسکتے ہیں۔
(ب) کا مفہیم یہ ہے کہ نقطہ (ل، م) مخروطی پر واقع ہے لیکن مساوات
(ا) اس مخروطی ظاہر کرتی ہے کہ نقطہ تماس (ل، م) جس خط مستقیم پر
واقع ہے اس کی مساوات۔

لا (لا + لا + ہ + م + گ) + م (ہ + لا + ب + م + ف + ن) + گ (لا + ف + م + ج =
ہے۔ اس سے ہم فوراً یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ نقاط تماس وہ نقطے ہیں جہاں
یہ خط مخروطی کو قطع کرتا ہے۔
پس اگر نقطہ (لا، م) سے مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو ان ماسوں کے
نقاط تماس کے خط وصل کی مساوات

لا (لا + لا + ہ + م + گ) + م (ہ + لا + ب + م + ف + ن) + گ (لا + ف + م + ج = (۱)
ہے۔

[یہ مساوات دونوں صورتوں میں درست رہتی ہے خواہ محور قائم ہوں یا مائل]
 ۱۸۵ - قطبی - تقریب - اگر کسی نقطہ معلومہ سے مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو ان مماسوں کے نقاط تماس کے ملانے والے خط کو بلحاظ اس مخروطی کے اس نقطہ کا قطبی کہتے ہیں۔



شکل ۶۸ میں ط کا قطبی ن ق ہے۔

قطب - اگر مخروطی کے کسی وتر کے سرے میں سے مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو ان مماسوں کا

نقطہ تقاطع وتر مذکور کا قطب کہلاتا ہے۔ شکل ۶۸ میں ن ق کا قطب ط ہے۔

پس اگر ایک خط ایک نقطہ کا قطبی ہو تو وہ نقطہ اس خط کا قطب ہوگا۔ نوٹ - احتیاط سے دیکھا جائے کہ قطبی کی مساوات بعینہ شکل کی ہے جس شکل کی کہ مماس کی مساوات ہے۔ پس اس کو الگ یاد رکھنے کی ضرورت نہیں۔ ان دونوں خطوط میں ضروری فرق یہ ہے کہ مماس کی صورت میں نقطہ (لام، م) منحنی پر واقع تھا لیکن اس صورت میں نقطہ پر اس قسم کی کوئی قید نہیں لگائی گئی۔

پس ظاہر ہے کہ جب نقطہ منحنی پر واقع ہو تو اس کا قطبی وہی ہوگا جو اس نقطہ پر کا مماس ہے۔

ہندسی نقطہ نظر سے بھی یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ جیسے نقطہ ط منحنی کے نزدیک آتا جاتا ہے، مماسوں کے نقاط تماس بھی ایک دوسرے کے قریب آتے جاتے ہیں اور بالآخر جب نقطہ ط علین منحنی پر واقع ہوتا ہے تو نقاط مذکورہ کو ملانے والا خط انتہا میں مماس بن جاتا ہے۔ پس مماس قطبی کی ایک خاص صورت ہے۔

۱۸۶ - اسی سلسلہ میں ایک اور بات قابل ذکر ہے جس کی طرف

طالب علم کو توجہ کرنی چاہئے۔ ہم نے اوپر بیان کیا ہے کہ کسی نقطہ کے قطبی سے وہ خط مراد ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنے والے ماسوا کے نقاط تماس کو وصل کرتے۔ اب اگر مخروطی قطع ناقص ہو اور نقطہ اس کے اندر واقع ہو تو ظاہر ہے کہ تماس خیالی ہوں گے لیکن قطبی کی مساوات کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ یہ اس صورت میں ایک حقیقی خط مستقیم کو تعبیر کرے گی۔ اس امر کی تشریح یوں ہو سکتی ہے کہ اگرچہ خط حقیقی ہے لیکن یہ منحنی کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا، اس لئے نقاط تماس خیالی ہیں اگرچہ ان کو لانے والا خط حقیقی ہے۔

عددی مثال کے ذریعہ ہم اس کی فرید توضیح کرتے ہیں، نقطہ (۳، ۳) قطع ناقص $۲ + ۲ = ۳۶$ کے اندر واقع ہے، اس لئے منحنی کے وہ تماس جو اس نقطہ میں سے گزریں گے خیالی ہوں گے۔ ہم یہاں فی الحقیقت نقاط تماس کو معلوم کرتے ہیں اور ان سے ایک خط وصل کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ (لام، ما) ایک نقطہ تماس ہے، تب اس پر کے تماس کی مساوات

$$۲ + ۲ = ۳۶ \text{ ہے، اس لئے } ۳ + ۲ = ۳۶$$

یعنی $۲ + ۲ = ۱۲$ پس ہمیں وہ مساواتوں

$$۲ + ۲ = ۱۲ \text{، } ۲ + ۲ = ۳۶$$

کو ایک ساتھ حل کرنا چاہئے

لام کو ساقط کرنے اور ما میں درجہ دوم کی مساوات کو حل کرنے سے

$$۲ = ۳ \pm ۲$$

ہذا پہلی مساوات سے $۲ = ۳ - ۲$

پس نقاط تماس $(۳ - ۲ = ۱، ۲ = ۳ - ۲ = ۱)$ اور $(۳ + ۲ = ۵، ۲ = ۳ + ۲ = ۵)$

ہیں، اور یہ خیالی ہیں جو ہمیں پہلے ہی سے معلوم تھا۔

ان کے لانے والے خط کی مساوات

$$\frac{۲ - ۳ + ۱ = ۰}{۲ - ۳ = ۰} = \frac{۲ - ۳ - ۱ = ۰}{۲ - ۳ = ۰}$$

ہے جو اختصار کے بعد لا + ۲ - ۱۲ = ۰ ہو جاتی ہے اور ایک حقیقی خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۸۷۔ جوا اشارات دفعہ گذشتہ میں درج کئے گئے ہیں وہ کسی دئے ہوئے خط مستقیم کے قطع کے لئے بھی صادق آتے ہیں۔ ہم نے کسی خط کے قطب کی تعریف یہ کی ہے کہ قطب ان نقطوں پر کے تماسوں کا نقطہ تقاطع ہے جن پر خط مذکور نشانی کو قطع کرتا ہے۔ اگر خط مذکور نشانی سے نہ ملے تو تماس فیالی ہوں گے لیکن ہم دیکھیں گے کہ اس صورت میں بھی وہ ایک دوسرے کو حقیقی نقطہ پر قطع کرینگے اور خط مذکور کا قطب حقیقی ہوگا۔ مثلاً خط لا + ۲ = ۱۲ قطع ناقص لا + ۲ = ۱۲ کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا۔ بائیں ہمہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ اس خط کا قطب حقیقی نقطہ (۳۶۳) ہے۔

۱۸۸۔ سادہ صورتوں میں قطبی کی مساوات۔

ذیل کی خاص صورتوں میں ہم قطبیوں کی مساواتیں یہاں درج کرتے ہیں۔

قطع مکانی ۱۔ لا = ۲۔ قطبی ۱۔ لا + لا = ۲۔ (۱ + لا) = ۰ (۲)

قطع ناقص ۱۔ لا + لا = ۱۔ قطبی ۱۔ لا + لا = ۱۔ لا + لا = ۱ (۳)

قطع زائد ۱۔ لا - لا = ۱۔ قطبی ۱۔ لا - لا = ۱۔ لا - لا = ۱ (۴)

قطع زائد لا = ج۔ قطبی لا + لا = ج۔ ج = ۲ (۵)

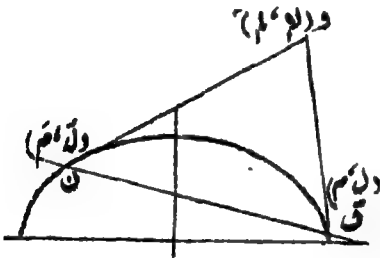
سب صورتوں میں قطبی کی مساوات ہر دو قائم اورائل محوروں کے لئے درست رہتی ہے کیونکہ ہم نے اس کو تماس کی مساوات سے اخذ کیا ہے جو مائل محوروں کی صورت میں بھی درست ہے۔

اب ہم ابتدائی اصولوں کی بنا پر قطع ناقص ۱۔ لا + لا = ۱ کے

لحاظ سے نقطہ (لا، ما) کا قطبی معلوم کریں گے۔
 [انتباہ۔ قطع زائد لا = ج کی صورت میں یہ بات قابل غور ہے کہ
 اگرچہ (لا، ما) پر کے حماس کی مساوات دونوں شکلوں لا + لا = ج اور لا + لا = ج
 اور لا + لا = ج میں لکھی جاسکتی ہے لیکن موخر الذکر مساوات باعموم
 قطبی کو تعبیر نہیں کرتی]

۱۸۹۔ کسی نقطہ کا قطبی لحاظ $\frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے معلوم کرو۔
 فرض کرو کہ نقطہ معلومہ و (لا، ما) ہے اور و میں سے جو حماس
 ون، وق کہیں گے ہیں ان کے نقاط تماس (ل، م) (ل، م)
 ہیں۔

مساوات $\frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = ۱$ (ج)



شکل ۶۹

پر غور کرو۔
 یہ درجہ اول کی مساوات
 ہے اس لئے کسی نہ کسی خط مستقیم
 کو تعبیر کرتی ہے۔
 اب ن اور وق پر کے حماس کی
 مساواتیں یہ ہیں

$$\frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ اور } \frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = ۱$$

اور چونکہ یہ حماس (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں، اس لئے

$$\frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ اور } \frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ (د)}$$

مساواتوں (د) سے ظاہر ہے کہ مساوات (ج) بالترتیب ہر دو جوڑوں

لا = ل، ما = م اور لا = ل، ما = م سے پوری ہوتی ہے۔
 اس لئے $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما} = ۱$ سے جو خط مستقیم تعبیر ہوتا ہے وہ
 (ل، م) (ل، م) میں سے گزرتا ہے یعنی یہ خط مستقیم ن ق ہے۔
 دوسرے الفاظ میں (لا، ما) کے قطبی کی مساوات حسب ذیل
 ہے :-

$$\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما} = ۱ \dots\dots\dots (۳)$$

۱۹۰۔ قطع مکانی کے لئے ہم دفعات ۱۸۳، ۱۸۴ کا عام طریقہ استعمال
 کر سکتے ہیں یا دفعہ ۱۸۹ کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔ یہاں ہم موخر الزکر
 طریقہ استعمال کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) ہے اور و
 میں سے قطع مکانی کے ماس و ن، و ق کھینچے گئے ہیں اور ان کے
 نقاط تقاطع بالترتیب (ل، م)، (ل، م) ہیں۔ مساوات

$$ما = ۲ (لا + ل) \dots\dots\dots (ج)$$

پر غور کرو۔ یہ درجہ اول کی مساوات ہے اس لئے کسی نہ کسی خط
 مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اب (ل، م) پر کے ماس کی مساوات
 ما = ۲ (لا + ل) ہے اور یہ (لا، ما) میں سے گزرتا ہے۔

$$م = ۲ (لا + ل)$$

جس سے ظاہر ہے کہ (ل، م) خط مستقیم (ج) پر واقع ہے، اسی طرح
 (ل، م) بھی اسی خط مستقیم پر ہے۔ پس مساوات (ج) اس خط مستقیم
 کو تعبیر کرتی ہے جو نقاط ماس کو وصل کرتا ہے۔

۱۹۱۔ مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی مخروطی کے اس وتر
 کے متوازی ہوتا ہے جس کی تنصیف نقطہ مذکورہ پر ہو۔

دفعہ ۸۴ کی رو سے نقطہ (لا، ما) کا قطبی

$$لا (لا + ما + گ) + ما (ما + ل + ن) + گ (لا + ل + ج) = ۰$$

ہے اور دفعہ ۱۵۳ کے مطابق وہ وتر جس کی تنصیف نقطہ (لا، با) پر ہوتی ہے
 (لا-لا) (لا، لا) (لا، لا) (لا، لا) (لا، لا) (لا، لا) (لا، لا) (لا، لا) (لا، لا) (لا، لا)
 دو نوں مساواتوں میں لا اور ما کے سر جداگانہ مساوی ہیں لہذا یہ خطوط مستقیم
 متوازی ہیں۔ صریحاً اگر نقطہ مذکورہ مخروطی کے باہر واقع ہو تو وہ وتر جس کی
 اس نقطہ پر تنصیف ہوتی ہے مخروطی سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے۔
 قطع ناقص کی صورت میں دفعہ ہذا کے نتیجہ کی تصدیق منحنی کو ان مزدوج قطروں
 کے لائن سے توہیل کرنے سے باسانی ہو سکتی ہے جن میں سے ایک قطر
 نقطہ مذکورہ میں سے گزرتا ہو۔ اس طرح دفعہ ۱۶۰ کی رو سے ناقص کی مساوات
 کی شکل یہ ہوگی

$$1 = \frac{لا}{۲} + \frac{با}{۲}$$

اور نقطہ مذکورہ (ج، ۰) ہوگا۔ جس وتر کی اس نقطہ پر تنصیف ہوتی ہے وہ
 حسب مفروض مزدوج قطر لا = کے متوازی ہے، اس نقطہ کا قطبی

$$\frac{لا}{۲} = ۱ \text{ ہے اور اس لئے لا = کے متوازی ہے۔ پس}$$

یہ دونوں خط باہم متوازی ہیں۔
 قطع مکانی کی صورت میں ہم اسی طرح دفعہ ۲ کو استعمال کر سکتے ہیں۔

مشقیں

۱۔ لحاظ مخروطی لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا کے نقطہ (۱، ۱) کے
 قطبی کی مساوات معلوم کرو۔

۲۔ مخروطی لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا کے نقطہ (۱، ۱) کے
 قطبی کی مساوات معلوم کرو۔

۳۔ منحنی لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا کے
 لحاظ سے میدان کے قطبی کی مساوات دریافت کرو۔

۴۔ دفعات ۱۸۳، ۱۸۴ کے طریقہ کے مطابق ابتدائی اصولوں کی بنا پر دفعہ ۸۸ کی صورتوں میں قطبیوں کی مساواتیں دریافت کرو۔

۵۔ اگر بلحاظ منحنی $\frac{لا}{لا} + \frac{با}{با} = ۱$ کے نقطہ ن (لا، با) کے قطبی پر نقطہ مذکور د سے عمود کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس عمود کی مساوات

$$\frac{لا}{لا} - \frac{با}{با} = ۱ - \frac{لا}{لا} - \frac{با}{با} = ۰$$

اگر (لا، با) مخروطی پر واقع ہو تو بتاؤ کہ اس صورت میں یہ مساوات کیا ہو جائے گی۔

۶۔ مشق ۵ کا عمود محور اعظم سے گ پر ملتا ہے اور ن ل محور اعظم پر عمود کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ج گ = ن \times ج ل$$

۷۔ بلحاظ قطع مکانی $ما = ۲ (لا + لا)$ کے نقطہ ن (لا، با) کے قطبی کی مساوات معلوم کرو۔

اگر قطبی مرتب سے ت پرے تو ت کو مبدا سے وصل کرنے والے خط کی مساوات دریافت کرو۔ پھر ماسکہ کو مبدا مان کر ثابت کرو کہ زاویہ ن س ت قائم ہے۔

[نوٹ۔ ملاحظہ ہو کہ مرتب کی مساوات $لا + لا = ۲$ ہے۔]

۸۔ اس امر کی تصدیق کرو کہ اگرچہ نقطہ (۱، ۲) سے مخروطی $لا = ۲$ کے ماس خیالی ہیں، لیکن وتر تماس حقیقی ہے اور اس کی مساوات $لا - لا = ۲ = ۲$ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ نقطہ (لا، با) سے قطع زاویہ $\frac{لا}{لا} - \frac{با}{با} = ۱$ کے جو ماس کھینچ سکتے ہیں وہ حقیقی اور الگ الگ اسی صورت میں ہوں گے

جبکہ $\frac{لا}{لا} - \frac{با}{با} > ۱$ لیکن ان کا وتر تماس خط مستقیم $\frac{لا}{لا} - \frac{با}{با} = ۱$ ہے۔

میں لیں تو مسئلہ مذکورہ آسانی سے ثابت ہو جاتا ہے۔
کیونکہ اس صورت میں (لا، م) کا قطبی

$$\frac{لا}{م} = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ا}$$

ہے، اگر یہ قطبی (لا، م) میں سے گزرے تو

$$1 = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ا}$$

یہ ربط صریحاً متشکل ہے، اس لئے (لا، م) کا قطبی (لا، م) میں سے گزرتا ہے۔

مشق

۱۰۔ اوپر کا مسئلہ دفعہ ۸۸ کی باقی سادہ صورتوں کے لئے ثابت کرو۔

۱۹۳۔ مزدوج نقطے — تعریف — اگر دو نقطے ایسے ہوں کہ مخروطی کے لحاظ سے ہر ایک کا قطبی دوسرے نقطہ میں سے گزرے تو یہ نقطے بلحاظ مخروطی مذکورہ مزدوج نقطے کہلاتے ہیں۔

مزدوج خطوط — اسی طرح سے اگر دو خط ایسے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک کا قطب دوسرے خط پر واقع ہو تو ان خطوں کو مزدوج خط کہتے ہیں۔ اس تعریف میں ایک مسئلہ ثبوت طلب ہے جسے ہم حسب ذیل ثابت کرتے ہیں۔
۱۹۴۔ اگر خط ن کا قطب ن خط م پر واقع ہو تو خط م کا قطب ق خط ن پر واقع ہو گا۔

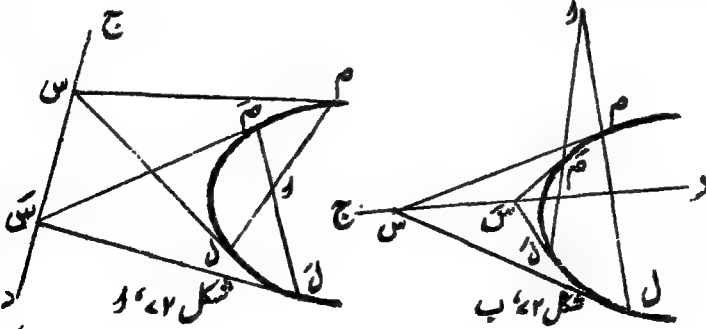


ق کا قطبی (دیکھو شکل ۱۷۱) ق حسب مفروض ن میں سے گزرتا ہے، لہذا ن کا قطبی ن ق میں سے گزرے گا اور یہی ثابت کرنا تھا۔
[شکل بالا میں نقطہ ق کو ارادۂ ن سے الگ رکھا گیا ہے تاکہ طالب علم شکل ہی سے اس نتیجہ کو درست تسلیم کر لینے کی طرف راغب نہ ہو جو درحقیقت اسے ثابت کرنا ہے]

۱۹۵۔ اگر ایک خط ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے تو اس کا قطب ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ ۱۷۱ ہے (دیکھو شکل ۱۷۱ ب) اور اس کا قطبی ۱۷۱ ہے، نیز فرض کرو کہ ن کوئی خط ہے جو ۱۷۱ میں سے گزرتا ہے اور اس کا قطب ن ہے۔ یہ ن کا قطبی ۱۷۱ میں سے گزرتا ہے، لہذا ۱۷۱ کا قطبی ن میں سے گزرتا ہے، یعنی ۱۷۱ ن میں سے گزرتا ہے، یعنی ن ۱۷۱ پر واقع ہے، لہذا ن کا قطب ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم یعنی ۱۷۱ کے قطبی پر واقع ہوتا ہے۔ (ملاحظہ ہو دفعہ گذشتہ کے آخر کا نوٹ)

۱۹۶۔ مسئلہ بالا کی مدد سے ہندسی طور پر کسی نقطہ کے قطبی کا پھینکا۔
دفعہ ۱۹۵ کا نتیجہ نہایت ضروری ہے کیونکہ اس کی مدد سے کسی نقطہ کا قطبی پھینکا جاسکتا ہے۔



کیونکہ نقطہ ۱۷۱ میں سے خواہ یہ منحنی کے اندر ہو جیسا شکل (۱۷۱ ب) میں آیا منحنی کے

اگر ہر مینا شکل (۷۲) میں ہم ایسے وتر کھینچ سکتے ہیں جو مخروطی سے حقیقی نقطوں مثلاً 'م'، 'ل'، 'ف' پر ملیں اور ان وتروں کے سروں پر کے پاس ایک دوسرے کو 'س'، 'س' پر قطع کرتے ہیں جن کو ماننے سے مطلوب قطبی حاصل ہوتا ہے۔

اس سے ہمیں قطبی کی ایک اور تعریف حاصل ہوتی ہے۔
پہلے ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ جوں جوں کوئی وتر ایک ثابت نقطہ کے گرد گھومتا ہے اس کے سروں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔ اس ثابت خط کو نقطہ مذکورہ کا قطبی کہا جاسکتا ہے۔
اس طریقہ کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اس میں ہمیں خیالی مقادیر کا استعمال نہیں کرنا پڑتا، لیکن چونکہ ہندسہ تحلیلی کے اعلیٰ حصوں میں یہ مقادیر بکثرت استعمال ہوتی ہیں اس لئے ابھی سے ہمیں ان کی ماہیت سے واقف ہونے کی کوشش کرنی چاہئے۔

۱۹۷۔ اگر ایک نقطہ ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو اس کا قطبی ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

یہ صاف ظاہر ہے کہ اس نقطہ کا قطبی ہمیشہ اس ثابت خط کے قطب میں سے گزرتا ہے۔

۱۹۸۔ مسئلہ بالا کی مدد سے خط مستقیم کے قطب معلوم کرنے کا ہندسی عمل۔

اسی طرح ہے، ہم اس کو خط کے قطب کی تعریف تصور کر سکتے ہیں اور

دفعہ ۱۹۶ کے اشارات اس پر بھی صادق آتے ہیں۔

۱۹۹۔ ایک خط مستقیم کے قطب کے محدود معلوم کرو۔

ہم دو مختلف طریقے استعمال کر سکتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ خط معلومہ پر دو ثابت نقطے $ل$ اور $ب$ ہیں، تب دفعہ ۱۹۲ کی رو سے $ل$ اور $ب$ کے قطبی دونوں خط $ل$ اور $ب$ کے قطب میں سے گذرتے ہیں، اس لئے ان کا نقطہ تقاطع قطب مطلوبہ ہے، پس ہم مطلوبہ خط مستقیم پر کوئی دو نقطے منتخب کرتے ہیں، ان کے قطبیوں کی مساواتیں لکھ لیتے ہیں اور ان کو حل کرنے سے ان کا نقطہ تقاطع معلوم کرتے ہیں۔

(۲) زیادہ عام طریقہ یہ ہے کہ ہم فرض کرتے ہیں کہ مطلوبہ نقطہ $(ل، ب)$ ہے اور پھر $ل$ اور $ب$ کی وہ قیمتیں منتخب کرتے ہیں جن سے $(ل، ب)$ کا قطبی وہی حاصل ہو جو معلومہ خط مستقیم ہے۔

مثال ۱۔ خط مستقیم $ل$ اور $ب$ کا قطب بلحاظ ناقص

$$\frac{ل}{ب} + \frac{ب}{ل} = ا \text{ کے معلوم کرو۔}$$

فرض کرو کہ $(ل، ب)$ مطلوبہ قطب ہے۔ تب معلومہ خط مستقیم وہی ہوگا

$$\text{جو } \frac{ل}{ب} + \frac{ب}{ل} = ا \text{ ہے، سروں کا مقابلہ کرنے سے}$$

$$ل = \frac{ل}{ب}، ب = \frac{ب}{ل}$$

نتیجہ صریح۔ اگر قطب مفروضہ خط مستقیم وہی واقع ہو تو یہ خط حاسر ہوگا۔ اس کے لئے شرط یہ ہے کہ $ل + ب = ا$

(۲) اسکے لئے شرط معلوم کرو کہ خطوط $ل$ اور $ب$ کا $ل + ب = ا$ اور $ل، ب = ا$ مندرجہ بالا ناقص کے لحاظ سے مزدوج ہوں۔

یہاں دوسرے خط کا قطب پہلے خط پر ہونا چاہئے یعنی نقطہ

(۱) 'ب' م (خط لا + م = ا پر ہونا چاہئے۔ لہذا

$$\text{لا} + \text{م} + \text{ب} = \text{م} = ۱$$

(۳) مخروطی لا + لا + لا + م + م + م = ۱ کے
محاذ سے خط لا + لا + لا = م = ۱ کا قطب معلوم کرو۔

(لا، م) کا قطبی لا (لا + م + ۱) + م (لا + م + ۱) + لا (لا + م + ۱) = ۱

اگر یہ خط وہی ہو جو لا + لا + لا = م = ۱ سے تعبیر ہوتا ہے تو

$$\frac{\text{لا} + \text{م} + ۱}{۶} = \frac{\text{لا} + \text{م} + ۱}{۹} = \frac{\text{لا} + \text{م} + ۱}{۳}$$

ان مساواتوں کو ہم لا، م کے لئے حل کرتے ہیں۔
پہلے اور آخری جملے کے مساوی ہونے سے

$$\text{لا} + \text{م} + ۱ = \text{لا} + \text{م} + ۱ = \text{لا} + \text{م} + ۱ = ۱$$

دوسرے اور آخری جملے کے مساوی ہونے سے

$$\text{لا} + \text{لا} + ۱ = ۲ + \text{لا} + ۱ = ۲ + \text{لا} + ۱ = ۱$$

ان دو خطی مساواتوں کو لا، م کے لئے حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے
لا = ۱ اور م = ۱ یعنی مطلوبہ قطب نقطہ (۱، ۱) ہے۔

مشقیں

خطوط ذیل کے قطبوں کے محدد معلوم کرو:-

۱۱۔ لا + لا + م = ۵	کا	بمحاذ	۲ لا۔ م = ۳ کے
۱۲۔ لا + لا + م = ۵	کا	بمحاذ	لا + لا + م = ۱ کے
۱۳۔ لا + لا + م = ۱۲	کا	بمحاذ	لا + لا + م = ۳ کے

۱۳۔ لحاظ مخفی ۳ لا + ۹ ما = ۳ کے نقاط ن (۳، ۳) اور ق (۳، ۳) کے قطبیوں کی مساواتیں معلوم کرو۔ قطبیوں کے نقطہ تقاطع کے معلوم کرو، پھر اس کے قطبی کی مساوات معلوم کرو اور یہ ثابت کرنے سے دفعہ ۹۲ کی تصدیق کرو کہ یہ قطبی نقاط ن اور ق کا خط وصل ہے۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ مخروطی لا + ۲ ما لا + ۲ ب ما = ا کے لحاظ سے خط لا + م ما = ا کے قطب کے محدود $\frac{ب-ل}{ب-ا}$ ، $\frac{م-ل}{م-ا}$ ہیں۔

۱۶۔ مشق ماقبل سے مستنبط کرو کہ خطوط لا + م ما = ا اور لا + م ما = ا باہم مزدوج ہوں گے اگر ب ل ل۔ م (ل م + ل م) + ل م م = ل ب۔ م۔
۱۷۔ مشق ۱۶ کے نتیجہ سے خط لا + م ما = ا کے ماس ہونے کی شرط معلوم کرو۔

۲۰۔ مرکز کا قطبی۔ لاتنا ہی پر کا خط۔
عام مخروطی کے لحاظ سے نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات
لا (لا + م ما + گ) + م (لا + م ب + ف) + گ (لا + ف + ج) = ۰ ہے
اب اگر (لا، ما) مخروطی کا مرکز ہو تو
لا + م ما + گ = ۰ اور لا + م ب + ف = ۰ (دفعہ ۹۶)

پس مساوات بالا کی شکل یہ ہو جاتی ہے
(لا + م ما + گ) + م (لا + م ب + ف) + گ (لا + ف + ج) = ۰
اس مساوات میں نہ لا شامل ہوتا ہے نہ ما، پس یہ دیکھنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ اس عجیب و غریب نتیجہ کا کیا مفہوم ہے۔

اولاً ہم جانتے ہیں کہ ہر خط مستقیم کی مساوات کو لا + م ما = ا کی شکل میں تحویل کیا جاسکتا ہے اور ل اور م کی مختلف قیمتوں کیلئے اس کے مختلف خطوط مستقیم تعمیر ہوتے ہیں۔ نیز متعددوں کے محوروں پر اس خط کے مقطوع بالترتیب ل اور م ہیں۔ پس ل اور م جتنے چھوٹے ہوں گے اتنے ہی بڑے مقطوع ہونگے اور یہاں سے اتنا ہی زیادہ دور خط مستقیم ہوگا۔ اور بالآخر جب ل، م

بالکل صفر ہو جائیگا تو یہ دونوں نقطوں کے لاتینا ہی ہو جائیگا اور خط مستقیم باقی تمام لاتینا ہی حاصل ہوگا۔ لہذا جب لا اور با کے صفر ہوں تو ہم مساوات کو لا + ص = با کی شکل میں تبدیل کر سکتے ہیں جہاں ل اور ص دونوں صفر ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک خط مستقیم کی مساوات میں لا اور با دونوں کے صفر صفر ہوں تو خط مستقیم باقی تمام لاتینا ہی حاصل ہوگا اس خط کو لاتینا ہی پر کا خط کہتے ہیں۔

پس مرکز کے قطبی کی مساوات کے یہ معنی ہیں کہ

مرکز کا قطبی لاتینا ہی پر کا خط ہے۔

یا بالفاظ دیگر لاتینا ہی پر کے خط کا قطب مرکز ہے۔

سطور بالا سے ان امور کی جو ہم نے متعارفوں کے ذریعہ اس سے پہلے بیان کئے ہیں تشریح اور تصدیق ہوتی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ متقارب ایک خط مستقیم ہے جو منحنی سے لاتینا ہی پر کسی دو نقاط پر ملتا ہے یعنی یہ منحنی کا ایسا لمس ہے جس کا نقطہ تماس لاتینا ہی فاصلہ پر ہے۔ لیکن دونوں متقارب مرکز پر ملتے ہیں، لہذا متقارب منحنی کے وہ لمس ہیں جو مرکز میں سے گزرتے جائیں۔ پس مرکز کا قطبی جو ان لمسوں سے نقاط تماس کو ملاتا ہے باقی تمام لاتینا ہی پر واقع ہے۔

توضیحی مثالیں

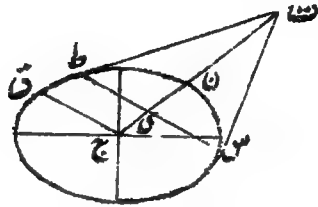
(۱) اگر ایک قطع ناقص کے لمحا سے (جس کا مرکز ج ہو) نقطہ ت کا

قطبی خط ج ت سے می پر ملے اور ج ت منحنی سے ن پر ملے تو ثابت کر دو کہ

$$ج ی \times ج ت = ج ن$$

ج ن اور اس کے مزدوج قطر ج ق کو محور بانو، تب نقطہ

کے محدود (لا) ہوں گے جہاں ج ت = لا اور قطع ناقص کی مساوات
کی شکل $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ج} = ۱$ ہوگی جہاں لا = ج ن اور ب = ج ق



شکل ۳

اب ت کا قطبی ہے $\frac{لا}{ب} = ۱$ لہذا می پر لا = $\frac{لا}{ب}$ یعنی
ج می = $\frac{لا}{ب}$

اس لئے ج می x ج ت = لا = ج ن
نوٹ۔ چونکہ ط می کی مساوات لا = $\frac{لا}{ب}$ ہے، اس لئے ط می
متوازی ہے ق ج کے جس کی مساوات لا = $\frac{لا}{ب}$ ہے، بالفاظ دیگر
ت کا قطبی مزدوج قطر کے متوازی ہے۔ اب ت ط، ت می
ماس ہیں اور ج ن، ط می کی جو ج ق کے متوازی ہے
تنصیف کرتا ہے۔ اس لئے ہم فوراً اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ اگر کسی
نقطہ سے ماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاط ماس کو طانے والا وتر اس
خط سے جو نقطہ مذکورہ کو مرکز سے وصل کرتا ہے دو مساوی حصوں میں
تقسیم ہو جاتا ہے۔

(۲) ایک مخروطی نوک کے مماسات کے قطب ن کا طریق بلحاظ ایک اور
مخروطی ب کے معلوم کرو۔

اس طرح کے سوالات اکثر بحث میں آتے ہیں۔ فرض کر دو کہ ہم ایک
قطب سے ت ب حسب مفروض اس کا قطبی بلحاظ ب کے لے کر س کرتا ہے۔
پس ہم پہلے قطبی کی مساوات لکھ لیتے ہیں، پھر وہ شرط معلوم کرتے ہیں

جو اس قطبی کو a سے مس کرنے کے لئے پوری کرنی چاہئے اس طرح ہمیں
(لام، لم) میں ایک ربط حاصل ہوتا ہے جو مطلوبہ طریق کی مساوات ہے۔
(طاب علم کو چاہئے کہ حل کے اس طریقہ کو بخوبی ذہن نشین
کرنے)

مثلاً مخروطی $\frac{لا}{عم} + \frac{ما}{بہ} = ۱$ کے تماسات کے قطبوں کا طریق
بلحاظ مخروطی $۱ لا + ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا + ۶ جا = ۰$ کے
معلوم کرو۔

فرض کرو کہ (لام، لم) ایک قطب ہے، اس کا قطبی

لا (۱ لا + ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا + ۶ جا) = ۰

ہے اور حسب مفروض اسے $\frac{لا}{عم} + \frac{ما}{بہ} = ۱$ کو مس کرنا چاہئے

اب خط ل لا + م ما + ۱ = ۰ مؤخر الذکر مخروطی کو مس کرے گا اگر
عم ل + بہ م = ۱

لیکن اس صورت میں $\frac{۱ لا + ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا + ۶ جا}{۱ لا + ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا + ۶ جا} = ۱$ اور ہم $\frac{لا}{عم} + \frac{ما}{بہ} = ۱$

۰ عم (۱ لا + ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا + ۶ جا) + بہ (۱ لا + ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا + ۶ جا) = ۰

حرف کے آخری ہندسوں کو حذف کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ طریق ایک
مخروطی ہے جس کی مساوات ہے

عم (۱ لا + ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا + ۶ جا) + بہ (۱ لا + ۲ ما + ۳ با + ۴ گا + ۵ فا + ۶ جا) = ۰

(۳) قطع ناقص $\frac{لا}{را} + \frac{ما}{بہ} = ۱$ کے عمادوں کے قطبوں کا طریق
دریافت کرو۔

(لا، ما) پر کے عماد کی مساوات ہے

$$\frac{لا}{لا} - \frac{ب^۱}{ب^۱} = \frac{ب^۱}{ب^۱} - \frac{ب^۱}{ب^۱} \dots \dots \dots (۱)$$

اگر اس خط کا قطب (ن، ق) ہو تو یہ خط مساوات ذیل سے بھی تعبیر ہو سکتا ہے

$$\frac{لان}{لا} + \frac{ماقی}{ب^۱} = ۱$$

$$\text{اس لئے } \frac{لا}{لا} / \frac{ن}{ن} = - \frac{ب^۱}{ب^۱} / \frac{ق}{ق} = - \frac{ب^۱}{ب^۱}$$

$$\text{جس سے } لا = \frac{ن}{ب^۱} (ن - ب^۱) ، ما = \frac{ق}{ب^۱} (ق - ب^۱)$$

لیکن (لا، ما) ناقص پر ہے اس لئے

$$\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ب^۱} = ۱$$

$$= \left\{ \frac{ن}{ب^۱} (ن - ب^۱) \right\} + \left\{ - \frac{ق}{ب^۱} (ق - ب^۱) \right\} = ۱$$

$$یا ن ق (ن - ب^۱) = ق ق + ب^۱ ن$$

پس (ن، ق) کا طریق ہے

$$لا ما (ن - ب^۱) = ق ق + ب^۱ ن$$

باب پانزدہم پر متفرق مشقیں

۱۸۔ ابتدائی اصولوں سے نقطہ (۱) کا قطبی لحاظ مکانی ما = ۲ لا کے معلوم کرو۔

$$۱۹۔ مخروطیوں لا ما + لا + ما = ۲ ، لا + لا ما + ما = ۲$$

$$لا - ما = لا ، لا + لا + ما = ۲ ، لا + لا + ما = ۲$$

کے لحاظ سے نقطہ (۲، ۱) کے قطبیوں کی مساواتیں لکھو۔

۲۰۔ مخروطیوں (۱) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (۲) $y = mx + c$ (۳) $ax^2 + by^2 = c$ ج

کے لحاظ سے خط $ax + by = c$ کے قطب کے محدد لکھو۔

۲۱۔ مشق ۲۰ کے نتائج سے وہ شرائط حاصل کرو کہ خطوط $ax + by = c$ ل $ax + by = c$ مساوی $ax + by = c$ کی مخروطیوں کے لحاظ سے مزدوج ہوں۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ ناقص کے ماسک کا قطبی اس کا متناظر مرتب ہوتا ہے۔

۲۳۔ مکانی کی صورت میں شق ماقبل کا مسئلہ کیا صورت اختیار کرے گا؟

۲۴۔ ایک نقطہ (x_1, y_1) سے مکانی $y = mx + c$ کے ماسک کا محدد لکھو کہ اس کا قطب (x_2, y_2) سے $ax + by = c$ کے وسطی نقطہ (x_3, y_3) کے

محدد $(x_4, y_4) = \frac{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}{2}$ ، $ax + by = c$ ہیں۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ مشق ۲۴ کا خط $ax + by = c$ کے محور کے متوازی ہے۔

۲۶۔ قطع مکانی کے لحاظ سے نقطہ (x_1, y_1) کا قطبی (x_2, y_2) سے گزرنے والے

قطر سے $ax + by = c$ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ax + by = c$ کا وسطی نقطہ (x_3, y_3) پر

واقع ہوتا ہے اور اس نقطہ پر کا ماسک $ax + by = c$ کے قطبی کے متوازی ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص اور اس کے امدادی دائرہ کے لحاظ سے

کسی نقطہ کے قطبی ناقص کے محور اعظم پر ملتے ہیں۔

۲۸۔ ایک خط معلومہ پر کے نقطوں میں سے ایک دائرہ کے ماسک کے

زوج کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے اوپر تاس ایک ثابت نقطہ

میں سے گزرتے ہیں۔

۲۹۔ اگر ناقصوں کا ایک نظام ایسا ہو کہ ان کا محور اعظم مشترک ہو تو

ثابت کرو کہ ان ناقصوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے جو قطبی ہوں گے

وہ سب محور اعظم پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں گے۔

اس مسئلہ کو درست دیکر دیکھو کہ یہ اس صورت میں جبکہ سب

ناقص ایک مشترک قطر کے سروں پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں
کیا شکل اختیار کرتا ہے۔

۳۰۔ خط لا جم عہ + ما جب عہ - ع =۔ کا قطب بلحاظ مکانی ما = م ولا
کے معلوم کرو۔

۳۱۔ نقطہ (لا، ما) کا طریق معلوم کرو جبکہ اس کا قطبی بلحاظ مکانی ما = م ولا
کے خط لا + م = ا کے متوازی ہو۔

۳۲۔ اگر کسی نقطہ کا قطبی بلحاظ $\frac{لا}{ب} - \frac{ما}{ب} = ا$ کے منحنی کے مزدوج

محور کے ایک سرے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ قطب مزدوج
قطع زائد کے اس مماس پر واقع ہوگا جو مذکورہ محور کے دوسرے سرے میں
سے کھینچا جائے۔

۳۳۔ دائرہ لا + ما = ا کے لحاظ سے دائرہ لا + ما = ۲ لا =۔ کے
ماسوں کے قطبوں کا طریق دریافت کرو۔

۳۴۔ اگر ایک خط مستقیم ایک ایسے دائرہ کو مس کرے جس کا مرکز
ایک مکانی کے رأس پر ہو اور جس کا قطر وتر خاص کے مساوی ہو تو
ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کے قطب کا طریق بلحاظ مکانی مذکور کے قائم
ہندولی ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ دائرہ (لا - با) + ما = ج کے ماسات کے
قطبوں کا طریق بلحاظ دائرہ لا + ما = ا کے مخروطی

(ج - با) لا + ج ما + ۲ لا + با = ا ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ بلحاظ ان مخروطی تراشوں کے جو لا + ما + ۲ ک لا = ا
میں ک کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتی ہیں نقطہ (ف، گ)
کے قطبی ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

اگر (ف، گ) ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو ثابت
کرو کہ قطبوں کا نقطہ تقاطع ایک ثابت قطع زائد پر حرکت کرتا ہے

۳۷۔ بلحاظ $\frac{لا}{را} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے ایک نقطہ کا قطبی ایک قطع زائد کو

مس کرتا ہے جس کی مساوات $\frac{لا}{را} - \frac{ما}{ب} = ۱$ ہے، ثابت کرو کہ نقطہ

کا طریق قطع زائد ہے۔

۳۸۔ ایک نقطہ ن سے ایک قطع ناقص کے ماس کھینچے گئے ہیں

اور نقطہ مذکورہ سے وتر تاس پر عمود ن ل نکالا گیا ہے۔ اگر ن

ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت

کرے تو ثابت کرو کہ ل کا طریق قائم ہڈ لوی ہے۔

۳۹۔ اگر ایک نقطہ ن کے قطبی بلحاظ دو ثابت دائروں کے کھینچے

جائیں اور قطبیوں کا تقاطع ق ہو تو خط ن ق کے نقطہ تنصیف

کا طریق دریافت کرو۔

۴۰۔ اگر ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرے کہ اس کا قطب

بلحاظ ایک ثابت دائرہ کے ایک معلومہ خط مستقیم پر حرکت کرے،

تو ثابت کرو کہ اول الذکر خط مستقیم کا قطب بلحاظ کسی اور دائرہ کے بھی

ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے گا۔

۴۱۔ ایک بیرونی نقطہ سے ایک مکانی کے دو ماس کھینچے گئے ہیں،

اگر ان کا وتر تاس ہمیشہ مکانی پر عماد ہو تو ثابت کرو کہ بیرونی نقطہ کے

طریق کی مساوات $ما (لا + را) + ۴ لا = ۰$ ہے۔

۴۲۔ ثابت کرو کہ وہ سب دائرے جن کے لحاظ سے ایک نقطہ

معلومہ کا قطبی وہی ہو ایک مشترک اصلی محور رکھتے ہیں اور یہ اصلی

محور اس عمود کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتا ہے جو نقطہ مذکورہ سے

اس کے قطبی پر کھینچا جائے۔



باب شانزدہم

ایک متبدل کے ذریعہ کسی مخروطی پر کے نقطوں کی تعبیر

۲۰۱۔ متبدل۔ مخروطی پر کے نقطوں کے متعلق جو مسائل ہوں ان کی بحث میں اکثر اوقات یہ زیادہ سودمند ہوتا ہے کہ ان نقاط کو صرف ایک متغیر متبوع کی رقوم میں بیان کیا جائے بجائے اس کے کہ ہر نقطہ دو متغیروں سے تعبیر ہو اور یہ متغیر ایک ربط کے ذریعہ باہم منسلک ہوں۔ پس اگر ہم کسی مخروطی کے نقطوں کے محدودوں کے لئے ایک متغیر کی رقوم میں سادہ جملے معلوم کر سکیں تو اس متغیر کی کسی خاص قیمت سے منحنی کے ایک نقطہ کا تعین ہوگا، جب کسی متغیر کو اس طرح استعمال کیا جائے تو اسے متبدل کہتے ہیں۔

مثلاً دائرہ $لا + ما = وا$ کی صورت میں ہم رکھ سکتے ہیں

$لا = و$ حجم طہ ، $ما = و$ جب طہ

اس طرح منحنی کے ہر نقطہ کے جواب میں طہ کی ایک مختلف قیمت ہے، اس جگہ طہ متبدل ہے۔

لازمی طور پر منحنی کے ہر ایک نقطہ کے جواب میں متبدل کی ایک قیمت ضرور ہونی چاہئے، اور متبدل کی ایک ہی قیمت سے منحنی کے دو نقطے تعبیر نہیں ہوتے چاہئیں۔

صریحاً ہم دونوں محدودوں کو ایک محدود کی رقوم میں لا سکتے ہیں کیونکہ مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے ما کو لا کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے لیکن ایسے جملات میں اہم مقداریں شریک ہونگی اس لئے ان سے

ساتھ عمل کرنا مشکل ہوگا۔ مگر بعض صورتوں میں یہ ممکن ہوتا ہے کہ ہر دو تغیر لا، ما کسی اور تیسرے تغیر کی رقوم میں باہمی بیان ہو سکیں۔ اگلی دفعہ میں ہم دیکھیں گے کہ مخروطیوں کی تین مساواتوں کی صورت میں لا، ما کے لئے نہایت سادہ اور موزوں جملے حاصل ہوتے ہیں۔

۲۰۲۔ متبدلی تعبیر کی سادہ صورتیں

(۱)۔ مکافی $ا = ۳ لا$ میں اگر ہم رکھیں

$$\left. \begin{aligned} ۲ = ۱ \\ ۱ = ۲ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (۱)$$

تو اس طرح سے ہم نے لا اور ما کو جبکہ فقط (لا، ما) منحنی پر واقع ہو مہ کی رقوم میں نہایت آسان شکل میں بیان کر دیا۔ نیز چونکہ منحنی کے ہر نقطہ کا معین مختلف ہے اس لئے ہر نقطہ مہ کی مختلف قیمت سے تعبیر ہوتا ہے۔

جب مہ کی قیمت ∞ سے شروع ہو کر بالترتیب بڑھتے بڑھتے $\infty +$ ہو جاتی ہے تو اس کے جواب میں ما کی قیمت ∞ سے شروع ہو کر $\infty +$ ہو جاتی ہے۔ اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ منحنی پر ایک نقطہ اس کے اس حصہ پر جو محور سے نیچے ہے لا متناہی فاصلہ سے حرکت کر کے بالترتیب راس پر آتا ہے اور پھر محور کے اوپر کے حصہ پر حرکت کرتا ہوا لا متناہی فاصلہ پر چلا جاتا ہے، مہ کی قیمت صفر سے راس تعبیر ہوتا ہے کیونکہ اس صورت میں

$$۰ = لا ، ۰ = ما$$

$$(۲) \text{ ناقص } \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$$

یہاں اگر ہم رکھیں $\left. \begin{aligned} لا = ا \text{ جبکہ } \\ ما = ب \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (۲)$

تو نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہوگا، کیونکہ

$$\left(\frac{لا}{۱}\right) + \left(\frac{ما}{۱}\right) = ۱ = \text{جہ}^۱ طہ + \text{جب}^۱ طہ = ۱$$

نیز جب طہ بالترتیب ۰ سے ۳۶۰ تک بدلتا ہے تو متناظر نقطہ گھڑی کی مقابل سمت میں ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے، نیز طہ کی کسی ایک قیمت سے دو نقطے تعبیر نہیں ہو سکتے کیونکہ اگر جب طہ اور جہ طہ دونوں معلوم ہوں تو ہمیں ۰ اور ۳۶۰ کے درمیان طہ کی صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$(۳) \text{ قطع زائد } \frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۱} = ۱ \text{ یہاں اگر جہ رکھیں}$$

$$لا = \text{واقط طہ}، ما = \text{ب مس طہ} \dots\dots (۳)$$

تو نقطہ (لا، ما) منحنی پر واقع ہوگا اور دو مختلف نقطوں کے لئے طہ کی دو مختلف قیمتیں ہوں گی۔

اگر طہ ۰ سے بڑھتے بڑھتے ۳۶۰ تک پہنچے تو متناظر نقطہ مکمل قطع زائد مرتسم کرے گا، لیکن ترتیب کی ترتیب پر اقلیت سے غور کرنا چاہئے۔ نقطہ دایہ طرف کے رأس سے شروع ہوتا ہے اور جب طہ بدل کر ۹۰ تک پہنچتا ہے تو نقطہ دائیں جانب کی شاخ کے بالائی حصہ پر حرکت کر کے لا متناہی فاصلہ پر پہنچ جاتا ہے۔

چونکہ ۰ کے بعد قط طہ اور مس طہ دونوں کی قیمتیں منفی ہوتی ہیں اس لئے اب نقطہ مذکورہ بائیں شاخ کے نچلے حصہ پر لا متناہی فاصلہ سے شروع ہوتا ہے اور بندرتج حرکت کرتے کرتے رأس کی طرف آتا جاتا ہے اور بالآخر جب زاویہ طہ ۱۸۰ کے مساوی ہو جاتا ہے اور اس کی تباہی پر قط طہ = -۱ اور مس طہ = ۰ ہو جاتا ہے تو یہ بائیں جانب کے رأس پر پہنچ جاتا ہے، اس کے بعد یہ بائیں شاخ کے اوپر کے حصہ پر حرکت کرتا ہے اور جو وقت طہ ۲۷۰ کے مساوی ہوتا ہے تو نقطہ اس شاخ

پر لا متناہی فاصلہ پر پہنچ جاتا ہے اور بالآخر دائیں جانب کی شاخ کے
بچلے حصہ پر سے ہوتا ہوا پھر مبدل پر آتا ہے۔
پس جب ہماری مراد اس نقطہ سے ہو جس کا متبدل مہ یا طہ
ہے تو ہم اس نقطہ کو نقطہ مہ یا "نقطہ طہ" سے موسوم کر سکتے ہیں۔

مشقیں

- ۱۔ اگر $لا = ا + ت$ ، $ما = ا + ت$ جہاں ت کوئی تغیر ہے تو ثابت کرو کہ
نقطہ (لا، ما) ایک مکانی کو مرتسم کرتا ہے جس کا رأس (۱، ۱) ہے۔
نیرمضیٰ پر نقطہ کی حرکت کو بیان کرو جبکہ ت سے ∞ تک بدلے
(مساوات معلوم کرنے کے لئے ت کو سا قط کرو)
- ۲۔ اگر $لا = ا + ج$ اور $ما = ب + ج$ جب طہ ∞ تک بدلے تو ثابت کرو کہ (لا، ما)
ایک ناقص کو مرتسم کرتا ہے جس کا مرکز (ج، د) ہے اور نضی کے گرد نقطہ کی حرکت
پورے طور پر بیان کرو جبکہ طہ سے ∞ تک بدلے۔
- ۳۔ قائم زاویہ لا، ما = ۹۰ میں ثابت کرو کہ ہم لا، د قط طہ اور ما = داس طہ
رکھ سکتے ہیں۔

- ۴۔ قطع ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ میں (۱) مساوی مزدوج قطروں
کے سروں پر کے (۲) وتر خاص کے سروں پر کے متبدلی زاویے معلوم کرو
(ان نقطوں کے محدود معلوم کر کے طہ کی قیمت معلوم کرو)
- ۲۰۴۔ مذکورہ بالا طریقہ کا استعمال قطع مکانی کی صورت میں۔
اسہ ہم مکانی ما = ۱۴ لا پر

$$لا = ۱۴، ما = ۱۲$$

کے ذریعہ نقطوں کو تعمیر کرنے کی چند مثالیں درج کریں گے۔

اس طرز تعمیر کا غایاں فائدہ اس وقت حاصل ہوتا ہے جب ہمیں
قطع مکانی اور بعض اور منحیات (جن کی مساواتیں معلوم ہوں) کے

نقاط تقاطع معلوم کرنا مقصود ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ نقطہ لا = و مہ ، ما = ۲ و مہ مہ کی تمام قیمتوں کے لئے قطع مکانی پر واقع ہوتا ہے، اس لئے لا اور ما میں دو مساواتوں کو حل کرنے کی بجائے ہم مہ کی رقوم میں لا اور ما کی یہ قیمتیں معلوم نہی کی مساوات میں درج کرتے ہیں۔ اس طرح ہمیں مہ میں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں نقاط تقاطع کے متبدلوں کو تعبیر کرتی ہیں۔

مثال ۱۔ قطع مکانی ما = ۲ و لا اور خط لا + م + ن = ۲ کے نقاط تقاطع کے متبدل معلوم کرو۔ نیز ان کے باہم تماس ہونے کی نظریں معلوم کرو۔ چونکہ قطع مکانی پر کے ہر ایک نقطہ کے لئے

$$لا = و مہ ، ما = ۲ و مہ$$

اس لئے نقاط تقاطع کے متبدل مساوات ذیل سے حاصل ہوتے ہیں۔

ل (۲ و مہ) + م (۲ و مہ) + ن = ۲ و مہ اول + ۲ و مہ دوم + ن = ۲ و مہ
جوہر میں درجہ دوم کی مساوات ہے اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ نقاط تقاطع دو ہیں کیونکہ مہ کی ایک قیمت کے جواب میں مکانی پر ایک اور صرف ایک نقطہ ملتا ہے۔

اگر خط مذکور مکانی کو سس کرے تو مساوات درجہ دوم کی اصلیں صریحاً مساوی ہو جائیں۔ اس کی شرط یہ ہے

$$۲ و مہ = ۲ و مہ اول + ۲ و مہ دوم = ۲ و مہ$$

مثال ۲۔ دائرہ مکانی سے چار نقاط پر ملتا ہے اور ان نقطوں کے معینوں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

دائرہ کی مساوات کی شکل یہ ہے

$$لا + ما + ۲ گ + ۲ ف + ما + ج = ۰$$

اس لئے لا = ۲ و مہ ، ما = ۲ و مہ رکھنے سے ہمیں مہ میں درجہ پہلے کی یہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مکانی کو مس کرتا ہے۔ اس مساوات کا نقطہ مہ پر کے ماس کی مساوات
 $\frac{1}{م} + لا = ۱$
 لا۔ مہ + مہ ۱ = ۰

کے ساتھ متقابلہ کرنا باعث دیکھی ہوگا۔
 ہم فوراً دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دونوں مساواتیں ایک ہی ہونگی اگر

پس ہم م کو بھی بطور متبدل استعمال کر سکتے ہیں جس صورت میں

$$لا = \frac{۱}{م} \text{ اور } ما = \frac{۱}{م}$$

پس اگر متبدل م سے کسی نقطہ کا مقام مہ مہ کیا جائے اور اس
 نقطہ پر منحنی کا ماس کھینچا جائے تو م سے اس زاویہ کا ماس
 تبیر ہوتا ہے جو مذکورہ بالا ہندسی ماس منحنی کے محور کے ساتھ بنا آ ہے۔ لیکن
 یاد رہے کہ مہ استعمال کرنے سے ہم کسروں سے بچتے ہیں۔

مثال۔ اگر دو نقطوں پر کے ماس علی القوائم ہوں تو نقاط ماس کا خط
 وصل ماسکے ہیں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ نقاط مہ، مہ ہیں، تب چونکہ ماس علی القوائم ہیں
 اسلئے مہ مہ = ۱

لیکن ان کو ملائے والا وتر ہے

$$ما (مہ + مہ) - لا ۲ = ۲ مہ مہ$$

اور یہ محور سے ملتا ہے جہاں

$$لا = ۱ - مہ مہ = ۱$$

یعنی ماسکے پر ملتا ہے۔
 ۲۰۸ = کسی نقطہ سے مکانی کے دو ماس کھینچ سکتے ہیں اور اگر یہ علی القوائم
 ہوں تو نقطہ مذکورہ مہ مہ واقع ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ کے محدود (لا، ما) ہیں، نقطہ مہ پر کے ماس کی مساوات لا۔ مہ + ما + و مہ = ۰ ہے اور اگر یہ (لا، ما) میں سے گزرے تو

$$۰ مہ - مہ ما + لا = ۰$$

جو مہ میں درجہ دوم کی مساوات ہے، اس کی دو اصلوں سے پہنچی پر کے دو نقاط حاصل ہوتے ہیں جن پر کے ماس نقطہ، مذکورہ میں سے گزرتے ہیں اگر یہ اصلیں مہ، مہ ہوں تو ماسات علی التمام ہو گئے اگر

لیکن مساوات درجہ دوم کے مسائل کی رو سے مہ مہ = $\frac{۱}{۲}$ یعنی $\frac{۱}{۲} = ۱ - ۱$ یعنی لا + و = ۰، باضافہ دیگر نقطہ مرتبہ پر واضح ہو

مشقیں

۵۔ ایک قطع مکانی کے نقاط مہ، مہ پر ماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کے محدود و مہ مہ ۱ (مہ + مہ) ہیں۔
(یہ نتیجہ نہایت ضروری ہے)

۶۔ ثابت کرو کہ اگر مکانی کے ماس کی دتر کے ایک سرے کے محدود

و م، و م ہوں تو دوسرے سرے کے محدود $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ہوں گے۔

۷۔ مکانی ما = ۲ لا میں ان نقطوں کے محدود معلوم کرو جن کے نو متبدلوں کی قیمتیں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ہیں۔

۸۔ مکانی ما = ۳ لا کے وتر خاص کے سروں پر متبدل مہ کی کیا قیمت ہے۔

۹۔ مکانی ما = لا کے اُس نقطہ کے محدود معلوم کرو جس پر کا ماس محور کے ساتھ ۲ کا زاویہ بناتا ہے۔

۱۰۔ (لا، لا) (لا، لا) کی جو قیمتیں مہ اور مہ کی رقوم میں ہیں ان کو مساوات
(ما - لا) (لا - ما) = ما - لا میں درج کرنے سے نقاط مہ، مہ، مہ کو
ملائے واسطے وتر کی مساوات معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک مکانی کا وتر ن قی اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ان زاویوں کے مماسوں
کا حاصل ضرب جون اور قی پر کے ہندسی مماس محمد کے ساتھ بناتے
ہیں مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ مماس مکانی کے ایک ثابت
معیّن پر ملتے ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ اگر ان زاویوں کے مماسوں کا حاصل جمع مستقل ہو تو
وتر اس پر کے مماس سے ایک ثابت نقطہ پر ملتا ہے۔

۲۰۵۔ قطع مکانی کے کسی نقطہ پر کا عماد۔ نقطہ مہ پر کا عماد اس
نقطہ میں سے گزرتا ہے اور اس میں سے گزرنے والے مماس پر عمود ہے۔
مماس کی مساوات ہے۔

$$۰ = مہ + لا + مہ = ۰$$

لہذا نقطہ مہ (یعنی لا مہ، لا مہ) پر کے عماد کی مساوات ہے:-

$$مہ (لا - لا مہ) + (ما - لا مہ) = ۰$$

$$مہ لا + ما = لا مہ + لا مہ + مہ (۶)$$

یہ مساوات علی طور پر دفعہ ۱۸ کی مساوات ہے، طالب علم کو چاہیے
کہ م اور مہ کے ہندسی معنوں کا مقابلہ کرنے سے اس امر کی تصدیق
کرے۔

۲۱۰۔ کسی نقطہ میں سے ایک مکانی کے تین عماد کھینچے جا سکتے ہیں (دندہ
۱۸۰ سے مقابلہ کرو)

فرض کرو کہ (لا، لا) نقطہ معلوم ہے، تب نقطہ مہ پر کا عماد اس نقطہ
میں سے گزرتا ہے اگر $مہ لا + لا مہ = لا مہ + لا مہ + مہ$

$$یا لا مہ + مہ (لا - لا) = لا مہ + مہ (۷)$$

اب یہ مساوات مہ میں درجہ سوم کی مساوات ہے۔ اس لئے اسکی

تین اصلیں ہیں اور ہر اصل کے جواب میں منحنی پر ایک نقطہ ہے جس پر کاغذ
نقطہ (۱، ۲) میں سے گزرتا ہے۔

انتباہ۔ مساواتوں کے مسائل کی رو سے ظاہر ہے کہ مساوات (۱) کی ایک
اصل یا تینوں اصلیں حقیقی ہیں (دو حقیقی یا تینوں خیالی نہیں ہو سکتیں کیونکہ خیالی
اصلوں کے ہمیشہ زوج ہوا کرتے ہیں) ان اصلوں کے جواب میں ایک یا تین
حقیقی عماد ہونگے اور صورت اول میں باقی عماد خیالی ہونگے۔

نتیجہ صریح۔ اگر مہ کی متذکرہ بالا مساوات کی اصلیں مہ، مہ، مہ ہوں تو

$$مہ + مہ + مہ = ۰$$

$$مہ مہ + مہ مہ + مہ مہ = (۱۲ - ۱) / ۱$$

$$مہ مہ مہ = \frac{۱}{۱}$$

ان تین مساواتوں میں سے پہلی مساوات اس شرط کو تعبیر کرتی ہے کہ
تینوں عماد ایک نقطہ پر ملیں کیونکہ یہ نقطہ کے محدودوں پر منحصر نہیں ہے۔
اس سے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ان نقطوں پر کے عماد متراکز ہوں
تو مہینوں کا حاصل جمع صفر ہوگا کیونکہ یہ مجموعہ ۱۲ (مہ + مہ + مہ)
کے مساوی ہے۔

باقی دو مساواتوں سے نقطہ تقاطع کے محدود حاصل ہوتے ہیں۔
مثال ۱۔ اگر کسی مکانی کے نقاط ۱ اور ۲ پر کے عماد منحنی پر قطع کریں
تو خط ۱ ۲ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ نقاط مہ، مہ پر کے عماد منحنی کے نقطہ ن پر ملتے ہیں
جبکہ متبدل مہ سے اور جس کے محدود (۱، ۲) ہیں، تب ظاہر ہے کہ
ان نقطوں کے جواب میں جن پر کے عماد نقطہ ن میں سے گزرتے ہیں مہ
کی تین قیمتیں مہ، مہ، مہ ہیں۔ پس اوپر کی مساواتوں کی رو سے

$$مہ مہ مہ = \frac{۱}{۱} = \frac{۱۲ مہ}{۱} = ۲ مہ یا مہ مہ = ۲$$

اب نقاط مہ، مہ کو لانے والا وتر اب

ما (مہ + مہ) = ۲ لا = ۲ مہ مہ

ہے جو منحنی کے محور سے نقطہ لا = - مہ مہ، ما = ۰

یعنی (۰، ۱۲) پر ملتا ہے۔

پس وتر اب محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے جو اس سے ۱۲ کے فاصلہ پر واقع ہے۔

مثال ۲ - مکانی ما = ۴ لا پر کے وہ نقطے معلوم کرو جن پر کے عماد نقطہ (۱۵/۳۰، - ۳/۳۰) میں سے گزرتے ہیں۔

یہاں ما = ۱، اس لئے لا = مہ، ما = ۲ مہ کسی نقطہ مہ پر کا عماد مہ لا + ما = ۲ مہ + مہ ہے

پس اگر یہ نقطہ (۱۵/۳۰، - ۳/۳۰) میں سے گزرے تو ہمیں مہ میں درجہ سوم کی مساوات ذیل حاصل ہوتی ہے۔

مہ + مہ (۲ - لا) - ما = ۰ یعنی مہ - مہ × ۲ + ۳/۳۰ = ۰

چونکہ یہ مساوات درجہ سوم ہے اس لئے ہم اس کو براہ راست حل نہیں کر سکتے لیکن اس کا ایک حل صریحاً مہ = ۱ ہے اور باقی حل جو مہ + مہ - ۳/۳۰ = ۰ سے حاصل ہوتے ہیں ۱/۳، - ۲/۳ ہیں۔

پس تین نقاط مطلوبہ یہ ہیں :-

مہ = ۱، لا = ۱، ما = ۲ مہ، ۱/۳ = لا، ۱/۳ = مہ، ۱ = ما اور مہ = - ۳/۳۰، لا = ۱/۳، ما = - ۳

طالب علم کو چاہیے کہ شکل کھینچ کر دیکھے کہ یہ تینوں عماد متراکز ہیں۔

مشقیں

۱۲ - ثابت کرو کہ مکانی ما = ۲ لا کے وتر خاص کے سروں پر کے

عمادوں کی مساواتیں لا + ما = ۳ اور لا - ما = ۳ ہیں۔

۱۳ - اگر مہ پر کا عماد محور سے گ پر ملے اور اس لا ہو تو وگ کا

طول معلوم کرو، اس سے ثابت کرو کہ زیر عماد ل گ مستقل ہے اور نصف
دتر خاص کے مساوی ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ نقطہ مہ پر کا عماد منحنی سے دوبارہ جس نقطہ پر ملتا ہے
اس کے واسطے متبدل کی قیمت = $(م + ۲) / م$ ہے۔

اس نقطہ کے محدود لکھو اور مہ = ۱ کے لئے شکل کیجیو۔
۱۵۔ مکانی مہ = ۴ لا پر کے وہ نقطے معلوم کرو جن پر کے عماد نقطہ
(۶، ۴) میں سے گزرتے ہیں، شکل بھی کیجیو۔

۱۶۔ اگر ن، ق، ر پر کے عماد ایک نقطہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ ان کے
معیّنوں کا مجموعہ صفر ہے، اس کی بناء پر ثابت کرو کہ اگر ق اور ر پر کے عماد
ایک ثابت نقطہ ن پر کے عماد پر ملیں تو ق، ر ایک ثابت خط مستقیم کے
متوازی ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ مکانی مہ = ۴ لا پر کے نقطہ مہ میں سے اس نقطہ پر
کے عماد کے علاوہ دو اور عماد کیجئے جاسکتے ہیں اور ان کے پایوں کے
متبدل مہ + مہ + مہ = ۰ سے حاصل ہوتے ہیں۔

[مہ کی مساوات درجہ سوم میں لا = مہ، مہ = مہ، مہ = مہ رکھو اور دیکھو کہ
مہ = مہ ایک اصل ہے]

۲۱۱۔ متبدلی تبصیر ناقص کی صورت میں۔ خارج المکرر زاویہ۔

ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ ناقص $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$ پر کے کسی نقطہ کے

محدودوں کو

لا = حجم طہ ، م = ب جب طہ

کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

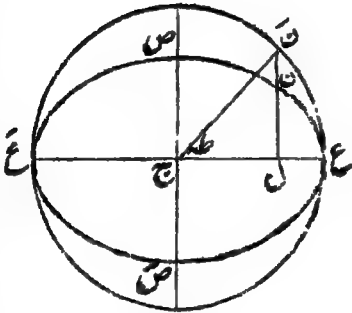
طہ کے ہندسی معنی طہ ہیں۔ فرض کرو کہ زاویہ طہ کی کسی خاص
قیمت کے جواب میں ناقص پر کوئی نقطہ ن ہے، ن سے ج ج ع پر عمود ن ل

کھینچو اور ل ن کو ن تک اتنا خارج کرو کہ

$$\text{ن ل} : \text{ن ل} = \text{ل} : \text{ب}$$

تب ن کے محمولہ = لجم طہ، ما = $\frac{\text{ل}}{\text{ب}}$ * ب جب طہ = ل جب طہ ہیں۔

پس ن ہمیشہ ایک دائرہ
کے محیط پر واقع ہوگا جسکو معاون یا مدوی
دائرہ کہتے ہیں اور اسکی مساوات
 $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{لا}^2$



ہے اور محور اعظم اس کا قطر ہے۔

علاوہ ازیں چونکہ ج ن = ل

اور ج ل = لجم طہ اس لئے

طہ زاویہ ل ج ن کو تغیر کرتا ہے۔

شکل ۴۴

لہذا اگر ہم محور اعظم کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچیں اور ن کے
مبین کو اتنا خارج کریں کہ وہ دائرہ سے ن پر ملے تو زاویہ ن ج ع کو
ن کا خارج المرکز زاویہ کہتے ہیں اور ن کے محمولہ لجم طہ، ب جب طہ
ہیں جہاں طہ خارج المرکز زاویہ ہے۔

متناظر نقطے - امدادی دائرہ پیر کا نقطہ ن، ن کا
متناظر نقطہ کہلاتا ہے۔ اور نقاط ن اور ن کو متناظر
نقطے کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح - اگر ناقص پر کے کسی نقطہ کے محمولہ، ما ہوں تو امدادی
دائرہ پر کے متناظر نقطہ کے محمولہ $\frac{\text{ل}}{\text{ب}}$ ما ہوں گے۔

خارج المرکز زاویہ کی پیمائش کے طریقہ کو بغور ملاحظہ کیا جائے،
اگر ن ناقص پر کا کوئی نقطہ ہو اور ن معاون دائرہ پیر کا متناظر نقطہ
ہو تو ن کے خارج المرکز زاویہ سے زاویہ ع ج ن مراد ہوتا ہے جو محور اعظم
کی مثبت سمت اور معاون دائرہ کے نصف قطر ج ن کے درمیان
بننا ہے۔

کس ۱۶۔ ایک ناقص پر کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاوئے عہ اور یہ ہیں ان کو ملائے والے وتر کی مساوات معلوم کرو۔

ان نقطوں کے محدود (اجم عہ، جب عہ) (اجم عہ، جب عہ) ہیں، پس ان نقطوں کو ملائے والے خط کی مساوات

$$\frac{\text{لا۔ اجم عہ}}{\text{ما۔ جب عہ}} = \frac{\text{ا۔ اجم عہ۔ جب عہ}}{\text{ب۔ جب عہ۔ جب عہ}}$$

یا ب لا (جب عہ۔ جب عہ)۔ انا (جم عہ۔ جم عہ)۔ ا ب (جب عہ جم عہ۔ جم عہ جب عہ)۔ =

$$\text{یا ب لا} \text{ جب عہ۔ جب عہ} = \text{جم عہ۔ جب عہ} + ۲ \times \text{ا۔ ب جب عہ۔ جب عہ} = \text{جم عہ۔ جب عہ}$$

۔ ا ب جب عہ۔ جب عہ =

اس لئے ۲ جب عہ۔ جب عہ پر تقسیم کرنے سے

$$\text{ب لا جم عہ۔ جب عہ} + \text{ا ب جب عہ۔ جب عہ} - \text{ا ب جم عہ۔ جب عہ} = ۰$$

$$\text{یا } \frac{\text{لا۔ جم عہ۔ جب عہ}}{\text{ا۔ جم عہ۔ جب عہ}} + \frac{\text{ب۔ جب عہ۔ جب عہ}}{\text{ا۔ جم عہ۔ جب عہ}} = \text{جم عہ۔ جب عہ} \dots (۸)$$

نتیجہ صریح۔ نقطہ عہ پر کے ماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا۔ جم عہ۔ جب عہ}}{\text{ا۔ جم عہ۔ جب عہ}} = ۱ \dots (۹)$$

یہ مساوات عہ اور ب کو ملائے والے وتر کی مساوات میں عہ = ب رکھنے سے حاصل ہوتی ہے، اس صورت میں عہ، ب کو ملائے والا وتر عہ پر کا ماس ہو جاتا ہے۔

۳۱۴۔ ان نقاط کو ملائے والے وتر کی مساوات جن کے خارج المرکز زاوئے عہ + ب اور عہ۔ ب ہیں حسب ذیل ہے

$$\frac{\text{لا۔ جم عہ۔ جب عہ}}{\text{ا۔ جم عہ۔ جب عہ}} + \frac{\text{ب۔ جب عہ۔ جب عہ}}{\text{ا۔ جم عہ۔ جب عہ}} = \text{جم عہ۔ جب عہ} + \text{ب۔ جب عہ۔ جب عہ} + \text{ب۔ جب عہ۔ جب عہ}$$

$$= \text{جم عہ۔ جب عہ} + \text{ب۔ جب عہ۔ جب عہ} + \text{ب۔ جب عہ۔ جب عہ}$$

یعنی $\frac{لا}{ا} = \text{جم} \text{عہ} + \frac{ما}{ب} = \text{جب} \text{عہ} = \text{جم} \text{بہ}$ جو نہایت سادہ شکل کی مساوات ہے۔
اب اگر اس مساوات میں یہ مستقل ہو تو یہ وتر اُس ناقص کے نقطہ عہ
پر کا ماس ہو جاتا ہے جسکے محور اجم یہ ما ب جم بہ ہیں اس سے ظاہر ہے کہ جن
نقطوں کے خارج الم مرکز زدویوں کا فرق ایک مستقل مقدار کے مساوی ہو ان
کو لانے والا وتر ہمیشہ ایک ناقص کو مس کرتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر نقاط $\frac{1}{4}$ (عہ + بہ) $\frac{1}{4}$ (عہ - بہ) ماسکی وتر
کے سرے ہوں تو نقطہ $لا = \pm وز$ ، $ما = ۰$ وتر کی مساوات کو
لازم آ پورا کرتے ہیں جس سے جم بہ = \pm ز جم عہ۔

۲۱۵۔ اگر ایک ناقص کے ماسکوں سے اس کے کسی ماس پر
عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کا حاصل ضرب محور اصغر کے مربع کے
مساوی ہوتا ہے۔

ماسکوں کے محدود (ازا -) اور (ازا +) ہیں ان میں سے جو عمود نقطہ
عہ پر کے ماس یعنی لا جم عہ / ا + ما جب عہ / ب = ا پر کھینچے جائیں
ان کے طول یہ ہیں

$$\frac{لا - ز جم عہ}{ا} \quad \text{اور} \quad \frac{لا + ز جم عہ}{ا}$$

$$\frac{جم عہ + جب عہ}{ب} \quad \text{اور} \quad \frac{جم عہ - جب عہ}{ب}$$

ان کا حاصل ضرب ہے۔ $\frac{لا - ز جم عہ}{ا} \times \frac{لا + ز جم عہ}{ا} = \frac{جم عہ + جب عہ}{ب} \times \frac{جم عہ - جب عہ}{ب}$

$$= \frac{لا^2 - ز^2 جم عہ^2}{ا^2} = \frac{جم عہ^2 - جب عہ^2}{ب^2}$$

۲۱۶۔ اگر جن اور ج ق ایک ناقص کے مزدوج قطر ہوں جو دونوں

لا کے محور سے اوپر ہیں یا دونوں نیچے تو ن اور ق کے خارج المرکز
زادیوں کا فرق ایک قائمہ کے مساوی ہے۔
اگر ن اور ق کے خارج المرکز زادیوں سے اور یہ ہوں تو ج ن
اور ج ق کی مساداتیں ہیں

$$ا = لا \frac{ب جب ع}{ا جم ع} \quad اور \quad ما = لا \frac{ب جب ب}{ا جم ب}$$

لیکن اگر خط ما = م لا اور ما = م لا مزدوج قطر ہوں تو

$$م م = - \frac{ب}{ا} \quad (دیکھو مشق ۶ صفحہ ۱۳۵)$$

$$لہذا \quad \frac{ب جب ع جب ب}{ا جم ع جم ب} = - \frac{ب ا}{ا}$$

$$یا \quad جم ع جم ب + جب ع جب ب = ۰$$

پس ع۔ بہ ایک قائمہ کے مساوی ہے یا تین قائموں کے۔

لیکن چونکہ ج ن اور ج ق دونوں لا کے محور سے اوپر ہیں
یا دونوں نیچے اس لئے فرق مذکور تین قائموں کے مساوی نہیں ہو سکتا۔
نتیجہ صریح۔ اگر ج ن اور ج ق مزدوج قطر ہوں اور ن کا متبدل ع ہو
تو ق کا متبدل ع + $\frac{ن}{ا}$ ہوگا۔

۲۱۷۔ ناقص کے دو مزدوج نصف قطروں کے مربعوں کا حاصل
جمع مستقل ہوتا ہے اور اگر ان دو نصف قطروں کو متصل اضلاع مان کر ان پر
ایک متوازی الاضلاع بنایا جائے تو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ بھی
مستقل ہوگا۔

دفعہ ۲۱۶ نتیجہ صریح کی رو سے ن اور ق کے محدد ہیں:-

$$ا جم ع، ب جب ع اور ا جم ع + \left(\frac{ن}{ا}\right)، ب جب ع + \left(\frac{ن}{ا}\right)$$

یا اجم عہ، ب جب عہ اور - ا جب عہ، ب جم عہ
 لہذا ج ن = ا جم عہ + ب جب عہ، ج ق = ا جب عہ + ب جم عہ
 جن سے فوراً ج ن + ج ق = ا + ب
 نیز مذکورہ متوازی الاضلاع $\triangle ج ن ق =$

$$= \frac{1}{2} \times \{ ا جم عہ + ب جب عہ - ب جب عہ - (ا جب عہ) \}$$

$$= ا ب (جم عہ + جب عہ) = ا ب (حصہ اول دفعہ) نتیجہ صریح$$

پس دونوں نتیجے ثابت ہوئے۔

مشخص

۲۲۔ ثابت کرو کہ مساوی مزدوج قطروں کے سروں کے خارج المرکز زاوے
 ۴۵° اور ۱۳۵° ہیں۔

۲۳۔ ناقص $\frac{ا}{۲} + \frac{ب}{۲} = ا$ کے اُن نقطوں کو ملانے والے وتر کی
 مساوات دریافت کرو جن کے خارج المرکز زاوے ۳۰° اور ۱۲۰° ہیں
 نیز اُس وتر کی مساوات معلوم کرو جو خارج المرکز زاویوں ۴۰° اور ۱۴۰° والے نقطوں
 کو ملاتا ہے۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{ا}{۲} + \frac{ب}{۲} = ا$ کے دو مزدوج قطروں
 کے سروں کو ملانے والا خط ناقص $\frac{ا}{۲} + \frac{ب}{۲} = ۲$ کو مس کرتا ہے۔
 ۲۵۔ نقاط عہ، ہ پر کے تماسوں کے نقطہ تقاطع کے محدود شکل ذیل
 معلوم کرو۔

$$لا = ا جم عہ + ب جم عہ - ۲، \quad ما = ب جب عہ + ج جم عہ - ۲$$

اگر عہ + ہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ (لا، ما) کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مرکز میں
 سے گزرتا ہے اور اگر عہ - ہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ طریق ایک ناقص ہے

جسکی مساوات $\frac{2}{1} + \frac{2}{2} = \frac{2}{1} = \text{قطر} = \frac{2}{1}$ ہے جہاں $ع = ب = ج$ ۔
 ۲۶۔ اگر $ن$ کا خارج المرکز زاویہ طہ ہو تو مسلمہ طہ سیرق کتابت کے مطابق ثابت کرو کہ

ج ق $= 2$ (۱- زجم طہ) ، سن $= 1$ (۱- زجم طہ)
 سن $= 1$ (۱- زجم طہ) اور اس سے مستنبط کرو کہ
 سن \times سن $=$ ج ق

۲۷۔ ثابت کرو کہ وتر خاص کا وہ حصہ جو امدادی دائرہ اور ناقص کے درمیان منقطع ہوتا ہے محور اصغر کے مساوی ہے۔

۲۸۔ ناقص کے ایک تماس پر مرکز سے عمود کھینچا گیا ہے جو محور اعظم کے ساتھ زاویہ $ع$ بناتا ہے اور جس کا طول $ع$ ہے اگر $ن$ وہ نقطہ ہو جس کا خارج المرکز زاویہ $ع$ ہے تو ثابت کرو کہ ج $= ن = ع$
 (یاد رہے کہ $ع = 2$ زجم $ع + 2$ جب $ع$)

$$۲۹۔ \text{شکل} \frac{(1-2)(1-2)}{2} + \frac{(1-2)(1-2)}{2} = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} = 1$$

سے نقاط $ع$ ، $ب$ کو ملانے والے وتر کی مساوات معلوم کرو۔

۳۰۔ ایک ناقص پر وہ نقطہ $ن$ ، $ق$ ہیں اور امدادی دائرہ پر ان کے متناظر نقطہ $ن$ ، $ق$ ہیں۔ اگر $ن$ کی مساوات $ل + م + ۱ = ۱$ ہو تو ثابت کرو کہ $ن$ کی مساوات $ل + م + ۱ = ۱$ ہوگی
 (دونوں خطوں کی مساواتیں $ن$ اور $ق$ کے خارج المرکز زاویوں کی رقوم میں معلوم کرو)

اس سے حاصل کرو کہ $ن$ ، $ق$ ، $ع$ محور اعظم پر ملتے ہیں۔
 ۳۱۔ ثابت کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ پر کا تماس اور امدادی دائرہ کے متناظر نقطہ پر کا تماس دونوں ایک دوسرے سے محور اعظم پر ملتے ہیں۔

۲۱۸۔ ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات معلوم کرو۔
نقطہ طہ پر کا عماد اس نقطہ میں سے گزرتا ہے اور اس نقطہ میں سے
گزرنے والے تماس پر عمود وار ہے۔

$$\text{لیکن تماس کی مساوات } \frac{1}{1} \text{ جم طہ} + \frac{1}{2} \text{ جب طہ} = 1 \text{ ہے}$$

$$\text{اسلئے عماد ہے } \frac{1}{\text{جم طہ}} (\text{لا۔ ۱ جم طہ}) = \frac{1}{\text{جب طہ}} (\text{ما۔ ۱ جب طہ})$$

$$\text{یا } \frac{1}{\text{جم طہ}} - \frac{1}{\text{جب طہ}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \dots (۱۰)$$

یہ مساوات عماد کی اس مساوات سے بھی جو پہلے دی جا چکی ہے حاصل ہو سکتی ہے۔

۲۱۹۔ کسی نقطہ سے ناقص کے چار عماد ٹھینچے جاسکتے ہیں۔
اگر نقطہ طہ پر کا عماد ایک معلومہ نقطہ (لا ۱ ما ۱) میں سے گزرے تو

$$\frac{1}{\text{لا ۱}} - \frac{1}{\text{جب طہ}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

یہ طہ میں ایک مساوات ہے جس سے ہم مخروطی پر کے وہ تمام نقطے معلوم
کر سکتے ہیں جن پر کے عماد نقطہ (لا ۱ ما ۱) میں سے گذرتے ہیں۔

اب کسی ایسی مساوات کو حل کرنے کی جس میں جم طہ اور جب طہ دونوں
شامل ہوں عام ترکیب یہ ہے کہ ہم فرض کریں مس طہ = ت

$$\text{جس سے جم طہ} = \frac{1 - ت}{1 + ت} \text{ اور جب طہ} = \frac{2}{1 + ت}$$

یہ قیمتیں مندرج کرنے سے ہمیں ت میں مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔

موجودہ صورت میں

$$\frac{1}{1 + ت} - \frac{1}{2} = \frac{1 - ت}{1 + ت} - \frac{1}{2} = \frac{2 - 1 - ت}{2} = \frac{1 - ت}{2}$$

$$\text{یا } \frac{1}{1 + ت} - \frac{1}{2} = \frac{1 - ت}{2} \Rightarrow (1 - ت) = (1 + ت) \Rightarrow ت = 0$$

معین ن ل کھینچو اور ل سے
امدادی دائرہ کا تماس
ل ت کھینچو، ج ت کو ملاؤ۔
تب قط ت ج ل = $\frac{ن ل}{ج ت}$

$$= \frac{لا}{قط ط} =$$

اس لئے زاویہ ت ج ل
نقطہ ن کے متبدلی زاویہ
ط کے برابر ہے۔

شکل ۷۶

قطع زائد کے مزدوج قطروں کے خواص۔ ان کے بعض خواص
زاویہ ط کی مدد سے، دفعہ ۱۶۷ کے طریقہ کی نسبت زیادہ آسانی سے حاصل
ہو سکتے ہیں۔

اگر ج ن ایک قطر ہو اور ج ق اس کا مزدوج قطر ہو تو نقطہ ن کے
محدود قطا ط، تباس ط ہو گئے اور نقطہ ق کے محدود مس ط
اور تب قطا ط ہو گئے۔

(۱) ج ن - ج ق

$$= (لا قطا ط + تباس ط)$$

$$= (لا مس ط + تب قطا ط)$$

$$= (لا - تب) (قطا ط - مس ط)$$

$$= لا - تب$$

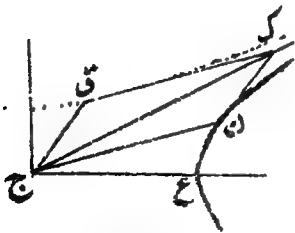
(۲) اگر متوازی الاضلاع

ج ن ک ق کی تشکیل کی جائے تو

$$رقبہ ج ن ک ق = \Delta ج ن ق$$

$$= لا ب (قطا ط - مس ط)$$

$$= لا ب$$



شکل ۷۷

(۳) ماسوں ن ک، ق ک کی مساواتیں ہیں

$$1 = \frac{\text{لا ق ط طہ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ماس طہ}}{\text{ا}}$$

$$1 = \frac{\text{لا ق ط طہ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ماس طہ}}{\text{ا}}$$

ان کا نقطہ تقاطع ک مساوات ذیل کو پورا کرتا ہے

$$\frac{\text{لا ق ط طہ}}{\text{ا}} - \frac{\text{ماس طہ}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا ق ط طہ}}{\text{ا}} - \frac{\text{ماس طہ}}{\text{ب}}$$

$$\text{یا } \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}}$$

اس لئے ک متقارب پر واقع ہوتا ہے۔

۲۲۲ - کسی نقطہ سے قطع زائد کے عماد۔

(۱) دفعہ ۲۱۸ کے طریقہ کے مطابق یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ قطع زائد کے کسی نقطہ طہ پر کا عماد ہے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ق ط طہ}} + \frac{\text{ب}}{\text{ماس طہ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ا}}{\text{ا}} \dots (۱۱)$$

(۲) پس وہ نقطہ جن پر کے عماد نقطہ (لا، ب) میں سے گزرتے ہیں

$$\text{مساوات } \frac{\text{لا}}{\text{ق ط طہ}} + \frac{\text{ب}}{\text{ماس طہ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ا}}{\text{ا}} \text{ سے حاصل ہوتے ہیں۔}$$

اس مساوات کو حل کر نیکی لئے رکھو مس طہ = ت

$$\text{تب ق ط طہ} = \frac{\text{ت} + ۱}{\text{ت} - ۱} \text{ اور مس طہ} = \frac{\text{ت}}{\text{ت} - ۱}$$

اور مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\text{ب} \left(\frac{\text{ت} + ۱}{\text{ت} - ۱} + \frac{\text{ب}}{\frac{\text{ت}}{\text{ت} - ۱}} \right) = \frac{\text{ت} + ۱}{\text{ت} - ۱} + \frac{\text{ا}}{\frac{\text{ت}}{\text{ت} - ۱}} \text{۔}$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ سے ناقص کی طرح نائد پر بھی چار
عامد کھنچ سکتے ہیں۔

۲۲۳۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کس طرح مخروطیوں کی صورت میں منحنی پر
کے کسی نقطہ کے محدود ایک متغیر کی رقوم میں جبکہ متبدل کہتے ہیں بیان
کئے جا سکتے ہیں۔ برعکس اس کے جب کسی نقطہ کے محدود ایک نامعلوم
مقدار کی رقوم میں بیان کئے جائیں تو نقطہ ایک منحنی پر واقع ہوتا ہے جسکی
مساوات اس متبدل کو سا قط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال۔ اگر $لا = اجم ط + ب جب ط + ج$ اور $ما = اجم ط + ب جب ط + ج$
تو ثابت کرو کہ $(لا، ما)$ ایک ثابت مخروطی پر واقع ہوتا ہے۔
یہاں ہمیں مساواتوں

$اجم ط + ب جب ط + ج = لا$ اور $اجم ط + ب جب ط + ج = ما$ میں سے
ط کو سا قط کرنا ہے۔
تھوڑے عرصہ کے لئے $جم ط$ اور $جب ط$ کو دو جدا جدا غیر معلوم مقداریں
نصو کر کے اوپر کی مساواتوں سے حاصل کرو

جم ط	جب ط
۱	۱
{ب (ج-ما) - ب (ج-لا)}	{ب (ج-ما) - ب (ج-لا)}
لہذا چونکہ $جم ط + جب ط = ۱$	لہذا چونکہ $جم ط + جب ط = ۱$
{ب (ج-ما) - ب (ج-لا)}	{ب (ج-ما) - ب (ج-لا)}

جو درجہ دوم کی مساوات ہے اور جس سے اس ثابت پر ایک مخروطی کا طریق تبصیر
ہوتا ہے۔

دوسرے درجہ کی رقیں ہیں

(ب ما - ب لا) + (ا ما - ا لا)
اور اس کے اجزائے ضربی خیالی ہیں یا معیاری طریق کتابت کے موافق
ا ب < ہا پس منحنی قطع ناقص ہے۔

مشقیں

۳۲۔ ناقص $\frac{19}{11} + \frac{7}{11} = 1$ پر دو نقطے ہیں جن کے خارج المركز زاوے بالترتیب ط، ف، ہ ہیں، ان نقطوں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کے محدث شکل ذیل میں معلوم کرو۔

لا = $\frac{1}{2}$ - ب' جم طه جم ف' $\frac{1}{2}$ جم طه ف' ، ما = $\frac{1}{2}$ - ب' جب طه جب ف' $\frac{1}{2}$ جم طه ف'

۳۴۔ اگر نقطہ بتدریج طے کے نزدیک آتا آتا بالآخر اس پر منطبق ہو جائے تو ثابت کر دو کہ عمادوں کا فقط تقاطع ہو جاتا ہے

$$1) = \frac{b^2 - a^2}{b} = 1, \quad 2) = \frac{b^2 - a^2}{a} = 1$$

۳۴۔ یہ تباؤ کو ناقص کے مرکز سے جو چار عماد کھینچ سکتے ہیں ان کے پائے کہاں واقع ہوتے ہیں۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ ایک ناقص کے محور اعظم پر کے نقطہ (سا،) سے (محور اعظم کی سمتوں کے علاوہ) دو عماد کھینچ سکتے ہیں، نیز مس $\frac{1}{p}$ طہ کے لئے مساوات اس شکل

$$ت^۲ = (ا۱سا + وا۱ - ب۲) + (ا۱سا - لا۱ + ب۲) =$$

میں معلوم کرو۔

۴۔ تثانیث کرد کہ شکل ،، کے خط ن ق کی سمت نقطہ ن کے مقام پر منحصر نہیں۔

۳۷۔ ایک ناقص کے محور اصغر کے نقطہ (۵۰) سے محور اصغر کی

دوستوں کے علاوہ دو اور عماد کھنچ سکتے ہیں، نیز ثابت کرو کہ ت کی مساوات کی دو اصلیں \pm محور اصغر کے سروں کے جواب میں ہیں اور باقی اصلیں مساوات

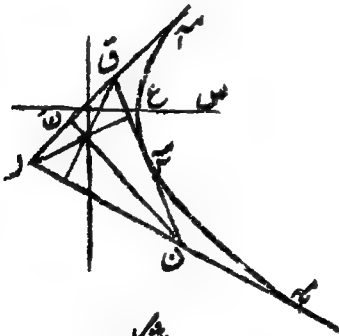
$$b \text{ ص } (ت^2 + 1) + (2 - 2) (ب^2 - 2) = 0$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔ اس سے حاصل کرو کہ باقی دو عماد صرف اسی صورت میں حقیقی ہونگے جبکہ ص کی قیمت $\frac{2}{b}$ سے تعدا کم ہو۔

توضیحی مثالیں

(۱) کسی مکانی کے تین ماسوں سے جو مثلث بنتا ہے اس کا مرکز ہندسی مرتبہ پر واقع ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مکانی ما = ۴ لا ہے، نیز نقاط مم، مم، مم پر کے ماسوں سے مثلث ن ق ر بنتا ہے۔ اب ہمیں ان عمودوں کی مساواتیں معلوم کرنا ہے جو نقاط ن ق ر سے مقابل کے اضلاع پر کھلے جائیں۔



شکل ۷۸

نقطہ ر، مم، مم پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ہے، اس لئے اس کے محدد $\frac{1}{2}$ مم مم (۲۸) ہیں (کچھ شق ۷۸) اس لئے اس نقطہ سے

ن ق یعنی لا۔ مم ما + لا مم = ۰ پر کا عمود ہے

$$مم (لا - لا مم مم) + (ما - لا مم مم) = ۰$$

یہ مرتبہ سے ملتا ہے جہاں لا = ۰ اور اس لئے

$$ما = لا (مم + مم) - مم (-لا - لا مم مم)$$

یا $\{م + م + م + م + م + م + م\}$ م
لیکن یہ م، م، م کے لحاظ سے متشاکل ہے، اس لئے دوسرے
عمود بھی مرتب سے اسی نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۲) اگر $\frac{ت + ۱}{(ت - ۱)(ت - ۲)} = ۱$ ، $\frac{ت + ۱}{(ت - ۱)(ت - ۲)} = ۱$ ،
تو ثابت کرو کہ نقطہ (لا، ما) قطع زائد پر واقع ہے، اس کے متقارب
دریافت کرو۔

ان مساواتوں میں سے حسب معمول ت کو ساقط کرنے سے ہمیں لا اور
ما میں درجہ دوم کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے۔
مقارب مطلوبہ محصلہ مساوات سے معلوم ہو سکتے ہیں لیکن ذیل طرہ سے
زیادہ سبقت آموز ہے۔

لائنا ہی پر کے نقطہ کے لئے لا اور ما دونوں لائنا ہی ہوتے ہیں
لہذا قیمتوں $ت = ۱$ یا $ت = ۲$ سے منحنی کے لائنا ہی پر کے نقطے
حاصل ہوتے ہیں۔

اب اگر $ل + لا + م + ما = ۱$ ۔ ایک متقارب ہے تو یہ منحنی سے لائنا ہی
پر کے دو نقطوں پر ملتا ہے۔

لا اور ما کی قیمتیں ت کی رقوم میں درج کرنے سے

$$ل(ت + ۱) + م(ت + ۱) + (ت - ۱) + (ت - ۲) = ۰$$

جس سے نقاط تقاطع کے لئے ت کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ پس

اگر $ل + لا + م + ما = ۱$ ۔ ایک متقارب ہو تو مساوات بالا کی اصلیں
یا $۱، ۱$ ہونگی یا $۲، ۲$ ۔

مساوات بالا سے: $ت + (ل + ۱) + ت + (م - ۳) + ل + م + ۲ = ۰$

اگر یہ مساوات $ت - ۲ + ۱ = ۰$ ہو (جسکی اصلیں $۱، ۱$ ہیں) تو

$$\frac{ل + م + ۲}{۱} = \frac{۳ - م}{۲} = \frac{۱ + ل}{۱}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $ل = ۱ - ۱ - ۱$ ، یعنی ایک متقارب ہے
 $۰ = ۱ + ۱ - ۱$

دوسرا متقارب $ل = ۱ - ۱ - ۱ = ۱ - ۱ - ۱$ سے حاصل ہوتا ہے

ان مساواتوں سے $ل = ۱ - ۱ - ۱$ ، پس دوسرا متقارب ہے

$$۰ = ۱ - ۱ - ۱$$

(۳) - ایک سکائی کے نقاط $۱ - ۱ - ۱$ ، $۱ - ۱ - ۱$ ، $۱ - ۱ - ۱$ سے ایک
 مثلث بنایا گیا ہے ، اس مثلث کے بیرونی دائرہ کی مساوات معلوم
 کرو اور ثابت کرو کہ دائرہ $۱ - ۱ - ۱$ کے مرکز ہے ۔

ناسوں کی مساواتیں ہیں

$$۱ - ۱ - ۱ = ۱ - ۱ - ۱$$

$$۱ - ۱ - ۱ = ۱ - ۱ - ۱$$

$$۱ - ۱ - ۱ = ۱ - ۱ - ۱$$

$$۰ = ۱ - ۱ - ۱$$

پر غور کرو جس میں ۱ عددی اجزائے ضربی ہیں چونکہ یہ ایک مساوات درج دوم
 ہے اس لئے یہ مخروطی کو تبصیر کرتی ہے ۔ یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے
 کہ اس محل جمع کی ہر ایک رقم دو ناسوں کے نقطہ تقاطع کے لئے معدوم
 ہوتی ہے ۔ اس لئے $۱ - ۱ - ۱$ کی تمام قیمتوں کے واسطے $۱ - ۱ - ۱$
 مخروطی کو تبصیر کرتی ہے جو مثلث کے ناسوں میں سے گزرتی ہے ۔ اس
 مخروطی کے دائرہ ہونے کے لئے شرط یہ ہے کہ $۱ - ۱ - ۱$ اور $۱ - ۱ - ۱$ کے مساوی ہوں
 اور $۱ - ۱ - ۱$ کا سر صفر ہو ۔ پس

$$۱ - ۱ - ۱ = ۱ - ۱ - ۱$$

$$۱ - ۱ - ۱ = ۱ - ۱ - ۱$$

ان دو مساواتوں سے $۱ - ۱ - ۱$ کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں
 ان کو حسب معمول حل کرنے سے ۔

۳۴۔ ایک ناقص پر کے دو نقاط کے خارج المکرز اوکے عہ اور ہیں

$$1 - \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{1}{(1-r_1)(1-r_3)} + \frac{r_3}{r_4} \cdot \frac{1}{(1-r_2)(1-r_4)}$$

میں لا، لا اور لا، لا کی متناظر قیمتیں ع اور ہ کی رقوم میں مندرج کرنے سے ان نقاط کو ملائے والے وتر کی مساوات دریافت کرو۔

ان الفاظ کو سمجھنے کے لئے اس کے متوازی ماسوں پر ماسک سے عمود کالے
 گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان متوازی ماسوں کے ہر مقام کے لئے عمودوں
 کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

۴۵۔ ناقص کا ایک مناس کھینچا گیا ہے، اس کے نقطہ تماس کا خارج المرکز زاویہ طہ ہے، ناقص کے مرکز ج سے تماس پر عمود ج ت نکالا گیا ہے، مرکز سے ایک نصف قطر ج ن کھینچا گیا ہے جو محور اعظم سے زاویہ طہ بناتا ہے، ثابت کرو کہ ج ت = ج ن

۴۶۔ ایک ناقص پر کے دو نقاط سے جن کے خارج المركز زاوے بالترتیب عمود پر ہیں مماس ٹھینچے گئے ہیں۔ یہ مماس نقطہ (لا، ما) پر لگتے ہیں۔

مثلاً $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (عدد صحیح) $= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ - ۱

۷۔ ایک نقطہ کا خارج المرکز زاویہ نہ ہے، اس پر کا عماد محور اعظم سے زاویہ بننا ہے، ثابت کہو کہ اس نہ ہو۔

۳۸۔ ایک ناقص کے نقطہ (لوہم فہ ، ب جیب ذ) پر کا عا د نقطہ مذکور اور مرکز کے خط وصل کے ساتھ زاویہ طہ بنتا ہے ، ثابت کرو کہ

۲۱۰۱ مسط = (۱۰۱ - ۱۰۲) جب ۲۰۱

۴۹۔ ایک مسخنی جس کے کسی نقطہ کے محدود ایک متغیرت کی رقوم میں حسب ذیل صورت میں بیان کئے گئے ہیں

لا ۱ + ت + ت = ۱ ، ۱ - ت + ت = ۱

منہجی کی نوعیت معلوم کرو اور اس کو مرتبہ کرو۔

۵۰۔ جن نقطوں کے خارج المرکز زاویے 'ا + ب'، 'ا - ب' ہیں اُن کو لانے والے وتر کا طول دیک جب یہ ہے جہاں د کہ متوازی قطر ہے۔

۵۱۔ اگر ناقص $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ کے نقطہ ن کے جواب میں اندری دائرہ پر نقطہ ن ہو تو ثابت کرو کہ ن ، ن پر کے عادی ایک ثابت دائرہ پر ملتے ہیں۔

۵۲۔ ثابت کرو کہ خواہ طہ کی کچھ ہی قیمت ہو ایک ایسے نقطہ کا طریق جس کے محدد شکل $1 = \frac{p}{p+q} - \frac{q}{p+q}$ ، $1 = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q}$ ہیں لکھے جاسکتے ہیں ایک ناقص ہے۔

۳۵۔ وہ شرط معلوم کرو کہ ناقص $\frac{9}{10} + \frac{1}{2} = 1$ میں طہ اور خیر کے ماس علی القوائم ہوں۔ اگر تپ = مس $\frac{1}{4}$ اور مستل = مس $\frac{1}{4}$ تو ثابت کرو کہ شرط مطلوبہ بب^۲ (۱- مستل) (۱- مستل) + م لاقت مستل = م
۳۶۔ اگر ایک ناقص کے نقاط ع، ب پر کے ماس نقطہ (ل، م) پر ملیں تو ثابت کرو کہ $1 = \frac{\text{جم } \frac{1}{4} (\text{ع} + \text{ب})}{\text{جم } \frac{1}{4} (\text{ع} - \text{ب})} + \frac{\text{دب } \frac{1}{4} (\text{ج} + \text{ب})}{\text{جم } \frac{1}{4} (\text{ع} - \text{ب})}$
نیز ثابت کرو کہ یہ صورت میں مس $\frac{1}{4}$ ع، مس $\frac{1}{4}$ ب مساوات ذیل کی اٹھیں گی :
 $(1 + \frac{1}{4}) \cdot \text{مستل} - \frac{1}{4} \cdot \text{مستل} + \dots = \frac{1}{4}$

۵۵۔ مشقوں ۵۲ اور ۵۳ سے ثابت کرو کہ اگر ناقص کے ماسرچہ
 نام سے کھینچے جائیں علی التوائعم یوں تو $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ + مینا یعنی $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 مرتب دائرہ پر واقع ہے۔

۶۲۔ ناقص $\frac{لا}{۱۸} + \frac{ما}{۲۱} = ۱$ پر کے دو نقطوں کے خارج المرکز زاوے عہ + بہ اور عہ - بہ ہیں، ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملائے والے وتر کی مساوات $\frac{لا}{۱۸} + \frac{ما}{۲۱} = ۱$ جمہ عہ = جمہ بہ ہے، نیز ثابت کرو کہ اس وتر اور اس کے سروں پر کے ماسوں سے جو رقبہ گھر جاتا ہے وہ اب جب بہ / جم بہ کے مساوی ہے۔

۶۳۔ ایک منحنی پر کے کسی نقطہ کے محدود (لا، ما) کی مساواتیں

$$لا = لا^۲ + ب^۲، ما = ما^۲ + ب^۲$$

ہیں، منحنی کی مساوات معلوم کرو۔

۶۴۔ ایک ناقص کے نصف محور لا اور ب ہیں اور مرکز ج ہے منحنی پر کے کسی نقطہ ن سے عماد ن ل کھینچا گیا ہے اور مرکز سے اس عماد پر عمود ج ل نکالا گیا ہے، ن ل کو ت تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن ل × ن ت = اب، ثابت کرو کہ ت کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے اور نصف قطر لا - ب ہے۔

۶۵۔ ہم مرکز ناقص جن میں سے ہر ایک کا مرکز مبدأ پر ہے اور رقبہ ج کے مساوی ہے اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ ان کے اصلی محور حوالہ کے علی القوا تم محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان ناقصوں کے ان نقاط کا طریق جن پر کے ماس محور لا کے ساتھ زاویہ عہ بناتے ہیں لا ما (لا - ما مم عہ) + ج مم عہ = ۰ ہے۔

$$۶۶۔ ناقص \frac{لا}{۱۸} + \frac{ما}{۲۱} = ۱ پر کے نقطوں سے دائرہ لا + ما = ۲۱$$

کے ماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اوٹار تاس ناقص $\frac{لا}{۱۸} + \frac{ب}{۲۱} = ۲۱$ کو مس کرتے ہیں۔

اگر $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$ تو ثابت کرو کہ وہ خط جو مرکز کو دائرہ پر کے
نقاط تماس سے وصل کرتے ہیں دوسرے ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔



باب ہفتم

محروطی تراش کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو

محروطیوں کے متعلق بہت سے سوالوں میں اور خاص کر ان میں جو ایک ماسکہ سے متعلق ہوتے ہیں اس ماسکہ کو قطب مان کر قطبی محدودوں کو استعمال کرنا نہایت سہولت بخش ہوتا ہے۔

باب ہذا میں ہم محروطیوں کی مساواتیں محدودوں کے اس نظام میں معلوم کریں گے اور چند آسان نتیجوں پر جو ان سے مستنبط ہو سکیں گے بحث کریں گے۔

۲۲۴۔ محروطی کی قطبی مساوات دریافت کر دیجیکہ ماسکہ کو قطب اور اس میں سے گزرنے والے محور کو ابتدائی خط مانا جائے۔

فرض کرو کہ ماسکہ S ہے، S کا مرتب پر عمود ہے اور Z خروج المرکز ہے، ہم ابتدائی خط کو سمت S میں نکالیں گے۔

اگر N منحنی پر کا کوئی نقطہ ہو اور N S کا بالترتیب S کا اور مرتب پر عمود نکالے جائیں تو

S N = N اور N S = N = طہ

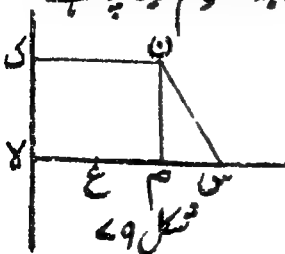
پس ہمیں ان دو مقداروں N طہ میں ربط معلوم کرنا چاہئے۔

اب S N = N N K = Z N S = N S K

= Z (S N - S S)

= Z (S N - S N جم طہ)

یا R = Z S N - Z S N جم طہ



ہذا $r = (1 + \text{زجم طہ}) \times \text{س لا}$

$$\therefore r = \frac{\text{ز} \times \text{س لا}}{1 + \text{زجم طہ}} \text{ جو مطلوبہ ربط ہے۔}$$

اس مساوات سے ہمیں فوراً معلوم ہوتا ہے کہ r کی قیمت جبکہ طہ ۹۰ کے مساوی ہو $r = \text{س لا}$ ہے (کیونکہ اس صورت میں زجم طہ = ۰) یعنی $r = \text{س لا}$ نیم وتر خاص کے مساوی ہے (صفحہ ۲۱)۔ اب اگر اس کو صوب معمول L سے تعبیر کیا جائے تو مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$r = \frac{L}{1 + \text{زجم طہ}}$$

یعنی $\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم طہ} \dots\dots\dots (1)$

جو مطلوبہ قطبی مساوات کی عام شکل ہے۔
نتیجہ صریح - اگر ابتدائی نقطہ محور سے نیچے کی طرف زاویہ θ بنا کر
تو $\text{س م} = \text{س لا}$ (زجم طہ) θ اور مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم (طہ-} \theta \text{)} \dots\dots\dots (2)$$

داصل ہر نقطہ کے لئے محدود طہ بقدر زاویہ θ کے بڑھا دیا گیا ہے۔
۲۲۵ - قطبی مساوات سے منحنیوں کی شکل معلوم کرنا۔

اگر قطبی مساوات $\frac{L}{r} = 1 + \text{زجم طہ}$ دی ہوئی ہو تو ہم نہایت آسانی سے منحنیوں کی شکل کا عام اندازہ لگا سکتے ہیں۔
اولاً ہم یہ دیکھتے ہیں کہ r کی قیمت لا متناہی اس وقت ہوگی جبکہ

۱۔ زجم طہ = . یعنی جبکہ ججم طہ = ۱۔ اگر ز کی قیمت ایک سے کم ہو تو اس سے طہ کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی، پس منحنی لاتنا ہی تک عرضی صورت میں پھیل سکتا ہے جبکہ ز ایک کے مساوی ہو یا ایک سے بڑی ہو۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ناقص ایک بند منحنی ہے اور مکافی کا قطر سمتی لاتنا ہی صرف اس صورت میں ہوتا ہے جبکہ ججم طہ = ۱۔ یعنی طہ = ۱۸۰۔ قطع زائد کے سمتی نیم قطر دو سمتوں میں لاتنا ہی تک پہنچتے ہیں اور یہ سمتیں طہ کی ان دو قیمتوں سے تعبیر ہوتی ہیں جو مساوات ججم طہ = ۱۔ ز سے حاصل ہوتی ہیں، ظاہر ہے کہ یہ سمتیں ابتدائی خط کے ساتھ اوپر اور نیچے مساوی زاوے بناتی ہیں۔

دفع ہو کہ یہ دو لاتنا ہی سمتی نیم قطر اپنے خط ہیں جو ماسکے میں سے گذرتے ہیں اور متقاربوں کے متوازی ہیں، (کیونکہ یہ منحنی سے لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں) اور صریحاً ان میں سے ہر ایک لاس مقدودہ کی سمت کے ساتھ زاویہ قطعاً (ز) بناتا ہے۔ بالفاظ دیگر مندرجہ بالا سے یہ مراد ہے کہ خروج المکرز متقاربوں کے درمیانی زاویہ کے نصف کے قاطع کے مساوی ہے۔

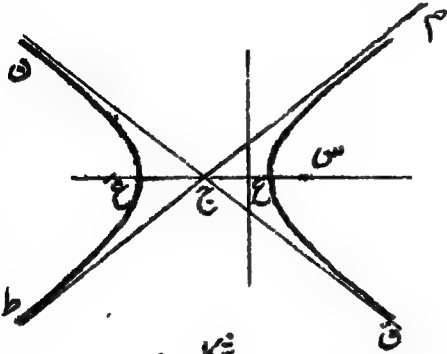
اب ہم زائد کے مرتسم کرنے کی منزلوں پر تفصیلی بحث کریں گے اور چونکہ ناقص اور مکافی کی صورتیں اصولاً ویسی ہی ہیں اور تفصیل کے لحاظ سے نسبتاً آسان ہیں اس لئے ہم ان کو طالب علم کے لئے مشق کے طور پر چھوڑ دیں گے۔ لیکن یاد رہے کہ طالب علم کو اس مشق پر حاوی ہونے میں کوتاہی نہیں کرنی چاہئے۔

طہ کی کسی قیمت کے جواب میں ر کی قیمت مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$r = \frac{L}{1 + \text{زجم طہ}}$$

اگر طہ = . تور = $\frac{ل}{۱+ز}$

فرض کرو کہ اس نقطہ کا مقام ع ہے۔



شکل ۸۰

جیسے طہ بڑھتا ہے
جہم طہ بتدریج کم ہوتا
ہے اور بنا بریں لڑھکتا
ہے اور یہی ہوتا رہتا
ہے حتیٰ کہ جس وقت
ر لا متناہی ہو جاتا
ہے تو $۱+ز$ جہم طہ
صفر ہو جاتا ہے اس طرح

سے ہمیں دائیں جانب کی شاخ کے اوپر کا حصہ ع م حاصل ہوتا ہے
جس وقت طہ اس قیمت سے جو $۱+ز$ جہم طہ کو صفر بنا دیتی ہے
ذرا آگے بڑھتا ہے تو $۱+ز$ جہم طہ کی قیمت ایک نہایت ہی
قلیل منفی مقدار کے مساوی ہوتی ہے۔ پس فوراً ایک بہت
بڑی منفی مقدار کے مساوی ہو جاتا ہے لہذا نقطہ بائیں طرف کی
شاخ کے نچلے حصہ پر بہت دور واقع ہوتا ہے۔

جس وقت طہ بتدریج بڑھتے بڑھتے ۱۸۰ کی طرف جاتا ہے تو نسبت
جہم طہ (جو منفی ہے) بلحاظ عددی قیمت کے بڑھتی ہے لہذا
جملہ $۱+ز$ جہم طہ جس کی مطلق قیمت (منفی ہونے کی وجہ سے)
گھٹتی ہے عددی قیمت میں بڑھتا ہے اس لئے کہ عددی
قیمت بتدریج کم ہوتی جاتی ہے حتیٰ کہ بالآخر جس وقت طہ = ۱۸۰
تو ر کی متناظر قیمت ل / ۱- ز ہو جاتی ہے اس طرح ہم بائیں
طرف کی شاخ کا حصہ طہ ع مرسم کر لیتے ہیں۔

بعد ازاں جب طہ ۱۸۰ کے آگے بڑھتا ہے تو جہم طہ کی

عدد دی قیمت پھر گھٹنا شروع ہوتی ہے اور منفی ہوتی ہے، لہذا
 ۱۔ زجم طہ گھٹتا ہے۔ اور اس بنا پر ر کی قیمت بڑھتی ہے
 جو بالآخر لامتناہی ہو جاتی ہے جبکہ ۱۔ زجم طہ = ۰۔
 پس طہ کی اس قیمت کے لئے جو صریحاً ۱۸۰ اور ۲۷۰ کے درمیان واقع ہوتی ہے
 نقطہ ترسیم بائیں جانب کی شاخ ع ن کے اوپر کے حصہ میں
 لامتناہی پہنچ جاتا ہے۔ آخر میں جب طہ اس قیمت سے آگے
 ۳۶۰ تک جاتا ہے تو نقطہ ترسیم دائیں جانب کی شاخ ق ع کے
 نچلے حصہ پر لامتناہی فاصلہ سے چل کر پھر ع پر آ جاتا ہے اور
 ع پر آنے کے وقت طہ کی قیمت ۳۶۰ ہوتی ہے۔ اس طرح
 پورے دور مکمل ہو جاتا ہے۔

مثال۔ ایک مخروطی کا وتر خاص ۶ ہے اور خروج مرکز ۱،
 اس ماسکی وتر کا طول معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ ۴۵ کا
 زاویہ بناتا ہے۔

یہاں ہم قطبی مساوات کو استعمال کرتے ہیں۔
 چونکہ نیم وتر خاص ۳ ہے اور خروج مرکز ۱، اس لئے

مساوات ہے $\frac{3}{r} = 1 + \frac{1}{r}$ جم طہ جہاں ر سمتی نیم قطر ہے
 اگر ن س ن ماسکی وتر ہو تو ن کے لئے طہ کی قیمت
 ن س لا سے تعبیر ہوتی ہے جو ۴۵ کے مساوی ہے اور
 ن کے لئے یہ زاویہ متناہی ع س ن = ۲۲۵ ہے۔

$$\text{پس } \frac{3}{\text{س ن}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\text{س ن}}} \text{ اس لئے س ن} = \frac{276}{1 + 276}$$

اسی طرح سے $\frac{3}{\text{س ن}} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{\text{س ن}}}$ اور س ن = $\frac{276}{1 - 276}$
 اس لئے کل وتر = س ن + س ن

$$\{ \frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}} \} \sqrt{2} =$$

$$\{ \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \} \sqrt{2} =$$

$$4 \cdot \frac{2}{2} = \frac{4}{2} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

۲۲۶۔ کسی ماسکی وتر کے حصوں کا اوسط موسیقی نیم وتر خاص کے مساوی ہوتا ہے۔
اگر ن س ن کوئی ماسکی وتر ہو تو ہمیں صرف یہ ثابت کرنا چاہیے کہ

$$\frac{1}{س ن} + \frac{1}{س ن} = \frac{2}{ل}$$

اب فرض کرو کہ ن کے لئے طہ کی قیمت (یعنی ل سے ن) عہ
اور ن کے لئے یہ قیمت = $\pi + عہ$
اب چونکہ قطبی مساوات ہے

$$\frac{ل}{س ن} = 1 + زجم طہ$$

$$\text{ایسے } \frac{ل}{س ن} = 1 + زجم عہ$$

$$\frac{ل}{س ن} = 1 + زجم (\pi + عہ) = 1 + زجم عہ$$

ان مساواتوں کو جمع کرنے سے فوراً

$$2 = \frac{ل}{س ن} + \frac{ل}{س ن}$$

$$\text{یعنی } \frac{2}{ل} = \frac{1}{س ن} + \frac{1}{س ن} \dots \dots \dots (۳)$$

مشقیں

۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ جب طہ ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جس میں $l = \frac{1}{r}$ اور $z = \frac{1}{r}$

۲۔ ثابت کرو کہ مکانی کی قطبی مساوات کو شکل $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ طہ $\frac{1}{r}$ میں لکھا جاسکتا ہے جہاں $1, 2$ وترِ خاص ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ جب طہ z کو ہمیشہ $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (طہ z) کی شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ لہذا اس مساوات سے ہمیشہ ایک مخروطی تعبیر ہوتی ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ مساواتوں $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ اور $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ زجم طہ اور

$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ زجم طہ سے ایک ہی منحنی تعبیر ہوتا ہے۔

۵۔ ایک مخروطی کا وترِ خاص ۵ ہے اور خروج المرکز $\frac{1}{r}$ ہے اس ماسکی وتر کا طول معلوم کرو جو محور اعظم کے ساتھ 90° کا زاویہ بناتا ہے۔

۶۔ منحنیات ذیل کو مرتب کر دو۔

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ 'جم طہ' } \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ 'جم طہ'}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ 'جم طہ' } \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ 'جم طہ'}$$

۷۔ اگر n س ن ایک مخروطی کا ماسکی وتر ہو جو محور کے ساتھ

زاویہ طہ بنائے تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ اور $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

۲ زجم طہ = $\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta}$
 ۸۔ مشق ماقبل کی ترتیم کے مطابق ثابت کرو کہ

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} / (1 - \text{زجم طہ})$$

۲۲۷۔ منحنی $\frac{1}{r} = 1 + \text{زجم طہ}$ پر کے دو نقطوں کے
 سمتی زاویے (عہ + بہ) اور (عہ - بہ) ہیں، ان نقطوں کو ملانے
 والے وتر کی مساوات دریافت کرو۔
 سمتی زاویے سے کسی نقطہ کا قطبی محدود طہ یعنی

(عہ + بہ) مراد ہے)
 فرض کرو کہ $\frac{1}{r} = 1 + \text{زجم (عہ + بہ)}$ ان نقطوں کے سمتی نیم قطر ہیں، تب

..... (۱)

اب جن نقطوں کے محدود (بہ، عہ + بہ)، (بہ، عہ - بہ)
 ہیں ان کو ملانے والے خط کی مساوات ہے

$$\frac{1}{r} = \text{عہ + بہ} - (\text{عہ - بہ}) = 2 \text{ بہ جب (طہ - عہ - بہ)}$$

$$+ \frac{1}{r} = 2 \text{ بہ جب (طہ - عہ + بہ)} = \dots\dots\dots (\text{حصہ اول دفعہ آگ})$$

$\frac{1}{r}$ سے ضرب دینے اور (۱) سے قیمتیں درج کرنے سے

$$\frac{1}{r} \text{ جب } 2 \text{ بہ} - \{1 + \text{زجم (عہ + بہ)}\} \text{ جب (طہ - عہ + بہ)}$$

$$+ (1 + \text{زجم عم} - \text{بہ}) \text{جب (طہ - عمہ - بہ)} =$$

اب - جب (طہ - عمہ + بہ) + جب (طہ - عمہ - بہ) = ۲ جم (طہ - عمہ) جب

اور ز (جم عم - بہ جب طہ - عمہ - بہ - جم عمہ + بہ جب طہ - عمہ - بہ)

$$= \frac{1}{4} \text{ ز } \{ \text{جب (طہ - ۲ بہ)} + \text{جب (طہ - ۲ عمہ)} - \text{جب (طہ + ۲ بہ)} \} \text{ جب (طہ - ۲ عمہ)}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ ز } \{ \text{جب (طہ - ۲ بہ)} - \text{جب (طہ + ۲ بہ)} \} = \text{زجم طہ جب ۲ بہ}$$

خط مستقیم کی مساوات میں درج کرنے سے

$$\text{ل} \text{ جب ۲ بہ - ۲ جم (طہ - عمہ) جب بہ - زجم طہ جب ۲ بہ} =$$

$$\text{یا ل} = \text{زجم طہ} + \text{قط بہ جم (طہ - عمہ)} \dots \dots (۴)$$

۲۲۸۔ متبادل ثبوت - دفعہ گذشتہ کا عمل غالباً طویل ہے،

اس کی بجائے مختصر طریقوں سے کام لے سکتے ہیں، لیکن اس

میں فائدہ یہ ہے کہ یہ بالکل صاف اور سیدھا طریقہ ہے، اس میں

ہم خط مستقیم کی مساوات سب سے زیادہ طبعی شکل میں لیتے

ہیں اور پھر معمولی طریقوں سے محصلہ خطی مساواتوں کو حل کرتے ہیں

۔ مساوات (۲) کی شکل کو دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ عمل میں اختصار

ہو سکتا ہے اگر ابتدا میں ہی ہم خط کی مساوات کی شکل

$$\text{ل} = \text{ججم (طہ - عمہ)} + \text{دجم طہ فرض کریں۔}$$

[نوٹ یہ مساوات ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ ضرب سے اور

تکثیر سے، عددوں میں بدلنے کے یہ درجہ اول کی مساوات ہو جاتی ہے]

تب اس مساوات اور ل = ۱ + زجم طہ دونوں سے ل

وہی قیمت حاصل ہوگی جبکہ $\text{طہ} = \text{عہ} + \text{بہ}$ اور نیز $\text{طہ} = \text{عہ} - \text{بہ}$ لہذا $۱ + \text{زجم} (\text{عہ} + \text{بہ}) = \text{ججم} + \text{بہ} + \text{دجم} (\text{عہ} + \text{بہ})$ اور $۱ + \text{زجم} (\text{عہ} - \text{بہ}) = \text{ججم} + \text{بہ} + \text{دجم} (\text{عہ} - \text{بہ})$ تفریق کرنے سے فوراً حاصل ہوتا ہے

اور یہ قیمت درج کرنے سے $\text{ج} = \text{ز}$ قطبہ

پس مطلوبہ مساوات ہے $\text{ل} = \text{زجم طہ} + \text{قطبہ ججم} (\text{طہ} - \text{عہ})$

۲۲۹۔ نقطہ عہ پر کے تماس کی مساوات۔

اگر ہم $\text{عہ} + \text{بہ}$ اور $\text{عہ} - \text{بہ}$ کو طانے والے وتر کی مساوات میں بہ کو چھوٹا کرتے جائیں اور بالآخر اسے صفر بنا دیں تو ایس صورت میں یہ مساوات عہ پر کے تماس کو تعبیر کرے گی۔ اس لئے تماس کی مساوات

$$\text{ل} = \text{زجم طہ} + \text{قطبہ ججم} (\text{طہ} - \text{عہ})$$

میں بہ = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ مساوات مطلوبہ یہ ہے

$$\text{یعنی ل} = \text{زجم طہ} + \text{ججم} (\text{طہ} - \text{عہ}) \dots \dots (۵)$$

انتباہ۔ جب تماس کی مساوات دریافت کرنا مطلوب ہو تو دفعتاً

۲۲۷ یا ۲۲۸ کے ضروری حصے ثبوت میں پہلے دئے جانے چاہئیں۔

۲۳۰۔ تماس کی قطبی مساوات معلوم کرنے کا متبادل طریقہ۔

ذیل کا عمل علم آموز ثابت ہوگا۔

کارٹینیئر محمد دون میں بدلتے سے تماس کی مساوات آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔

منفی ہے $\frac{ل}{ر} = ۱ + زجم طہ یا ر = ل - ز رجم طہ$
 مربع لینے سے $لا + ما = (ل - ز لا)$ جو مخروطی کی مساوات ہے
 اس مساوات کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے :-
 $لا (۱ - ز) + ما = ل - ز لا$
 لہذا $(لا + ما)$ پر کے ماس کی مساوات ہے
 $لا (۱ - ز) + ما + ل ز (لا + لا) = ل = ۰$

یا $لا + ما = ل - ل ز (لا + لا) + ز لا لا = (ل - ز لا) (ل - ز لا)$
 اب فرض کرو کہ $(لا + ما)$ کے قطبی محدود $عہ$ ہیں، پھر واپس قطبی
 محدودوں میں تبدیل کرنے سے اوپر کی مساوات ہو جاتی ہے
 $ر (جم طہ جم عہ + جب طہ جب عہ) = (ل - ز رجم طہ) (ل - ز رجم طہ)$
 کیونکہ $ر = ل - ز لا$ چونکہ $(لا + ما)$ منفی پرست

۱۔ $رجم طہ = (عہ - ل) - ز رجم طہ$

۲۔ $ل = ر \{ ز رجم طہ + جم طہ (عہ - ل) \}$

جس سے حسب سابق حاصل ہوتا ہے $\frac{ل}{ر} = ز رجم طہ + جم طہ (عہ - ل)$

۳۱۔ ماس کی مساوات کی ہندسی تعبیر۔

فرض کرو کہ نقطہ $ن$ کا قطبی زاویہ $عہ$ ہے اور $ن$ پر کے ماس
 پرست کوئی اور نقطہ ہے جس کے محدود $(رجم طہ)$ ہیں، $س$ $ن$
 پر عمودیت، $ص$ نکالو اور $ت$ $ل$ مرتب پر عمود نکالو۔
 تب چونکہ $ل ع س ن = عہ$ اور $ل ع س ت = طہ$
 اس لئے $ت س ن = عہ - طہ$

اب ماس کی مساوات ہے $\frac{ل}{ر} = زجم طه + جم دطه - عه$

یا ل۔ ز رجم طه = رجم (طه۔ عه) = مس ت جھ ت مس ن = مس م
اور ل۔ ز رجم طه = ز × مس لا۔ ز رجم طه = ز (مس لا۔ رجم طه)

= ز × ت ل

لہذا مس م = ز × ت ل

اسلئے مس ت ل = مس ع ع لا

پس اگر ماس کی قطبی مساوات کو

ہندسی طریقہ پر تعبیر کیا جائے تو

مخروطی تراشوں کی وہ مشہور خاصیت حاصل ہوتی ہے جسے

آدم نے دریافت کیا۔ یہ اوپر مندرج ہے۔

مشقیں

۹۔ ثابت کرو کہ نقطہ عہ پر کے ماس کی مساوات کا ریٹرنری محدود

میں تبدیل کرنے سے ہو جاتی ہے لا (ز + جم عه) + ماجب عه ل

۱۰۔ اگر مس میں سے نقطہ عہ پر کے ماس پر عمود نکالا جائے

تو ثابت کرو کہ اس عمود کی مساوات ہوگی

لا جب عه۔ ما (ز + جم عه) عہ

۱۱۔ ثابت کرو کہ اگر مس میں سے مخروطی کے ماس پر عمود نکالا

جائے تو اس عمود کے پایہ کا طریق گزشتہ دو مشقوں کی مساواتوں

میں سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے، اس لئے

ثابت کرو کہ طریق کی مساوات ہے:-

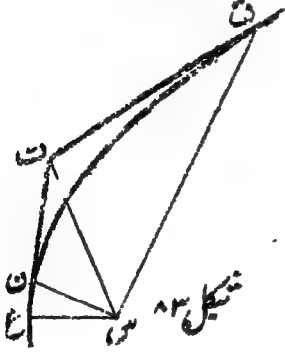
$$(ل - ز لا) + ز ما = لا + ما$$

اس مساوات سے کیا تعبیر ہوتا ہے؟

توضیحی مثالیں

۱۔ اگر کسی نقطہ سے محزوطی کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے محاذی ماسکہ پر مساوی زاوے بنتے ہیں۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے مماس ایک دوسرے سے متا پر ملتے ہیں، تب ہمیں یہ ثابت کرنا چاہئے کہ ت سے زاویہ ن س ق کی تقصیف کرتا ہے۔



فرض کرو کہ نقاط ن اور ق کے قطبی زاوے عہ اور بہ ہیں، تب مماسوں ت ن اور ت ق کی مساواتیں ہیں

$$\frac{ل}{ر} = زجم طہ + جم (طہ - عہ)$$

$$\text{اور } \frac{ل}{ر} = زجم طہ + جم (طہ - بہ)$$

نقطہ ت کے محدود معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان مساواتوں کو ل اور طہ کے لئے حل کرنا چاہئے، تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$جم (طہ - عہ) = جم (طہ - بہ)$$

اب یہ زاوے مساوی نہیں ہو سکتے کیونکہ اس صورت میں عہ = بہ، لہذا

$$طہ - عہ = طہ - بہ \text{ یا } طہ - عہ = بہ - طہ$$

$$\text{پس } ل ع س ت = ل ع س ن = ل ع س ق - ل ع س ت$$

$$\text{یعنی } ل ت س ن = ل ت س ق$$

جس سے ظاہر ہے کہ تاس زاویہ ناس ق کی
تتتتتت کرتا ہے۔

(۲) ماس کے اس حصہ کے محاذی جو نقطہ تاس اور مرتب کے
درمیان منقطع ہوتا ہے ماسک پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

فرض کرو کہ ن پر کا ماس مرتب سے ت پر ملتا ہے،
تب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ زاویہ ناس ت قائمہ ہے۔
مرتب پر کے کسی نقطہ کے لئے

$$\text{رجم طہ} = \text{س ل} = \frac{\text{ل}}{\text{ر}}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{رجم طہ کیونکہ}$$

$$\text{ل} = \text{ر} \times \text{س ل} \dots\dots (\text{دفعہ ۶ کی رو سے})$$

اب نقطہ عہ پر کا ماس ہے

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{رجم طہ} + \text{جم (طہ - عہ)} \text{ اور جس نقطہ پر یہ مرتب سے}$$

ملتا ہے اس کے لئے

$$\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{رجم طہ}$$

ت کے محدود معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان دو مساواتوں کو
ر اور طہ کے لئے حل کرنا چاہئے۔ تفریق کرنے سے

$$\text{جم (طہ - عہ)} = 0$$

$$\text{طہ - عہ} = \pm \frac{\pi}{4}$$

جس سے ظاہر ہے کہ

$$\angle \text{ن س ت} = \angle \text{ن س ع} - \angle \text{ت س ع} = \text{طہ - عہ} = \pm \frac{\pi}{4}$$

جس سے نتیجہ مطلوبہ ثابت ہوا۔

باب ہفتم پر متفرق مشقیں

۱۲۔ اگر ایک مکانی کے دو ماسکی وتر n اور q قی علی التوالم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{n}{q} = \frac{q}{n} + \frac{1}{n}$$

۱۳۔ اگر مخروطی $\frac{L}{R} = 1 + \text{زجم طہ}$ ایک ناقص ہو اور L اور R اس کے محور اعظم اور محور اصغر کے طول ہوں تو ثابت

$$\frac{L}{R} = 1 + \frac{1}{R} \text{ اور } \frac{L}{R} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L}$$

۱۴۔ زاویہ کے لئے متناظر نتیجہ حاصل کرو۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ مخروطی $\frac{L}{R} = 1 + \text{زجم طہ}$ کے امدادی دائرہ

کی قطبی مساوات $R(1 - \frac{L}{R}) = 2L - \text{زجم طہ} + L = 0$ ہے۔

۱۶۔ ان تمام مخروطیوں کی عام مساوات جن کا ماسکہ اور مرتب وہی ہو $\frac{L}{R} = 1 + \text{زجم طہ}$ ہے جہاں F اس نظام کی تمام مخروطیوں کے لئے وہی ہے۔

۱۷۔ ناقص کے تین ایسے ماسکی نیچے قطر معلوم کرو جن کے طول سلسلہ موسیقہ میں ہوں اور جن کے زاویاتی محدود سلسلہ کھاسبہ

میں ہوں۔

۱۸۔ اگر ایک مکانی کے ماسکہ کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچا جا

جو مکانی کے رأس میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ ہر ماسکی وتر کے لئے ان مقطوعات کا حاصل ضرب جو دائرہ اور مکانی کے

درمیان منقطع ہوں مستقل ہوتا ہے۔
 ۱۹۔ نقاط عد اور بہ پر ایک مخروطی تراش کے ماس کھینچے گئے
 ہیں، ان کے نقطہ تقاطع کے قطبی محدود معلوم کرو اور ان کی
 بناء پر ثابت کرو کہ اگر ایک مکانی کے نقاط n اور q پر کے
 ماس t پر ہیں تو $t = n \times q$ سے
 ۲۰۔ کیا شرط پوری ہو کہ خط $\frac{1}{r} = \text{اجم طہ} + \text{ب جب طہ}$
 مخروطی $\frac{1}{r} = 1 + \text{اجم طہ کو مس کرے۔}$

۲۱۔ دو مخروطیوں کے ماس کے اور مرتب دہی ہیں، اگر ایک کا
 کوئی ماس دوسری کو n اور q پر کاٹے تو ثابت کرو کہ
 $n \times q$ مستقل ہے اور $\text{اجم} \frac{1}{r} = n \times q = \text{نچہ چا}$
 زائرین کے خروج المرکز ہیں۔
 ۲۲۔ مخروطیوں کے ایک نظام کا ماس کے اور وتر خاص دونوں
 وہی ہیں، ثابت کرو کہ ماس کے سے گزرنے والے ایک
 ثابت خط مستقیم کے سب نقطوں پر کے ماس $n \times q$ وتر خاص
 کو ماس کے سے ایک ہی فاصلہ پر قطع کرتے ہیں۔

۲۳۔ دو مکافیوں کا مشترک ماس کے ہے اور ان کے راس
 بالترتیب e اور e' ہیں، اگر e خط مستقیم en کا وسطی
 نقطہ ہو اور q n میں n ایک ماس کی وتر ہو جو مکافیوں
 سے نقاط q ، q' ، n ، n' پر لے تو ثابت کرو کہ $n \times q$
 کی تنصیف q پر ہوتی ہے اور مکافیوں کے نقاط q اور
 n پر کے ماس علی القواہم ہیں۔ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق

بھی معلوم کرو۔
 ۲۴۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مخروطی کے علی القواہم ماس کی وتروں
 کے سروں پر ماس کھینچے جائیں تو ان کے نقطہ تقاطع کا طریق

ایک ہم ماسکہ مخروطی تراش ہوگی۔

آزمائشی پرچہ ۵

۱۔ بغیر ثابت کرنے کے ایک مخروطی کے لحاظ سے قطب اور قطبی کے مشہور خواص بیان کرو۔ دو خط بلحاظ ایک دوسرے کے مزدوج کب ہوتے ہیں؟
ثابت کرو کہ اس خط کا قطب جو متقارب کے متوازی ہو متقارب پر واقع ہوتا ہے۔

۲۔ قطع زائد لا = ج کے لحاظ سے نقطہ (لا، نا) کے قطبی کی مساوات معلوم کرو۔

۳۔ مخروطی ۹ لا - ۸ ما - ۱۶ لا + ۸ ما + ۶ = کے لحاظ سے خط لا - ۲ ما = کا قطب معلوم کرو۔

۴۔ ایک نقطہ ایک ناقص کے اندر واقع ہے، بتاؤ کہ اس نقطہ کا قطبی بلحاظ ناقص مذکور کے ہندسی طور پر کس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔

۵۔ ایک نقطہ ن کا قطبی بلحاظ مکانی ما = ہم لا کے کھینچا گیا ہے، اگر وہ عمود جو اس نقطہ سے قطبی مذکور پر کھینچا جائے ایسا ہو کہ ہمیشہ مکانی لا = م ب ما کو مس کرے تو ثابت کرو کہ نقطہ ن خط لا + ۲ لا + م ب ما + م لا = پر واقع ہوتا ہے۔
۶۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مکانی کے دو ماس محور کے ساتھ متسم زاوے بنائیں تو ان کا وتر تمام محور کو ایک ثابت نقطہ پر کاٹے گا۔

۷۔ کئی خط کھینچے گئے ہیں جو ناقص لا + م ب = کو کاٹتے

ہیں، ان خارج المرکز زاویوں کا حاصل جمع جن پر کوئی ایک

خط مستقیم ناقص کو قطع کرتا ہے مستقل رہتا ہے اور ۲ سر کے مساوی ہے ثابت کرو کہ ان خطوط مستقیم کے قطبوں کا طریق ۱ = ۲ = ۳ = ۴ ہے۔

۸۔ ناقص کے عماد کی مساوات خارج المرکز زاویہ کی رقوم میں معلوم کرو۔

ثابت کرو کہ ایک معلومہ نقطہ سے ناقص کے چار عماد کھینچ سکتے ہیں، نیز محور کے ساتھ عماد کے میلان کی مساوات دریافت کرو۔

۹۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ کا رقبہ ۲۰ ایسا ہے۔

۱۰۔ مکانی ۱ = ۲ = ۳ = ۴ کے مماس کی قطبی مساوات معلوم کرو جبکہ اس کے قطب مانا جائے۔ اس کو

$$r = r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 \quad (طہ - عہ)$$

کی شکل میں تبدیل کرو، نیز ثابت کرو کہ، مکانی کے مماس کی وتر کے سروں پر کے مماس مرتب پر علی القوائم ملتے ہیں۔



باب ہندو ہم مخروطیوں کے نظام

۲۳۲۔ مختصر تر قیم۔ اس باب میں ہم مخروطیوں کی مساواتوں کے متعلق چند ضروری اصولوں کی تشریح کریں گے۔
ہم اکثر عام مساوات کو اس کی مختصر شکل
س = .

میں استعمال کریں گے جہاں س سے مراد ہے جملہ
ولا + ۲ ہ لا + ما + ب + ۲ + گ لا + ۲ ف + ما + ج
ہم معنی = . سے اسی مساوات کو تعمیر کر سکتے ہیں جبکہ سروں پر زبریں
ہوں یعنی س = لا + ۲ ہ لا + ما + ب + ۲ + گ لا + ۲ ف + ما + ج
اسی طرح سے ہم خط مستقیم کی مساوات کو بھی ایک ہی حرف سے
تعبیر کریں گے مثلاً

ی = .

جہاں ی سر یا لا اور ما میں درجہ اول کا ایک جملہ ہے۔
پس ہم مساوات ل لا + م + ن = . کی بجائے
ی = . لکھ سکتے ہیں۔

۲۳۳۔ اگر دو مخروطیوں کی مساواتیں س = . اور س = . ہوں

تو مساوات $S + K = S$ ، K کی تمام قیمتوں کے لئے اسے
مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جو S اور S کے نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے۔
اولاً مساوات $S + K = S$ ، درجہ دوم کی مساوات
ہے کیونکہ S اور S دونوں جداگانہ درجہ دوم کے جھے ہیں، پس
یہ مساوات کسی نہ کسی مخروطی کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر $S = S$ اور $S = S$ کا ایک

نقطہ تقاطع A ہو تو A کے محدود

$S = S$ اور $S = S$ دونوں

مساواتوں کو پورا کرتے ہیں گویا

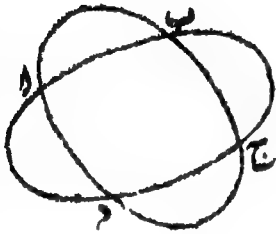
اس کے محدود مساوات

$S + K = S$ ۔

کو پورا کرتے ہیں یعنی مخروطی

$S + K = S$ ، نقطہ A میں سے

گزرتی ہے۔



شکل ۸۵

اسی طرح سے یہ $S = S$ اور $S = S$ کے باقی نقاط تقاطع میں سے

گزرتی ہے۔ پس مساوات $S + K = S$ ، ایک مخروطی کو تعبیر کرتی

ہے جو $S = S$ اور $S = S$ کے تمام نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے۔

طالب علم اس استدلال اور دفعہ ۳۱ کے استدلال کی مشابہت کو
ملاحظہ کرے۔

مشقیں

۱۔ اگر $S = S$ اور $S = S$ دو دائروں کی مساواتیں ہوں تو مساوات

$S + K = S$ سے ایک دائرہ تعبیر ہوتا ہے جو اول الذکر دائروں

کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

۲۔ اگر $S = S$ اور $S = S$ دونوں قائم زائد ہوں تو ثابت کرو کہ

نظام س + ک م = ۰ کی ہر ایک مخروطی قائم زائد ہے اس سے حاصل کرو کہ "قائم زائدوں کے نقاط تقاطع میں سے جو مخروطی تراشیں کھینچ سکتی ہیں وہ سب قائم زائد ہیں"

۴۔ دو مخروطی تراشیں ایک دوسرے کو چار نقاط حقیقی یا خیالی پر قطع کرتی ہیں ہم نے دفعہ ماقبل میں اس امر کے متعلق کچھ بھی فرض نہیں کیا کہ درجہ دوم کے دو منحنی ایک دوسرے کو کتنے نقاط پر قطع کرتے ہیں۔ اب ہم ثابت کرینگے کہ درجہ دوم کے دو منحنی ایک دوسرے کو چار نقاط خیالی یا حقیقی پر قطع کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ان کی مساواتیں ہیں

$$۱) \quad ۲x^2 + ۲y^2 + ۲z^2 + ۲w^2 + ۲ = ۰$$

$$۲) \quad ۲x^2 + ۲y^2 + ۲z^2 + ۲w^2 + ۲ = ۰$$

ان کے نقاط تقاطع معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان مساواتوں کو لاٹا کے لئے حل کرنا چاہیئے۔ اس غرض سے ہم دونوں کو لا میں درجہ دوم کی مساواتیں سمجھ کر ان کی رقوم کو لا کی صعودی قوتوں میں ترتیب دیتے ہیں پھر ان مساواتوں سے لا کو ماقط کر کے ماکے لئے مساوات حاصل کرتے ہیں جو مساوات درجہ چارم ہے اور اسلئے جس کی چار اصلیں حقیقی یا خیالی ہیں۔ پس

$$\begin{aligned} & ۱) \quad \left\{ \begin{aligned} ۲x^2 + ۲y^2 + ۲z^2 + ۲w^2 + ۲ = ۰ \\ ۲x^2 + ۲y^2 + ۲z^2 + ۲w^2 + ۲ = ۰ \end{aligned} \right. \\ & \text{حسب معمول مقل استقامت سے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} ۲x^2 + ۲y^2 + ۲z^2 + ۲w^2 + ۲ = ۰ \\ ۲x^2 + ۲y^2 + ۲z^2 + ۲w^2 + ۲ = ۰ \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} ۲x^2 + ۲y^2 + ۲z^2 + ۲w^2 + ۲ = ۰ \\ ۲x^2 + ۲y^2 + ۲z^2 + ۲w^2 + ۲ = ۰ \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

اور یہ صریحاً مائیں درجہ چارم کی مساوات ہے جسکی چار اصلیں ہیں

جو فرض کرو کہ ما، ما، ما، ما ہیں (ٹیوٹوریل الجبرا حصہ دوم، دفعہ ۳۷) چونکہ ہم مساوات (۱) سے لا کو سا قطر کر سکتے ہیں اور لا کے لئے ایک خطی مساوات ما کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اس لئے ظاہر ہے کہ ما کی ہر ایک قیمت کے جواب میں لا کی صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔ پس اگر لا کی چار متناظر قیمتیں لا، لا، لا، لا ہوں تو ہم دیکھتے ہیں کہ نقاط تقاطع چار ہیں یعنی (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا)، (لا، لا) نوٹ - ممکن ہے کہ ان چار نقطوں میں سے بعض خیالی ہوں یہ بآسانی معلوم ہو سکتا ہے (دیکھو ٹیوٹوریل الجبرا دفعہ ۳۷) کہ کوئی خیالی اصل کسی مساوات میں اکیلی واقع نہیں ہو سکتی ایسی اصلیں ہمیشہ دو دو کے جڑوں میں واقع ہوتی ہیں۔

مشقیں

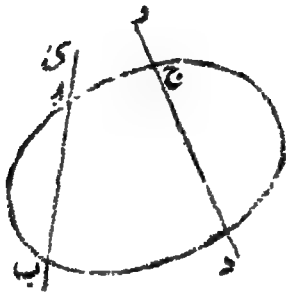
۳۔ اور کی تحلیل کو تسلیم کر لینے کے بغیر متذکرہ بالا مسئلہ کی صداقت کو ثابت کرو جبکہ ایک مخروطی تراکبش خطوط مستقیم کے ایک زوج کو تعبیر کرے۔
۴۳۵۔ ایک مخروطی تراش دو معلومہ مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے، ثابت کرو کہ اس کے علاوہ وہ ایک اور صرف ایک اور شرط پوری کر سکتی ہے۔

اگر $س = ۰$ اور $س = ۰$ دو مخروطیوں کی مساواتیں ہوں تو مساوات $س + ک = ۰$ سے ایک مخروطی تعبیر ہوتی ہے جو ان کے نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے، چونکہ اس مساوات میں ایک اختیار سے متقلک شامل ہوتا ہے جس کی قیمت نا حال متعین نہیں کی گئی، اس لئے ہم اس مساوات پر ایک اور شرط عائد کر سکتے ہیں جس سے ک کی قیمت متعین ہو جاتی ہے۔

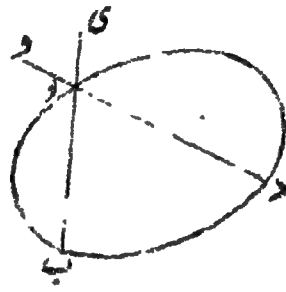
۴۳۶۔ وہ صورت، جس میں $س = ۰$ خطوط مستقیم کے ایک زوج میں تحلیل ہو جاتی ہے۔

اگر $س = ۰$ دو اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکے تو اس سے دو خطوط

مستقیم تعمیر ہوتے ہیں، فرض کرو کہ اجزائے مغربی میں تحلیل کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے $ی = و = تب$ خطوط $م = و$ میں سے ہر ایک $س = و$ سے دو نقاط پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ نقاط $ا$ ، $ب$ اور $ج$ و $د$ ہیں تب مساوات $س + مکی = و =$



شکل ۸۶، و



شکل ۸۶، ب

سے ایک مخروطی تعمیر ہوتی ہے جو چار نقاط $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ میں سے گزرتی ہے۔

اب فرض کرو کہ $د$ ساکن رہے۔ $ی$ اور خط $و =$ اس کے گرد اس طرح گردش کرتا ہے کہ $ج$ کے قریب آتا جاتا ہے اور بالآخر $ا$ پر منطبق ہو جاتا ہے، تب مخروطی $س + مکی = و =$ اس سے اوپر کے دو منطبقہ نقاط پر ملتی ہے یعنی اسے $س$ کرتی ہے۔

پس اگر خطوط مستقیم $ی = و$ اور $و =$ مخروطی $س =$ پر ملیں تو ظاہر ہے کہ مخروطی $س + مکی = و =$ مخروطی $س =$ سے اُس نقطہ پر $س$ کرتی ہے جہاں $و = و =$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو مخروطی $ا$ ، $ا$ ، $ا$ ، $ا$ اور $ا$ ، $ا$ ، $ا$ ، $ا$ کے نقاط پر ملے اور نیز

نقطہ (۱۶۱) میں سے گزرے۔
جو محروطی متذکرہ بالا محروطیوں کے نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے
اس کی مساوات کی شکل یہ ہوتی ہے

$$(۱۶۱) \quad ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱)$$

اگر یہ محروطی نقطہ (۱۶۱) میں سے گزرے تو

$$۳ + ۴ = ۷ \quad ۳ + ۴ = ۷ \quad ۳ + ۴ = ۷$$

پس مطلوبہ مساوات ہے

$$۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱)$$

$$۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱)$$

مثال ۲۔ اس محروطی کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱۶۱) میں سے
گزرے اور نیز ان نقاط میں سے گزرے جہاں ابتدائی محور محروطی
۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) کو قطع کرتے ہیں۔

مطلوبہ مساوات کی شکل یہ ہے

$$۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱)$$

جہاں ک کی قیمت اس شرط کی رو سے معلوم کرنی چاہیے کہ مطلوبہ محروطی
نقطہ (۱۶۱) میں سے گزرتی ہے۔

$$۱ = ۱ \quad ۱ = ۱ \quad ۱ = ۱ \quad ۱ = ۱$$

$$۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱)$$

مشقیں

۳۔ اس محروطی کی مساوات معلوم کرو جو محروطی ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) اور ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) کے نقاط تقاطع اور نیز نقطہ (۱۶۱) میں سے گزرے۔

۵۔ اس محروطی کی مساوات معلوم کرو جو محروطی ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) اور ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) کے نقاط تقاطع اور نیز نقطہ (۱۶۱) میں سے گزرے۔

$$۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱)$$

$$۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱) = ۳(۱۶۱)$$

کے نقاط تقاطع میں سے کم از کم مبداء میں سے گزرے۔

۶۔ ایک مخروطی، $لا + لا۱ + ما = ۳$ اور $۲ لا + لا۱ - ما + ۳ لا = ۰$ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے اور اس کا ایک متقارب محور لا کے متوازی ہے، مخروطی کی مساوات معلوم کرو۔

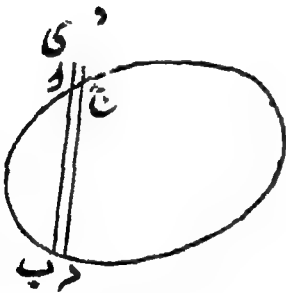
(درجہ دوم کی رقوموں میں باجزو ضربی ہونا چاہیے، دیکھو دفعہ ۱۱)۔
۷۔ ثابت کرو کہ دو مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع ہیں۔ سے دو مکانی کھینچے جاسکتے ہیں۔

(یہاں محصلہ سائرات میں درجہ دوم کی رقوموں کو مربع کامل بنانا چاہیے۔)

۲۳۷۔ مساوات $س + ک ی = ۰$ کی تعبیر

اب فرض کرو کہ نقاط ج اور د دونوں مخروطی پر اس طرح حرکت کرتے ہیں کہ ج بتدریج حرکت کرتے کرتے ا کے پاس آ جاتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے اور د حرکت کرتے کرتے ب کے پاس آ جاتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے۔

تب مخروطی $س + ک ی = ۰$ ۔



شکل ۸۶

س = ۰ سے لے کر چار نقاط پر ملتی ہے جن میں سے دو بالآخر ا پر منطبق ہوتے ہیں، اور باقی دو ب پر کو نیز اس انتہائی حالت میں د = ۰ بعینہ

د ہی سے ج ی = ۰ ہے، پس ہم دیکھتے ہیں کہ مخروطی

$س + ک ی = ۰$ مخروطی $س = ۰$ ۔

کو ان دو نقاط پر مس کرتی ہے جہاں خط مستقیم $ی = ۰$ مخروطی $س = ۰$ کو قطع کرتا ہے۔

جب دو مخروطی تراشیں اس طرح سے ایک دوسرے کو دو نقاط پر

مس کریں تو اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ ان کا باہمی دور اتنا ہے
۲۳۸ - حوالہ کے محزوروں کو مس کرنے والی محزوطیاں -
اگر ایک محزوطی، مس = ۰ کو ان نقاط پر مس کرے جہاں ی = ۱،
مس = ۰ کو قطع کرتا ہے تو اس کی عام مساوات
مس + لہ ی = ۰ ہوگی۔

اب فرض کرو کہ مساوات مس = ۰ محزوروں کو تعبیر کرتی ہے
یعنی مس = لا = ۰۔

تب ہم دیکھتے ہیں کہ اس محزوطی کی عام سے عام مساوات جو حوالہ
کے محزوروں کو ان نقاط پر مس کرتی ہے جہاں خط لا + م - ۱ = ۰۔
محاور کو قطع کرتا ہے لا + لہ (ل لا + م - ۱) = ۰ ہے۔

۲ = ۱/۲ یہ رکھنے سے یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے
(ل لا + م - ۱) ۲ + ۲ لہ لا = ۰ (۱)

۲۳۹ - حوالہ کے محزوروں کو مس کرنے والا مکانی
اس محزوطی کی مساوات جو محزوروں کو مس کرتی ہے اس شکل کی ہوتی ہے
(ل لا + م - ۱) ۲ + ۲ لہ لا = ۰۔

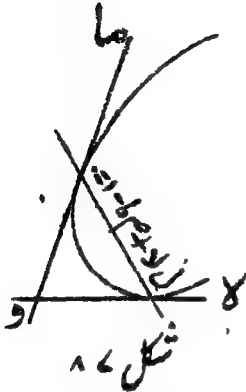
اگر یہ مساوات قطع مکانی کو تعبیر کرے تو درجہ دوم کی رقیس مربع کامل
بنائینگے۔ یہ رقیس حسب ذیل ہیں

$$لا \times ل + ۲ لا (ل م + م) + م^۲$$

انکے مربع کامل ہونے کے لئے ل م = (ل م + م) یا م = ۲ ل م
(اصل م = ۰ ناقابل تسلیم ہے کیونکہ اس سے دو منطبقہ خطوط مستقیم
ل لا + م = ۱ تعبیر ہوتے ہیں۔)

پس چونکہ م کی صرف ایک قیمت ہے، اس لئے ہمیں صرف ایک

مکانی حاصل ہوتا ہے جو محوروں سے دو نقاط پر ملتا ہے اور اس کی مساوات
 ہے (ل لا + م ما - ا) - ۳ ل م لا = ۰ یا (ل لا - م ما) - ۲ ل لا - ۳ م ما + ۱ = ۰
 یہ مساوات ایک مشہور شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے۔
 فی الحقیقت چونکہ



$$(ل لا + م ما - ا) = ۲ ل م لا$$

$$\text{اس لئے } ل لا + م ما - ا = ۱ - ۲ ل م لا$$

$$\text{یعنی } ل لا + م ما = ۱ + ۲ ل م لا$$

پس طرین کے جذروں کو مساوی کرنے سے

$$مال لا + مام ما = ۱ + ۲ ل م لا \dots (۲)$$

جہاں کوئی کسی علامت دونوں جذروں کے ساتھی جاسکتی ہے۔
 نوٹ - یہ مکانی محوروں سے ان نقاط پر ملتا ہے جہاں خط ل لا + م ما = ۱
 ان سے ملتا ہے)

۳۴۔ نقطہ م (لا، ما) ہے، محروطی

$$لا + ۲ ل لا + م ما + ۲ ل م لا + ۲ ل م لا + ج = ۰$$

کے جو ماس کھینچ سکتے ہیں ان کی مساوات معلوم کرو۔

اگر ن، ق نقاط تماس ہیں تو مماسات م، ن، م، ق ملکر ایک ایسی
 محروطی بناتے ہیں جسکا تذکرہ بالا محروطی کے ساتھ نقاط ن اور ق
 پر دوہرا تماس ہے، لیکن چونکہ ن، ق نقطہ م کا قطبی ہے اس لئے
 اس کی مساوات ہے

$$لا (لا + م ما + گ) + م (لا + م ما + ف) + گ (لا + م ما + ج) = ۰$$

لہذا دفعہ ۳۳ کی رو سے ماسوں کی مطلوبہ مساوات کی شکل یہ ہے

۱ لا ۲ ۵ لا ۱ ما + ب ۲ ۱ گ ۲ لا ۲ ف ۲ ما + ج

+ ل { (لا ۱ لا ۵ ما + گ) + ما (لا ۱ ب ۲ ما + ف) }

+ گ ۲ لا ۲ ف ۲ ما + ج ۲ = ۰

ل کی قیمت اس امر پر غور کرنے سے معلوم ہو سکتی ہے کہ اگر یہ مساوات م میں سے گزرنے والے محاسن کو تعبیر کر کے تدبیر م کے محدودوں (لا ۱ ما) سے پوری ہوگی

۰ لا ۲ ۵ لا ۱ ما + ب ۲ ۱ گ ۲ لا ۲ ف ۲ ما + ج

+ ل { (لا ۲ ۵ لا ۱ ما + ب ۲ ۱ گ ۲ لا ۲ ف ۲ ما + ج) } = ۰

پس ل = - لا ۲ ۵ لا ۱ ما + ب ۲ ۱ گ ۲ لا ۲ ف ۲ ما + ج

اور مطلوبہ مساوات ہے

(لا ۲ ۵ لا ۱ ما + ب ۲ ۱ گ ۲ لا ۲ ف ۲ ما + ج)

(لا ۲ ۵ لا ۱ ما + ب ۲ ۱ گ ۲ لا ۲ ف ۲ ما + ج)

= { لا ۲ ۵ لا ۱ ما + ب ۲ ۱ گ ۲ لا ۲ ف ۲ ما + ج } =

اسے ہم نے اس سے پہلے دفعہ ۱۳۸ میں بھی معلوم کیا ہے۔

مشق

۸۔ نقطہ (۱، ۱) سے مخروطی لا ۱ لا ۱ ما = ۵ کے ماس کھینچے گئے ہیں۔

ان محاسن کی مساواتیں دریافت کرو۔

ذیل کی مساواتوں پر دفعہ ۲۴۰ کا پورا عمل کرنے سے مخروطیوں کے

ان محاسن کی مساواتیں دریافت کرو جو نقطہ (لا ۱ ما) سے کھینچے

جاسکتے ہیں۔ اور اس امر کی تصدیق کرو کہ جہاں اب ان نتائج کے مطابق ہیں

جوان خاص صورتوں میں عام ضابطہ کو استعمال سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$9 - لا + با + گ + لا + ف + ج = 0$$

$$10 - لا - با - لا = 0$$

$$11 - لا + با - لا = 1 - \frac{با}{لا} - \frac{لا}{لا} = 1 - \frac{با}{لا} - 1 = 0$$

۱۳ - مثلہ ۹ تا ۱۲ کے محاسبات کے باہم علی القوائم ہونے کی شرائط لکھو اور ان سے مرتب دائروں کی مساواتیں مستنبط کرو۔ قطع مکانی کی صورت میں مرتب دائرہ کیا ہو جاتا ہے؟

۱۴ - اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرے اور مخروطی ۳ لا - لا + با + لا + لا + لا + لا = 0 سے ان نقاط پر دوہرا تاس رکھے جہاں محور لا را اس مخروطی کو قطع کرتا ہے۔

۱۵ - اس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو مبدأ میں سے گزرے اور نیز ان نقاط میں سے گزرے جہاں خطوط مستقیم لا + لا + لا = 0، لا - لا - لا = 0، لا + لا - لا = 0، لا - لا + لا = 0 سے ملنے ہیں۔

۱۶ - ثابت کرو کہ ایک ہی ایسا مکانی کھینچ سکتا ہے جو ایک مفروضہ مخروطی کو دو نقاط پر مس کرے۔

(فرض کرو کہ لا + م + ن = 0 اس خط کی مساوات سب سے بنو نقاط تاس کو ملتا ہے، پھر ک کی وہ قیمت معلوم کرو جس کے لئے محصلہ مخروطی ایک مکانی کو تعبیر کرے)

۱۷ - ثابت کرو کہ ایک اور صرف ایک ہی قائم قطع زائد کھینچ سکتا ہے جو ایک مفروضہ مخروطی کو دو نقاط معلومہ پر مس کرے۔

۱۸ - ایک مکانی محاورہ کو نقاط لا اور ب پر مس کرتا ہے جن کا فاصلہ مبدأ سے لا، ب کے مساوی ہے، ثابت کرو کہ مکانی

کی مساوات شکل $\pm \sqrt{\frac{لا}{لا}} \pm \sqrt{\frac{با}{با}} = 1$ میں تحویل

ہو سکتی ہے۔
 ۱۹۔ نیز ثابت کرو کہ (۱) مشق ۱۸ کے مکانی کے اُس حصہ کے لئے جو مثلث دایہ کے اندر واقع ہوتا ہے مساوات کی دونوں علامتیں مثبت ہونی چاہئیں (۲) جو حصہ نقطہ Δ سے پرے واقع ہے اس کے لئے علامتیں + اور - ہونی چاہئیں اور جو حصہ Δ سے پرے واقع ہے اس کے لئے علامتیں - اور + ہونی چاہئیں۔
 ۲۰۔ ایک مکانی کے وتر خاص کے سروں پر عباس کھینچے گئے ہیں، ان ماسوں کو محور مان کر مکانی کی مساوات معلوم کرو۔ [دانیہ پورس علی القوانین]۔
 ۲۱۔ ثابت کرو کہ Δ ، Δ ، Δ کی تمام قیمتوں کے واسطے مساوات

لاجم عم + ماجم عم - ع + لاجم عم + ماجم عم - ع + لاجم عم + ماجم عم - ع
 سے وہ محروطی تعبیر ہوتی ہے جو تین خطوط مستقیم لاجم عم + ماجم عم - ع = Δ وغیرہ کے تین نقاط تقاطع میں سے گذرتی ہے۔
 (دیکھو کہ یہ درجہ دوم کی مساوات ہے اور کسی دو خطوط کا نقطہ تقاطع اس پر واقع ہوتا ہے۔)

۲۲۔ وہ شرائط معلوم کرو کہ مشق ماقبل کی محروطی ایک دائرہ کو تعبیر کرے اور ثابت کرو کہ یہ شرائط اس طرح لکھی جاسکتی ہیں۔

$$\Delta \text{ جم (عم + عم)} + \Delta \text{ جم (عم + عم)} + \Delta \text{ جم (عم + عم)} = 0$$

$\Delta \text{ جب (عم + عم)} + \Delta \text{ جب (عم + عم)} + \Delta \text{ جب (عم + عم)} = 0$
 (لا اور Δ کے سروں کو مساوی رکھو اور لا کا سر صفر بناؤ، محور قائم فرض کرو)

۲۳۔ اوپر کی مساواتوں کو Δ ، Δ ، Δ کے لئے حل کرنے سے ثابت کرو کہ بیرونی دائرہ کی مساوات حسب ذیل شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے

حیب (عم - عم) + حیب (عم - عم) + حیب (عم - عم)
 لاجم عم + ماجب عم - ع + لاجم عم + ماجب عم - ع + لاجم عم + ماجب عم - ع

۲۴۱۔ پانچ نقاط معلومہ میں سے ایک اور صرف ایک ہی مخروطی کھینچ سکتی ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ دو مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع اور ان کی سطح مستوی پر کے ایک اور نقطہ میں سے ایک مخروطی کھینچ سکتی ہے، اس طرح سے ہمیں ایک مخروطی حاصل ہوتی ہے جو پانچ نقاط معلومہ میں سے گزرتی ہے اور یہ عمل ہمیشہ ہو سکتا ہے۔

اگر ا، ب، ج، د، ع پانچ نقطے ہوں تو نقاط ا، ب، ج، د، ع میں سے مخروطیوں کا ایک نظام گزرتا ہے اور اس نظام میں سے ایک مخروطی خطوط ا، ب، ج، د پر مشتمل ہے اور ایک اور مخروطی خطوط ب، ج، د، ع پر مشتمل ہے۔

ان کے نقاط مشترکہ ا، ب، ج، د میں سے گزرنے والی کسی مخروطی کی مساوات سس + ک سس = ہے جہاں سس = خطوط ا، ب اور ج، د کی مساوات ہے اور سس = خطوط ب، ج اور د، ع کی مساوات ہے۔ اب ہم ک کی ایسی قیمت معلوم کر سکتے ہیں کہ مخروطی سس + ک سس =

نقطہ ع میں سے گزرے، چونکہ بلحاظ ک کے یہ مساوات درجہ اول ہے اس لئے صرف ایک ہی ایسی مخروطی کھینچ سکتی ہے۔ مندرجہ بالا نتیجہ پر ہم حسب ذیل طریقہ سے بھیج سکتے ہیں۔ مخروطی کی مساوات ہمیشہ اس شکل کی ہوتی ہے

$$۱۰ + ۲۰ھ + ۱۰ب + ۲۰گ + ۲۰ف + ۱۰ج = ۰$$

چونکہ مساوات کی سب رقموں کو ہم کسی ایک سر پر تقسیم کر سکتے ہیں اس لئے یہ سمجھنا

چاہیے کہ مساوات بالا میں چھ سو نہیں بلکہ درحقیقت پانچ سو ہیں۔
پس چونکہ مساوات میں فی الحقیقت پانچ سو نہیں اس لیے کہ
مخروطی سے پانچ شرطیں پوری کرانی جاسکتی ہیں بعینہ اسی طرح جیسے کہ
ایک خط مستقیم سے دو مخروطیں پر مبنی کرانی جاسکتی ہیں۔
اگر پانچ ٹھکے دئے ہوں تو ان کے محدود مساوات

$$۱۰۱ + ۲۵۲ + ۱۱۱ + ۲۲۲ + ۱۱۱ + ۲۲۲ + ۱۱۱ = ۰$$

میں مندرجہ کرنے سے ہیں سرور کی نسبتیں معلوم کرنے کے لئے درجہ
اول کی پانچ ہزار مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور یہ ان نسبتوں کو معلوم
کرنے کے لئے کافی ہیں۔

ظاہر ہے کہ بالعموم جب ایک مخروطی کوئی شرط پوری کرے تو اس کی مساوات
کے سرخجی ایک خاص ربط پورا کریں گے۔

علی طور پر اس وقت کا پہلا تقاریر زیادہ بہت سہولت ہوتا ہے۔

۲۴۲۔ چار نقاط معلوم میں سے گزرنے والی مخروطیاں۔

فرض کرو کہ نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں، 'ا'، 'ب' اور 'ج' کو ملاؤ اور
ان کو اتنا خارج کرو کہ یہ وہ پریس، خطوط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کو ملا
اور ان کے محور مانو۔

فرض کرو کہ 'ا' = 'د'، 'ب' = 'ج'، 'ا' = 'د' = 'د'۔

تب 'ا'، 'ج' کی مساوات ہے

$$۱ = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱}$$

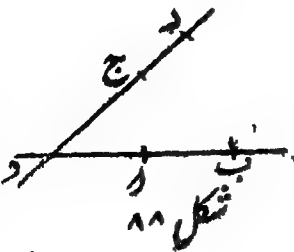
اور 'ب'، 'د' کی مساوات ہے

$$۱ = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱}$$

نیز 'ا'، 'ب' ہے 'ا' = 'ب'۔

اور 'ج'، 'د' ہے 'ج' = 'د'۔

پس ان چار نقاط میں سے گزرنے والی دو مخروطی تراشیں ہیں۔



$$لا = ۰ \text{ اور } (۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}) (۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}) = ۰$$

لہذا ان چار نقطوں میں سے گزرنے والی کوئی اور مخروطی ہے

$$(۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}) (۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}) + م لا = ۰$$

جہاں م کی قیمت کچھ ہی ہو سکتی ہے۔

مشقیں

۲۳۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو نقاط ذیل میں سے گزرے
(۰، ۰)، (۰، ۱)، (۲، ۰)، (۱، ۲)، (۲، ۳)

۲۵۔ اُس مخروطی کی مساوات معلوم کرو جو نقاط ذیل میں سے گزرے
(۰، ۰)، (۰، ۱)، (۲، ۰)، (۱، ۲)، (۲، ۳)

۲۶۔ مساوات (۳) سے جو مخروطیاں تعبیر ہوتی ہیں ان میں سے ایک ہے

$$(۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}) (۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}) = ۰$$

م کی وہ قیمت معلوم کرو جس سے یہ مخروطی حاصل ہوتی ہے۔

۲۷۔ ہم ماسکہ مخروطی تراشیں۔

اب ہم نجل طور پر چند ایسی مخروطیوں کے ایک نظام کے خواص پر بحث کریں گے جن کے ماسکے وہی ہوں۔

اس قسم کی مخروطیاں ہم ماسکہ مخروطیاں کہلاتی ہیں ان کے بہت سے خواص ہیں انہیں ہم ایسی مثالیں سے بھی حاصل ہو سکتے ہیں، لیکن

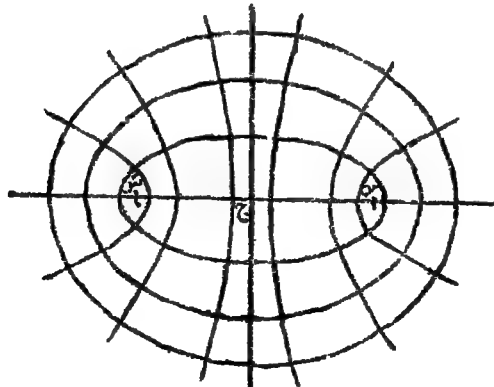
یہاں ہم صرف انہیں ذکر کرتے ہیں کہ انہیں ہم ماسکے

ہم ماسکہ مخروطیوں کے نظام میں ماسکے مساوات

ایک مخروطی کی عام سے عام مساوات جس کے
 اسکے دہی ہوں جو $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ کے ہیں
 $1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

ہے جہاں لہذا مستقل ہے۔
 اولاً اگر ایک مخروطی کے اسکے سے دو سہ دہی ہوں جو ایک معلوم

مخروطی کا ہے اور اس کے خوب بنیاد سمیت کے معلوم مخروطی کے محوروں
 پر منطبق ہوں گے۔ اس کی وجہ ظاہر ہے کیونکہ اس میں سب مخروطیوں
 کے محورا عظمیٰ مشترک سمت میں ہیں اور اگر اس میں وسطی نقطہ میں
 سے ایک خط محورا عظمیٰ پر عمود وار کھینچا جائے تو یہ خط سب مخروطیوں کا
 محورا صغیر ہوگا۔
 پس اسکے مرکز محوروں کی سمتیں سب مخروطیوں کے لئے دہی ہیں۔



شکل ۸۹

اس سے معلوم ہوا کہ اس نظام کی کسی اور محرومی کی مساوات یہ ہو سکتی ہے

$$1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

لیکن ج س = ا ر = ا - ب (دیکھو دفعہ ۶۱)

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

پس اگر ا = ا + لہ تو

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{l}$$

اور مساوات ہو جاتی ہے

$$1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{a+l} \quad (۴)$$

۲۴۵ - طالب علم امور ذیل کی آسانی سے تصدیق کر سکتا ہے -

اگر ل بڑا ہو ب گسے تو محرومی تراش

$$1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{a+l}$$

(۱) قطع ناقص ہوگی جبکہ ل مثبت ہو یا جبکہ ل منفی ہو اور تعداداً

ب سے کم ہو یعنی جبکہ ل < - ب

(۲) خط مستقیم = (یعنی لا کا محور) ہوگی جبکہ ل = - ب

(۳) قطع دائرہ ہوگی جبکہ ل > - ب اور ل < - لا

(۴) خط مستقیم لا = ہوگی (یعنی لا کا محور) ہوگی جبکہ ل = - لا

(۵) ایک خیالی قطع ناقص ہوگی جبکہ ل > - لا

۲۴۶ - سطح مستوی پر کے کسی نقطہ میں سے ایک ہم ماسکہ نظام کی دو محرومیاں کھینچ سکتی ہیں -

فرض کرو کہ (لا، ل) کوئی نقطہ ہے تب ہمیں لہ کی وہ قیمت

معلوم کرنی چاہیے جس سے محرومی

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a}{a^2+ab} + \frac{b}{b^2+ab} \quad \text{نقطہ (۱۱۱) میں سے گزرے۔}$$

$$\text{لہذا} \quad 1 = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$$

$$یا (a+b) = (a+b) = (a+b) = (a+b)$$

$$\text{یعنی } a+b = (a+b) = (a+b) = (a+b)$$

لہ میں یہ درجہ دوم کی مساوات ہے اور اس لئے کہ دو قیمتیں ایسی ہیں کہ ان میں سے ہر ایک۔ کہ جواب میں جو ہم ماسکہ حاصل ہوگا وہ نقطہ (۱۱۱) میں سے گزرے گا۔

مثال۔ وہ محزوطیاں دریافت کر جو $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ کے ساتھ ہم آسکے ہوں اور نقطہ (۱۱۱) میں سے گزریں۔
یہاں لہ کے لئے مساوات ہے

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{b}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{b} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{a} = \frac{b-1}{b}$$

پس مطلوبہ محزوطیاں یہ ہیں

$$1 = \frac{a}{(b-1)b} + \frac{1}{b}$$

$$1 = \frac{a}{(b-1)b} + \frac{1}{b}$$

$$\text{یعنی } 1 = \frac{a}{b-1} + \frac{1}{b} \quad \text{اور} \quad 1 = \frac{a}{b-1} + \frac{1}{b}$$

ان میں سے پہلی محزوطی صریحاً قطع دائرہ ہے اور دوسری قطع ناقص۔

۲۴۷۔ ایک نقطہ میں سے جو دو ہم ما کے کچھ سکتے ہیں ان میں سے ایک قطع ناقص ہوتا ہے اور دوسرا قطع زائد۔
فرض کرو کہ یہ = $\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}$ تب اگر یہ منفی ہو تو مخروطی

صیحا قطع زائد ہوگی اور اگر یہ مثبت ہو تو مخروطی ناقص ہوگی۔
مساوات یوں بھی لکھی جاسکتی ہے

$$1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

پس اگر مخروطی نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرے تو یہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

یا $b^2(1 - \frac{b^2}{a^2}) = b^2(1 - \frac{b^2}{a^2}) + b^2(1 - \frac{b^2}{a^2})$
یعنی $b^2(1 - \frac{b^2}{a^2}) = b^2(1 - \frac{b^2}{a^2}) + b^2(1 - \frac{b^2}{a^2})$

اب b^2 کا ب لہذا اعملوں کا حاصل ضرب منفی ہے۔
(ٹیوٹوریل الجبر حصہ دوم دفعہ ۱۵۶)

پس اصلیں حقیقی ہیں جن میں سے ایک مثبت ہے اور دوسری منفی۔
پس ایک مخروطی ناقص ہے اور دوسری زائد۔

۲۴۸۔ دو ہم ما سکے مخروطیاں ایک دوسرے کو زادیہ قائمہ پر قطع کرتی ہیں۔
فرض کرو کہ مخروطیاں یہ ہیں

$$1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \text{ اور } 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

اور ان کا نقطہ تقاطع (لا، ما) ہے، تب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ ان مخروطوں کے نقطہ (لا، ما) پر کے تماس ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔
اب دو تماس حسب ذیل ہیں

$$1 = \frac{لا}{ما} + \frac{لا}{لا + لا} \quad \text{اور} \quad 1 = \frac{ما}{ما} + \frac{لا}{لا + لا}$$

یہ علی القواثم ہونگے اگر

$$0 = \frac{لا}{(لا + لا)} + \frac{لا}{(لا + لا)} \quad \text{(حصہ اول دفعہ ۱۹)}$$

$$1 = \frac{لا}{لا} + \frac{لا}{لا + لا} \quad \text{اور} \quad 1 = \frac{ما}{ما} + \frac{لا}{لا + لا}$$

تفریق کرنے سے

$$0 = \left(\frac{1}{لا} - \frac{1}{لا + لا} \right) + \left(\frac{1}{ما} - \frac{1}{لا + لا} \right)$$

$$0 = \frac{لا}{لا(لا + لا)} + \frac{لا}{لا(لا + لا)}$$

$$0 = \frac{لا}{لا(لا + لا)} + \frac{لا}{لا(لا + لا)}$$

لیکن یہ شرط بعینہ وہی ہے جو تماسوں کے علی القواثم ہونے کی شرط ہے۔ پس ہم ماسکہ تراشیں اپنے نقاط تقاطع پر ایک دوسرے کو علی القواثم قطع کر لی ہیں۔

۲۴۹۔ ایک معلومہ نظام کی صرف ایک ہی مخروطی ایسی ہو سکتی ہے جو ایک دے ہوئے خط مستقیم کو مس کرے۔
فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات یہ ہے

$$ل = لا + م = ۱$$

اس کے لئے شرط کہ یہ خط مخروطی $\frac{۲۶}{۲۱} + \frac{۲۱}{۲۱} = ۱$ کو مس کرے

(۱) $(۱ + ل) + (۲ + ل) = ۱$ (دفعہ ۱۴)
ہے اور یہ لہ میں درجہ اول کی مساوات ہے جس کی صرف ایک ہی اصل ہے۔ پس معلوم ہوا کہ صرف ایک ہی ہم ماسکہ ایک دئے ہوئے خط مستقیم کو مس کرتا ہے۔

مشقیں

۲۷۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۲، ۱) میں سے مخروطی $۲ + ل = ۱$ کے جو ہم ماسکے کھینچ سکتے ہیں ان میں سے ایک ناقص ہے اور دوسرا زائد۔
۲۸۔ $ن + ن = ن$ مستقل، اس خاصیت سے ثابت کرو کہ صرف ایک ہی ایسا ناقص کھینچ سکتا ہے جسکے ماسکے دئے ہوئے ہوں اور جو ایک نقطہ معلومہ میں سے گزرے۔

قیس زائد کے لئے بھی یہی خاصیت ثابت کرو۔
۲۹۔ اس ہم کو مد نظر رکھ کر کہ ایک مرکز دار مخروطی کے کسی نقطہ پر کا تماس اس کے ماسکی فاصلوں کے درمیان کے داخلی یا خارجی زاویوں کی تنصیف کرتا ہے۔ دفعہ ۲۴ کا نتیجہ حاصل کرو۔

۳۰۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جو $\frac{۲۱}{۲۱} + \frac{۲۱}{۲۱} = ۱$ کے ساتھ ہم ماسکے ہے اور $۱ + ل = ۱$ کو مس کرتی ہے $\frac{۲۱}{۲۱} + \frac{۲۱}{۲۱} = ۱$ ہے

۳۱۔ اس زائد کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتا ہے اور ناقص $\frac{۲۱}{۲۱} + \frac{۲۱}{۲۱} = ۱$ کے ساتھ ہم ماسکے ہے۔
۳۵۰۔ مخروطیوں کے ایک ہم ماسکہ نظام کے لحاظ سے ایک معلومہ خط مستقیم کے قطبوں کا طریق معلوم کرو۔

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{لا}{لا + ل} + \frac{ما}{ب + ل} = ۱ \dots\dots\dots (۱)$$

ہم ماسکہ مخروطیوں کے نظام میں سے ایک مخروطی ہے اور معلومہ خط مستقیم ل لا + م ما = ۱ ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی (۱) کے لحاظ سے خط مذکورہ کا قطب (لا، ما) ہے، تب نقطہ (لا، ما) کا قطبی یعنی

$$\frac{لا}{لا + ل} + \frac{ما}{ب + ل} = ۱ \dots\dots\dots (\text{دفعہ } ۱۸۹)$$

وہی خط ہے جو ل لا + م ما = ۱ سے تعبیر ہوتا ہے۔

پس سروں کا مقابلہ کرنے سے $\frac{لا}{لا + ل} = ل$ اور $\frac{ما}{ب + ل} = م$

اس لئے لا = (لا + ل) ل، ما = (ب + ل) م
قطبوں کا طریق معلوم کرنے کے لئے ہمیں ان مساواتوں میں سے ل
کو سا ق کرنا چاہیے۔

$$\text{اب } \frac{لا}{ل} - \frac{ما}{م} = \frac{لا}{لا + ل} - \frac{ما}{ب + ل} = (ب + ل) - (لا + ل) = ب - لا$$

پس طریق کی مساوات ہے

$$\frac{لا}{ل} - \frac{ما}{م} = ب - لا$$

پس مطلوبہ طریق ایک خط مستقیم ہے جو مفروضہ خط مستقیم پر عمود وار ہے
اب مفروضہ خط مستقیم ہم ماسکہ مخروطیوں میں سے ایک کو مس کرتا ہے،
فرض کرو کہ نقطہ تماس ن ہے اور ن ت مفروضہ خط مستقیم ہے، تب
مس کرنے والے ہم ماسکہ کے لحاظ سے ن قطب ہے۔ لکن مطلوبہ
طریق خط مستقیم گ ہے جو ن میں سے ن ت پر عمود کھینچا گیا ہے۔
نتیجہ صریح۔ اگر ن ت کے قطبوں کا طریق ن گ ہو تو ن گ کے

قطبوں کا طریق ن ت ہوگا۔
 چونکہ ن میں سے گزرنے والے دو ہم ماسکے ایک دوسرے
 کو علی التوائم قطع کرتے ہیں اور ن ت ایک محزوطی کا ماسکس ہے
 اس لیے ن گ دوسری محزوطی کا ماسکس ہوگا، پس ن گ کے
 قطبوں میں سے ایک قطب ن ہے اور چونکہ طریق مطلوبہ خط مستقیم
 ن گ پر عمود وار ہے اس لیے یہ طریق خط ن ت ہی ہے۔

مشقیں

۳۲۔ محزوطی ۲ لا + ۳ ما = ۶ کی ہم ماسکے محزوطیوں کے لحاظ سے
 خط لا + ما = ۶ کے قطبوں کا طریق معلوم کرو۔

۳۳۔ اگر ل لا + م ما = ۱ کے قطبوں کا طریق بلحاظ ہم ماسکے
 نظام $\frac{لا}{لا+ل} + \frac{ما}{ما+م} = ۱$ کے ل لا + م ما = ۱ ہو تو ثابت کرو کہ

$$(۲-ما) ل لا = (۱-ل) م م = ۱$$

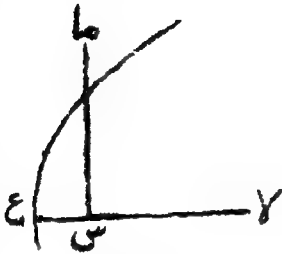
۳۴۔ مشق ماقبل سے ثابت کرو کہ ان دو خطوط مستقیم کا بھی ربط مکانی ہے

۲۵۱۔ ہم ماسکے مکانی۔ اب تک ہم نے اپنی توجہ ہم ماسکے
 مرکز دار محزوطیوں تک ہی محدود رکھی ہے۔ یہاں ہم ہم ماسکے مکانیوں
 کے متعلق بھی چند الفاظ سپرد قلم کرنا چاہتے ہیں۔

چونکہ مکانی میں ایک ہی ماسکے ہوتا ہے اس لیے یہ صورت
 پہلی صورت سے مختلف ہے۔

اگر دو مکانیوں کا ماسکے اور محور دونوں ایک ہی ہوں تو ان کو
 ہم ماسکے مکانی کہتے ہیں۔

۲۵۲۔ مکانیوں کے ہم ماسکے نظام کی مساوات
 مشترک ماسکے ماس کو سبب مانو اور مشترک محور کو لا کا



نقش ۹۰

ما^۲ = ۳ لا^۲ (لا لا لا) (۵)

محور فرض کرو۔ تب ہم جانتے ہیں کہ
اگر رأس ع کو مبدأ مانا جائے تو
مکانی کی مساوات کی شکل یہ ہوتی

ما^۲ = ۳ لا^۲ جہاں لا = محور ع
پس مبدأ کو محور پر منظر کر کے
سے مساوات ہو جاتی ہے

اور یہ عام مساوات مطلوبہ ہے۔

ہم ماسکہ مکافیوں کے مندرجہ ذیل خواص کو ہم طالب علم کے لئے
مشق کے طور پر چھوڑتے ہیں۔ مرکز دار مخروطیوں کی تناظر اخامیوں
کے محل کرنے کے جو طریقے ہیں ان سے ان مسائل کی تہہ حاصل کرنے
کی ترکیب کا پتہ چلتا ہے۔

مشقیں

۳۵۔ کسی معلوم نقطہ میں سے دوہم ماسکہ مکافی کھینچ سکتے ہیں۔
۳۶۔ کسی معلوم نقطہ میں سے گزرنے والے دوہم ماسکہ مکافیوں
کے قعر مقابل سمتوں میں ہوتے ہیں۔ (یہ نتیجہ اس امر پر غور کرنے سے
حاصل ہوتا ہے کہ ان میں مساوات درجہ دوم کی اصلیں مختلف اطلاعات

میں۔)
۳۷۔ دوہم ماسکہ مکافی ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔
۳۸۔ خط مستقیم لا + م = ا کے قطب کا طریقہ الجھاظ ہم ماسکہ
مکافیوں لا^۲ = ۳ لا (لا لا) کے خط مستقیم م (لا) کی م + م = لا ہے۔
[فرض کرو کہ خط مذکور کا قطب الجھاظ ما^۲ = ۳ لا (لا لا) کے (لا لا)
ہے تب معلومہ خط مستقیم مذکور ہوگا جو ما - لا = لا (لا لا) (لا لا)

ہے، اس سے ظاہر ہے کہ $۱ + ۲ = ۳$ اور $۱ = \frac{۱}{۳}$ ۔ $\left[\frac{۱}{۳} \right]$
 ۳۵۔ اگر دو خطوط مستقیم میں سے پہلا خط دوسرے کے قطب کا طریق ہو
 تو دوسرا پہلے کے قطب کا طریق ہوگا۔

باب ہشتم پر متفرق مشقیں

۳۰۔ اگر دو قائم قطع زائدوں کے چار نقاط تقاطع ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کے ازواج ۱۲ ، ۳۴ اور ۱۳ ، ۲۴ اور ۱۴ ، ۲۳ میں سے ہر ایک کے خط ملکی القوائے ہیں، اس سے حاصل کرو کہ ان چار نقطوں میں سے کسی تین کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کا مرکز عمودی چوتھا نقطہ ہے۔

۳۱۔ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ سے ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ پر عمود کھینچا گیا ہے اور ان اس مثلث کا مرکز عمودی ہے، ثابت کرو کہ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ سے ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ کو سبڈا مان کر اس سے حاصل کرو کہ ایک مثلث کے رأسوں میں سے گزرنے والے تمام قائم زائد اس کے مرکز ہندسی میں سے بھی گزرتے ہیں۔

۳۲۔ مشق ماقبل کے قائم زائدوں کے مرکوزوں کا طریق ایک دائرہ بنتا ہے جو خطوط ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ کے وسطی نقطوں میں سے اور عمودوں کے پایوں میں سے گزرتا ہے (اس دائرہ کو نقطہ دائرہ کہتے ہیں)۔

۳۳۔ ایک دائرہ پر کے چار نقطوں میں سے گزرنے والی سب مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق قائم قطع زائد ہے۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ مخروطی $\left(\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} - ۱ \right) \left(\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} - ۱ \right) + ۱$ کے لحاظ سے مبدأ کے قطبی کی مساوات ہے

$$لا = \left(\frac{1}{چ} + \frac{1}{چ}\right) ما + \left(\frac{1}{چ} + \frac{1}{چ}\right) ۰ = ۲ -$$

۴۵۔ خطوط مستقیم لا = ۱ + ۱، ۲ = ۱ + ۱، لا = ۱ + ۱، ۰ سے جو مثلث بنتا ہے اس کے رأسوں میں سے گزرنے والی محزوطی کی عام مساوات دریافت کرو۔

۴۶۔ شق ما قبل کے مثلث کے بیرونی دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔
۴۷۔ ایک ناقص اس طرح حرکت کرتا ہے کہ یہ ہمیشہ دو ثابت علی نظام خطوط مستقیم کو مس کرتا ہے۔ اس کے مرکز کا طریق دریافت کرو۔

۴۸۔ محزوطی $\left(\frac{لا}{م} + \frac{ما}{ن} - ۱\right) = ۲$ ک لا ما کے مرکز کے محدد معلوم کرو۔

۴۹۔ اگر $س = ۰$ اور $س = ۰$ دو محزوطیوں کی مساواتیں ہوں تو ثابت کرو کہ لفظ (لا، ۱) کا قطبی بلحاظ $س + ل$ س = ۰ کے $ی + ل$ ی = ۰ ہے جہاں $ی = ۰$ قطبی ہے بلحاظ $س$ کے اور $ی = ۰$ قطبی ہے بلحاظ $س$ کے۔

۵۰۔ محزوطیوں لا + ۲ ل لا + ب ما = ۱ کے نظام کو شکل میں دکھاؤ جبکہ ۵ اور ب مستقل ہوں اور ل متغیر ہو۔
۵۱۔ ان نقطوں کے محدد معلوم کرو جن پر ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ ہم ماسک قائم قطع زائد کو قطع کرتا ہے۔

۵۲۔ ہم ماسک محزوطیوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے اور اس کے محور اعظم پر کے ایک ثابت نقطہ سے محزوطیوں کے ماس کے بیچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ نقاط تماس کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز محور اعظم پر ہے۔

۵۳۔ دو ہم ماسک محزوطیوں کے دو متوازی ماسوں پر مرکز سے عمود نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان عمودوں کے مربعوں کا فرق

۶۰۔ د، ب، ج، د ایک مخروطی پر کے چار نقطے ہیں، د ب ج د کا نقطہ تقاطع ع ہے، ج د، ب د کا تقاطع ف ہے، ج ب، د د کا تقاطع گ ہے، مشق ۴۴ سے حاصل کرو کہ ج کا قطبی بلحاظ اس مخروطی کے ف اور گ دونوں میں سے گزرتا ہے اس سے مستنت کرو کہ مثلث ع ف گ ایسا ہے کہ اس کا ہر ایک ضلع مقابل کے رأس کا قطبی ہے (یعنی مثلث مزدوج بالذات ہے) ۶۱۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کے مرکوزوں کا طریق جو دو قائم الزاموں کے چار نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہیں ایک دائرہ ہے۔

۶۲۔ ایک ناقص کے کوئی دو متوازی مماس ایک ایسے ثابت دائرہ کو قطع کرتے ہیں جو ناقص کے ساتھ ہم مرکز ہے، ثابت کرو کہ نقاط تقاطع کو ملانے سے جو مستطیل بنتا ہے اس کے باقی دو اضلاع ایک ہم ماسکہ مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۶۳۔ ایک نقطہ کے محدود مساداتوں لا = اجم طہ، ما = ب جب طہ کی شکل میں دئے ہوئے ہیں، ثابت کرو کہ نقطہ کا طریق ایک ایسے مکانی کا حصہ ہے جو محوروں کو مس کرتا ہے، اگر طہ معلوم ہو تو اس سے جو نقطہ متعین ہوتا ہے اس پر کے مماس کی مسادات معلوم کرو۔

۶۴۔ اگر خط متقیم لا جم طہ + ما جب طہ = ع دو ناقصوں

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ اور } \frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \text{ کو قطع کرے}$$

اور ان مخروطیوں کے لحاظ سے خط مذکورہ کے قطب م اور م

ہوں تو ثابت کرو کہ م م = $\frac{ل}{ع}$

۶۵۔ ثابت کرو کہ ہم ماسکوں $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے قطبی مخروطی مرا لا لا + نما - ما

+ ما لا - ب = ۰ کو مس کرتے ہیں۔

باب نوزدہم

لفاف

۲۵۳۔ لفاف۔ فرض کر دو کہ کسی منحنی کی مساوات میں رقوم کے سر
ایک ایسی مقدار پر موقوف ہیں جو بدل سکتی ہے، تب ظاہر ہے کہ
اگر وہ کوئی خاص قیمت دی جائے تو اس سے ایک خاص منحنی حاصل
ہوتا ہے اور وہ کی قیمت میں تغیر کرنے سے منحنیوں کا ایک نظام حاصل
ہوتا ہے۔

اس خیال کے ادماک کی غرض سے شاید چند مثالیں طالب علم
کے لئے زیادہ مفید ثابت ہونگی۔
خط مستقیم کی مساوات

$$(ا + لا + ب + ج) + م (ا + لا + ب + ج) = ۰$$

مقدار م پر موقوف ہے۔ جب م بدلتا ہے تو ہمیں خطوط مستقیم
کا ایک نظام یا قبیل حاصل ہوتا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ سب
خطوط مستقیم ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
(دیکھو حصہ اول، دفعہ ۲۸)

نیز اگر ہم مساوات

$$۱ = م + لا + \frac{ا}{م}$$

میں نہ کو مختلف قیمتیں دیں تو ہمیں خطوط مستقیم کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے اور اس سلسلہ کا ہر ایک خط مکانی ماہم $\frac{1}{m}$ والا کو مس کرتا ہے (دیکھو دفعہ ۴۸)۔

ایک اور مثال یہ ہے کہ مساوات

$$1 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

ہم ماسکہ مخروطیوں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہے۔

متبادل - مقدار m کو متبادل کہتے ہیں اور منحنیوں کے نظام کے متعلق یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ ایک متبادل پر موقوف ہے۔

۴۵ - انتہائی تقاطع - اگر ہم m کو کوئی خاص قیمت m دیں تو ہمیں ایک خاص منحنی حاصل ہوتا ہے جس کا ناپ اور مقام وغیرہ پورے طور پر متعین ہو جاتا ہے۔ اب اگر ہم m کو ایک اور قیمت ایسی دیں جو m سے بقدر ایک نہایت چھوٹی مقدار d کے مختلف ہو یا بالفاظ دیگر m کی بجائے $m + d$ رکھیں جہاں d بہت چھوٹا ہے تو ہمیں ایک اور منحنی حاصل ہوگا جو پہلے منحنی سے ذرا سا ہٹا ہوا ہوگا۔ یہ دو منحنی ایک دوسرے کو چند نقطوں پر قطع کرتے ہیں اور اگر d کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے تو یہ نقطے منحنیات کے انتہائی تقاطع کہلاتے ہیں۔

$$\text{مثلاً نظام } m = n + \frac{1}{m} \text{ میں}$$

ایک خاص خط مستقیم

$$m = n + \frac{1}{m}$$

ہے، اگر ہم m کو ایک اور قیمت $m + d$ دیں جو m سے بقدر ایک نہایت چھوٹی مقدار کے مختلف ہو تو ہمیں پہلے خط کے نہایت قریب ایک اور خط حاصل ہوتا ہے جو $m = (m + d) + \frac{1}{m + d}$ ہے۔

اب یہ دونوں خط مکانی $۱ = ۲$ لا کے ماس ہیں اور چونکہ ایک منحنی کے دو متصل ماس ایک دوسرے سے منحنی پر ملتے ہیں اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ موجودہ صورت میں انتہائی تقاطع کے نقطے اس مکانی پر واقع ہوتے ہیں جس کو خط ط مستقیم مس کرتے ہیں۔ ہم ابھی دیکھیں گے کہ یہ عام طور پر درست ہے۔

۲۵۵۔ انتہائی تقاطع کا طریق

اگر ہم ایک نظام کے سب منحنی لیں اور ہر ایک منحنی کے نقاط تقاطع اس منحنی کے ساتھ معلوم کریں جو اس کے نہایت قریب واقع ہوتا ہے تو ہمیں تقاطع کے لانتہائی نقطے حاصل ہوں گے اور یہ سب کے سب ایک منحنی پر واقع ہوں گے جس کو انتہائی تقاطع کا طریق کہتے ہیں۔

مثلاً شکل ۹۱ میں فرض کرو کہ منحنی خطوط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ایک نظام کے پاس پاس کے پانچ منحنیوں کے حصے ہیں، نیز فرض کرو کہ ۲، ۱ سے نقطہ ن پر ملتا ہے اور ۱، ۲ سے ق پر اور ۳، ۴ سے ر پر اور ۴، ۵ سے س پر ملتا ہے، تب ن، ق، ر، س سب انتہائی تقاطع کے طریق پر واقع ہوں گے جب کہ ان منحنیات کو ایک دوسرے کے لانتہا قریب لایا جائے۔

۲۵۶۔ ابتدائی منحنیات میں سے ہر ایک انتہائی تقاطع کے طریق کو مس کر سکتا ہے۔

منحنی ۲ (شکل ۹۱) پر غور کرو۔ یہ انتہائی تقاطع کے طریق سے جس کو منقوط خط کے ذریعہ دکھایا گیا ہے ان نقطوں پر ملتا ہے جہاں

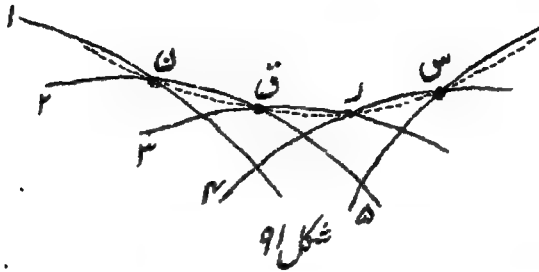
(۱) یہ ۱ سے ملتا ہے یعنی ن پر

(۲) یہ ۳ سے ملتا ہے یعنی ق پر

اب اگر یہ تین منحنی ۱، ۲، ۳ ایک دوسرے کے نہایت قریب

آجائیں تو ن، ق کے نزدیک آجاتا ہے۔ پس انتہائی تقاطع

کے نقاط کا طریق منحنی ۲ سے دو منطبقہ نقاط پر ملتا ہے اور بناءً علیہ اس کو مس کرتا ہے۔



اسی طرح سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ انتہائی تقاطع کے نقطوں کا طریق ابتدائی منحنیات میں سے ہر ایک کو مس کرتا ہے۔ اس بناء پر اس طریق کو نظام مذکور کا لفافہ کہتے ہیں۔

مثال۔ ہم ابتدائی اصولوں سے خطوط مستقیم کے نظام

$$۰ = ۱ + ۱ \text{ یا } ۱ = ۱ + ۱$$

پر غور کرتے ہیں۔ اس کے دو خاص قیمتیں ۱، ۰ دینے سے

ہمیں دو خطوط مستقیم ۱ = ۱ + ۱ اور ۰ = ۱ + ۱ حاصل ہوتے ہیں۔ ہذا تقریبی کرنے سے ان کے نقطہ تقاطع پر

$$(۱ - ۱) = ۱ - ۱ \text{ یا } (۱ + ۱) = ۱ + ۱$$

پس اگر ہم فرض کریں کہ ۱ بلحاظ قیمت ۱ کے ہنایت قریب آ جاتا ہے تو آخر الذکر مساوات ہو جاتی ہے

$$۱ = ۱ - ۱$$

جو انتہائی تقاطع کے نقطہ کے محدودوں سے پوری ہوتی ہے۔
(یہ بات قابل غور ہے کہ ۱ - ۱ پر تقسیم کرنے سے ہم دائیں جانب کے رکن کو مطلقاً صفر ہونے سے بچا لیتے ہیں اور اس طرح ۱ کو ۱ کے مساوی رکھ سکتے ہیں)

$$۱ = ۱ - ۱ \text{ لیکن}$$

پس انتہائی تقاطع کا طریق معلوم کرنے کے لئے ہمیں مساواتوں
 $m^2 - la = m^2 + a = 0$ اور $2m - la = a = 0$
 سے m کو ساقط کرنا چاہیئے۔
 دوسری مساوات سے

$$\frac{a}{2} = m$$

$$\text{لہذا } \frac{a}{2} - la = \frac{a}{2} + a + a = 0$$

یعنی $a = 0$ اور دفات la کی بناء پر ہمیں اسی جواب کی توقع تھی۔
 ۲۵۷۔ ایک منحنی کی مسادات یہ ہے

$m^2 + n + q = 0$
 جہاں n ، q ، اور r متغیرات la اور m کے تقاطع ہیں اور m
 ایک متبدل ہے، اس منحنی کا لفاف معلوم کرو۔

ہمیں انتہائی تقاطع کے نقطوں کا طریق معلوم کرنا چاہیئے۔ اس
 نظام کے دو منحنی

$$m^2 + n + q = 0 \text{ اور } m^2 + n + q + r = 0$$

(۱)

ہیں۔ ان کے نقاط تقاطع کے محدود دونوں مساواتوں (۱) کو پورا
 کرتے ہیں۔ لہذا تفریق کرنے سے یہ $n (m^2 - m^2) + q (m - m) = 0$
 کو یعنی $n (m + m) + q = 0$ کو پورا کرتے ہیں۔

اب اگر ہم m کو بلحاظ قیمت کے m کے نہایت ہی قریبے جائیں
 یعنی ان کے قریب کو نہایت ہی کم کر دیں تو ان منحنیات کے تقاطع
 تقاطع لفافہ پر کے نقطے بن جاتے ہیں، لہذا m کو m کے مساوی
 رکھنے سے باآخرا حاصل ہوتا ہے

$$2m + n + q = 0$$

پس مطلوبہ طریق حاصل کرنے کے لئے ہمیں
 $۲م + ق = ۰$ اور $۲ن + م + ق = ۰$ میں سے م کو ساقط کرنا چاہیے۔

$$\begin{aligned} \text{مساوات اول سے م} &= -\frac{ق}{۲} \\ \therefore \frac{ق}{۲} - ۲ن - \frac{ق}{۲} \times ق + ۰ &= ۰ \end{aligned}$$

یعنی $ق = ۲ن$ (۱)
 اس طرح لغات کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہمیں ذیل کا کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

کلیہ۔ متبادل کے لحاظ سے جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوتی ہے اس کی اصلوں کے باہم مساوی ہونے کی شرط لکھو یہ شرط لغات کی مساوات ہوگی۔

۲۵۸۔ دفعہ ما قبل کے نتیجہ کو تعبیر کرنے کا ایک اور نہایت دلچسپ طریقہ ذیل میں درج کیا جاتا ہے۔

نظام زیر بحث کے ان منحنیات پر غور کرو جو ایک نقطہ معلومہ میں سے گزرتے ہیں، ایسے منحنی صرف دو ہیں کیونکہ $۲ن + ق = ۰$ میں محدود لا، ما درجہ کرنے سے مساوات
 $۲ن + م + ق = ۰$ حاصل ہوتی ہے اور چونکہ یہ مہ میں درجہ دوم کی مساوات

ہے اس لئے نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے والے صرف دو منحنی ہیں۔

اب اگر (لا، ما) میں سے گزرنے والے دو منحنی ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تو نقطہ (لا، ما) لغات پر واقع ہو گا اور منحنیوں کے ایک دوسرے منطبق پر ہونے کی شرط یہ ہے کہ مہ کی مساوات درجہ دوم

ہیں مہ کی دو قسمیں مساوی ہوں یعنی

$$ق^۱ = ۴ ن ل$$

اور یہی شرط دفعہ ۲۵۷ میں معلوم کی گئی ہے۔
مثال۔ ہم ماسکہ مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے ایک نقطہ معلوم
کے قطبیوں کا نفاث معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ہم ماسکہ نظام کی ایک مخروطی

$$۱ = \frac{لا}{لا + لہ} + \frac{۲ا}{۲ا + لہ}$$

ہے، نقطہ (لام، ما) کا قطبی بلحاظ اس کے

$$۱ = \frac{لا لاا}{لا + لہ} + \frac{۲ا ماا}{۲ا + لہ}$$

اب نفاث معلوم کرنے کے لئے ہمیں لہ کو متبدل تصور کرنا چاہئے۔
قطبی کی مساوات بالا ہے

$$۱ = \frac{لا + لہ}{لا + لہ} - \frac{لا لاا}{لا + لہ} - \frac{۲ا ماا}{۲ا + لہ} = ۰$$

یا لہ + لہ (لا + لہ - لا لاا - ۲ا ماا) = ۰
پس کلیئہ مذکورہ کی رو سے مطلوبہ نفاث ہے

$$(لا + لہ - لا لاا - ۲ا ماا) = ۰$$

چونکہ درجہ دوم کی رقیس (لا لاا + ماا) ہیں، اس لئے مساوات
مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔ پس مطلوبہ نفاث مکانی ہے۔

مشقیں

۱۔ کسی نقطہ میں سے نظام ص لا - ص ما + لہ = کے دو خط گذرتے
ہیں اور وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اگر نقطہ مذکورہ مکانی

ما = ۲ لا پر واقع ہو جو لفاف ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{مہ} (لا + ب + ما) + \frac{1}{2} (ب - لا - ما) + ۱ = ۰$$

میں مہ کو مختلف قیمتیں دینے سے خطیہ مستقیم کا جو قبیل حاصل ہوتا ہے اس کا لفاف قائم ہند بولی ہے اس کے محوروں کے طول اور مقام معلوم کرو۔

۳۔ ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ محوروں پر اس کے مقطوعوں کا حاصل ضرب ہمیشہ یکساں رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا لفاف ایک قطع زائد ہے جس کے متقاربہ ابتدائی محور ہیں۔
(ایک مقطوعہ کو تبدیل مانو اور دوسرے مقطوعہ کو شرط مذکورہ بالا کے ذریعہ متطوعہ کی رقوم میں بیان کر دو۔)

۱۲۔ مکانی پر ایک نقطہ P سے اور N میں کامعین ہے۔ متوازی الاضلاع PN کے قطر PN کا لفاف معلوم کرو۔

۲۵۹۔ بعض اوقات ایسے نغمے کہ لفاف معلوم کرنے میں ضرورت ہے پڑتی ہے حرکی مساوات میں دو متبادل مثال ہیں اور یہ متبادل یک مساوات کے درجہ ما بعد مزید ہوں۔ ساہمہ رقوم میں متبادل کو متوازی مساوات کے ذریعہ ہم نسی مساوات سے ایک متبادل ساہمہ کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات اور طریقوں سے کام لیا جاتا ہے ملاحظہ ہو ذیل مثالیں۔

مثال۔ (۱) دائرہ (لا-ج) + ما = د کا لفاف معلوم کرو جبکہ

$$ج + د = ک$$

$$(لا-ج) + ما = ک \quad ج + د = ک$$

ج میں جو یہ مساوات درجہ دوم ہے اس کی اصولوں کو مساوی بنائے

لفاف عامل ہوتا ہے۔

پس لفاف ہے

$$\text{لا} = ۲ (\text{ما} - \text{ک}) \quad \text{یا} \quad \text{لا} = ۲ \text{ما} + ۲ \text{ک} = ۲$$

جو صریحا قطع زائد ہے۔

(۲) محدودوں کے محوروں پر ایک متحرک خط مستقیم کے مقطوعوں کا قائل جمع مستقل رہتا ہے، خط مستقیم کا لفاف معلوم کرو۔
فرض کرو کہ ج اور د مقطوعے ہیں اور ک ان کا مستقل مجموعہ ہے
تب ج + د = ک

$$\text{اور خط کی مساوات ہے} \quad \frac{\text{لا}}{\text{ج}} + \frac{\text{لا}}{\text{د}} = ۱$$

ان میں سے ج کو ساقط کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱ = \frac{\text{لا}}{\text{د}} + \frac{\text{لا}}{\text{ک}}$$

$$\text{یا د (ک - د) - د لا - (ک - د) ما = ۰}$$

$$\text{یا د - (ک - لا + ما) د + ک ما = ۰}$$

مطلوبہ لفاف متبدل د کی دو قیمتوں کو مساوی کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس لئے یہ ہے

$$(\text{ک - لا + ما}) = ۲ \text{ک ما یا لا} = ۲ \text{لا + ما} = ۲ \text{ک لا} = ۲ \text{ک ما} = ۲$$

جو قطع مکافی ہے کیونکہ درجہ دوم کی رقتیں مربع کامل ہیں۔
(اس ثبوت کا دفعہ ۲۶۱ کے ثبوت کے ساتھ مقابلہ کرو)

(۳) منحنی ن جسم طہ + قی جب طہ = رک لفاف

$$\text{ن} + \text{قی} = \text{ر}$$

ہے جہاں ن، قی، ر محدودوں کے تفاعل ہیں اور طہ متبدل ہے۔

فرض کرو کہ $t = \text{مس طہ} ، تب$

$$\text{جہم طہ} = \frac{1-t^2}{1+t^2} ، \text{جب طہ} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\therefore n = \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = r$$

$$\text{یا } n(1-t^2) + 2t = r(1+t^2)$$

یعنی $t^2(1-r) + 2t = r(1+n)$ ۔
لفاف کی مساوات یہ شرط معلوم کرنے سے حاصل ہوگی کہ اس
مساوات میں t کی قیمتیں مساوی ہیں۔

$$\text{پس لفاف ہے } t^2 = (1+n)(1-r)$$

یا $n + t^2 = r$ (۲)
یہ جواب یاد رکھنے کے قابل ہے، اگرچہ طالب علم کو چاہئے کہ ہر صورت
میں بالعموم پورا عمل کرے جو اوپر دیا گیا ہے۔

مشق

۵۔ لفافوں کا طریقہ استعمال کرنے سے ثابت کرو کہ خط مستقیم

$$\text{لاجم طہ } r + \text{ماجب طہ } b = \text{منحنی } \frac{a}{r} + \frac{b}{r} = \text{اکو مس}$$

کرتا ہے جہاں طہ متبادل ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم
 $r + \text{لاجم طہ} + b = \text{ماجب طہ} = \text{ج کا لفاف } r + \text{لا } b = \text{ج اے}$

۷۔ ایک ملحقہ خط مستقیم پر ایک ثابت نقطہ سے عمود کھینچا
گیا ہے اور اس عمود کا پایہ ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع
ہوتا ہے، خط مستقیم کا لفاف معلوم کرو۔

[نقطہ مفروضہ کو مبدأ مانو اور فرض کرو کہ ثابت خط مستقیم ہے
 $لا + لا = ۰$ ، اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو $لا + لا + م + م + ا = ۰$
 اور $لا + لا = ۰$ کے نقطہ تقاطع کو مبدأ سے ملائے۔ پھر اس کے
 لئے شرط معلوم کرو کہ یہ خط، $لا + لا + م + م + ا = ۰$ پر عمود ہو۔ جواب
 قطع مکانی ہو گا، دیکھو دفعہ ۱۴۵]
 (۸) $لا + لا$ و $م + م$ دو ثابت خطوط مستقیم ہیں اور ایک متحرک خط $لا + لا + م + م + ا = ۰$
 جو ان خطوں کو $لا$ اور $م$ پر قطع کرتا ہے اس طرح حرکت کرتا ہے
 کہ $لا + لا + م + م + ا = ۰$ و $لا + لا = ۰$ و $م + م = ۰$ ثابت کرو کہ خط مذکور
 کا لفاف مکانی ہے۔

۲۶۰۔ عام لفاف۔ یہ بات قابل غور ہے کہ دفعات ۲۵۳-
 ۲۵۹ میں لافول پر جو بحث کی گئی ہے وہ ہر قسم کے منحنیوں پر حاوی
 ہے اور محض دو سرے کے منحنیوں تک محدود نہیں۔
 نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر منحنی کی مساوات میں متبدل $م$ کی قوت ۲ سے
 زیادہ ہو تو (کم از کم نظری طور پر) لفاف کی مساوات یہ شرط معلوم
 کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے کہ اس مساوات میں $م$ کی دو اصلیں
 مساوی ہیں۔

مثال۔ مکانی $لا + لا = ۰$ کے عمادوں کا لفاف معلوم کرو۔
 عماد کی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$لا + لا = ۰ \quad م + م + ا = ۰ \quad م + م + ا = ۰$$

مساواتوں کے مسائل کی رو سے اگر $م + م + ا = ۰$ ، $م + م + ا = ۰$ اس مساوات کی
 اصلیں ہوں تو $م + م + ا = ۰$

$$م + م + ا = ۰ \quad م + م + ا = ۰ \quad م + م + ا = ۰$$

$$م + م + ا = ۰ \quad م + م + ا = ۰$$

لفاف کے لئے ص کی دو قیمتیں مساوی ہونی چاہئیں، فرض کرو کہ

$$\text{تب } ص^۱ = ص^۲ \quad ص^۱ + ص^۲ = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

$$ص^۱ + ص^۲ = ص^۳ \quad (۲ - لا) / لا \dots \dots \dots (۲)$$

$$ص^۱ = ص^۲ = - لا / ما \dots \dots \dots (۳)$$

مساوات (۱) کے ذریعہ ص کو ساقط کرنے سے

$$ص^۱ - ص^۲ = ص^۳ \quad (۲ - لا) / لا \text{ یا } ص^۱ = (۲ - لا) / لا$$

$$- ص^۲ = - لا / ما \text{ یا } ص^۲ = لا / ما$$

ص کو ساقط کرنے سے ہمیں لفاف کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\left(\frac{۲ - لا}{لا} \right) = ص^۱ = \left(\frac{لا}{ما} \right) \text{ یا } ص^۲ = (۲ - لا) / ما$$

نوٹ۔ کسی منحنی کے عمادوں کے نظام کے لفاف کو منحنی کا پیرچہ کہتے ہیں۔

مشق

۹۔ خط مستقیم $ص^۱ - لا - ص^۲ + ص^۳ = ۰$ کا لفاف معلوم کرو جہاں

ص تبدیل ہے۔

۲۶۱۔ اگر خط مستقیم $لا + ص + ص^۲ + ۱ = ۰$ میں سرل اور ص اس ربط

$$لا + ۲ = ص + ص^۲ + ص^۳ + ص^۴ + ص^۵ + ص^۶ + ص^۷ + ص^۸ + ص^۹ + ص^{۱۰} = ۰$$

کے ذریعہ باہم منسلک ہوں تو خط مذکور کا لفاف ایک مخروطی ہوگی۔
پہلے ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ اس نظام کے کتنے خط نقطہ (لا، ما) میں
گزرتے ہیں۔

[نقطہ مفروضہ کو مبدأ مانو اور فرض کرو کہ ثابت خط مستقیم ہے
 $لا + لا = ۰$ ، اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو $لا + صم + ما = ۱ = ۰$
 اور $لا + لا = ۰$ کے نقطہ تقاطع کو مبدأ سے ملائے۔ پھر اس کے
 لئے شرط معلوم کرو کہ یہ خط $لا + صم + ما = ۱ = ۰$ پر عمود ہو۔ جواب
 قطع مکانی ہوگا، دیکھو دفعہ ۱۲۵]

(۸) $لا$ و $ما$ دو ثابت خطوط مستقیم ہیں اور ایک متحرک خط $لاب$
 جو ان خطوں کو $لا$ اور $ب$ پر قطع کرتا ہے اس طرح حرکت کرتا ہے
 کہ $لا + لا + ما + مہ + وب$ مستقل ہے ثابت کرو کہ خط مذکور
 کا لفاف مکانی ہے۔

۲۶۰۔ عام لفاف۔ یہ بات قابل غور ہے کہ دفعات ۲۵۳-
 ۲۵۹ میں نفاول پر جو بحث کی گئی ہے وہ ہر قسم کے نسخیوں پر حاوی
 ہے اور محض دوسرے درجہ کے نسخیوں تک محدود نہیں۔
 نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر نسخی کی مساوات میں متبدل مہ کی قوت ۲ سے
 زیادہ ہو تو (کم از کم نظری طور پر) لفاف کی مساوات یہ شرط معلوم
 کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے کہ اس مساوات میں مہ کی دو اصلیں
 مساوی ہیں۔

مثال۔ مکانی $ما = م$ $لا$ کے عمادوں کا لفاف معلوم کرو۔
 عماد کی مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$ما = ص لا - ۲ لا ص - لا ص + ص (لا - لا) + ما = ۰$
 مساواتوں کے مسائل کی رو سے اگر $ص$ ، $م$ ، $م$ اس مساوات کی
 اصلیں ہوں تو $ص + ص + ص = ۰$

$ص + ص + ص = ص (لا - لا) / لا$

$ص + ص = ص / ما$

لفاف کے لئے صم کی دو قیمتیں مساوی ہونی چاہئیں، فرض کرو کہ

$$\text{تب } ص_1 = ص_2 + ص_3 + \dots + ص_n = 0 \quad (۱)$$

$$ص_1 + ص_2 + \dots + ص_n = 0 \quad (۲)$$

$$ص_1 - ص_2 = 0 \quad (۳)$$

مساوات (۱) کے ذریعہ صم کو ساقط کرنے سے

$$ص_1 - ص_2 = 0 \quad (۱)$$

$$ص_1 - ص_2 = 0 \quad (۲)$$

صم کو ساقط کرنے سے ہیں لفاف کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\left(\frac{ص_1 - ص_2}{ص_3} \right) = 0 \quad (۱)$$

نوٹ۔ کسی منحنی کے عمادوں کے نظام کے لفاف کو منحنی کا پیریمیٹر کہتے ہیں۔

مشق

۹۔ خط مستقیم صم لا۔ صم ما + ج =۔ کا لفاف معلوم کرو جہاں

صم متبدل ہے۔

۲۶۱۔ اگر خط مستقیم ل لا + ص ما + ا = میں سرل اور ص اس ربط

$$ل + ص + ب + ص + گ + ل + ف + ص + ج = 0$$

کے ذریعہ باہم منسلک ہوں تو خط مذکور کا لفاف ایک مخروطی ہوگی۔
پہلے ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ اس نظام کے کتنے خط نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔

پس لازماً $ل + لا + م + ما + ا = ۱۰$
 اور $لا + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۲۰$
 اب اگر ہم دوسری مساوات کو پہلی مساوات کی مدد سے متجانس بنائیں
 تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$لا + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۲۰$
 $۲ - ۲ (گ + ل + م) (ل + لا + م) (ج + ل + لا + م) = ۰$
 (دیکھو حصہ اول دفعہ ۳۸)

یہ مساوات نسبت $ل : م$ میں درجہ دوم کی مساوات ہے اور اس کی
 دو اصلیں ہیں۔

اب اگر نسبت $ل : م$ کی قیمت معلوم ہو تو خط کی سمت متعین ہو جاتی ہے
 پس $(لا، ل)$ میں سے گزرنے والے خط کی دو سمتیں نسبت $ل : م$ کی
 دو سمتوں سے حاصل ہوتی ہیں، لہذا بالعموم $(لا، ل)$ میں سے دو خط
 گزرتے ہیں۔

لفاف معلوم کرنے کے لئے ہمیں اس امر کے لئے شرط معلوم کرنی
 چاہئے کہ یہ دو خط ایک دوسرے پر منطبق ہوں یعنی $ل : م$ کے لئے درجہ
 دوم کی جو مساوات اوپر درج کی گئی ہے اس کی اصلیں مساوی ہوں۔
 اب درجہ دوم کی یہ مساوات یوں بھی لکھی جاسکتی ہے

$لا (۲ - گ + لا + ج + لا) + ۲ (م - گ - م) - ف (لا + ج + لا + م) = ۰$
 $+ م (ب - ۲ - ف + م + ج + م) = ۰$

لہذا اصولوں کے مساوی ہونے کی شرط یہ ہے

$(لا - گ + لا + ج + لا) (ب - ۲ - ف + م + ج + م) = (م - گ - م) (لا + ج + لا + م)$
 یا $(لا + ج + لا) (ب - ۲ - ف + م + ج + م) = (م - گ - م) (لا + ج + لا + م)$
 $+ (ج + لا - گ) (۲ + لا + م) (ن - گ - ج) = ۰$

لام اور ما میں دوسرے درجہ سے بڑے درجہ کی نہیں کٹ جاتی ہیں۔
پس نفاث ایک مخروطی ہے جس کی مساوات یہ ہے

$$(بج - فن) لا + ۲ لا ما (ن گ - ج ه) + ما (ج و - گ) =$$

مثال ۱۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوط
مستقیم پر اس کے مقطوعوں کا حاصل جمع مستقل رہتا ہے ثابت کر دو کہ
یہ خط ہمیشہ ایک مکانی کو مس کرتا ہے۔

مفروضہ خطوط مستقیم کو محدودوں کے محور مانو اور خط مستقیم کی مساوات
ل لا + م ما - ا = ۱۔ فرض کرو

تب محوروں پر کے مقطوعے $\frac{1}{ل}$ اور $\frac{1}{م}$ ہیں

$$اب \quad \frac{1}{ل} + \frac{1}{م} = \text{مستقل} = عہ (فرض کرو)$$

$$\text{یعنی عہ ل - م - ل - م} = ۰$$

پس ل اور م میں یہ درجہ دوم کا ربط ہے اور حسب سابق یہ خط ایک
مخروطی کو مس کرتا ہے۔ نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے والے
دو خطوط مستقیم کی سمتیں مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہیں

$$\text{عہ ل - م - (ل + م) (ل لا + م ما) = ۰ یا ل لا + ل م (لا + ما - عہ) + م ما = ۰}$$

شرط انطباق یہ ہے

$$(لا + ما - عہ) = ۳ لا ما یا لا - ۲ لا ما + ما - ۲ عہ ما + عہ = ۰$$

یہ مساوات صریحاً مکانی کو تعبیر کرتی ہے اور اسکی شکل ذیل کی صورت میں بھی تبدیل
ہو سکتی ہے

$$لا لا + لا ما + ما عہ = ۰$$

پس مکانی مذکور محدودوں کے محوروں کو مس کرتا ہے۔
مثال ۲۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُن عمودوں
کا حاصل ضرب جو دو ثابت نقطوں سے اس پر کھینچے جائیں مستقل رہتا
ہے، ثابت کرو کہ یہ ایک مخروطی کو مس کرتا ہے۔

مفروضہ نقطوں کے خط وصل کو 'ا' کا محور مانو اور فرض کہ تقاطع معلوم
'ا' ب' بالترتیب (ج، 'ا') اور (ب، 'ج') ہیں، محور قائم ہیں۔

خط ل + لا + م + نا = ا پر کے عمود ہیں

$$\frac{ل + ج + ا}{\sqrt{ل + م + ا}} \text{ اور } \frac{ل + ج + ا}{\sqrt{ل + م + ا}}$$

پس $\frac{ل + ج + ا}{\sqrt{ل + م + ا}} = \text{مستقل} = \text{ب' (فرض کرو)}$

$$\text{ب' (ل + م + ا)} + ل + ج = ا$$

چونکہ یہ ل اور م میں درجہ دوم کی مساوات ہے اس لئے لفاف
ایک مخروطی ہے۔

اس لفاف کی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہمیں مساوات درجہ دوم

$$\text{ب' (ل + م + ا)} + ج + ل - (ل + لا + م + ا) = ۰$$

میں ل کی قیمتوں کو مساوی بنانا چاہئے۔

مساوات بالا کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$ل + (ب' + ج - لا) - ل + م + لا + م + (ب' - ا) = ۰$$

اور لفاف کی مساوات ہے

$$(ب' + ج - لا) (ب' - ا) = لا + لا + ب' + ا (ب' + ج) = ب' (ب' + ج)$$

$$\text{یعنی } \frac{لا}{ب+ج} + \frac{ا}{ب} = ۱$$

پس لفاف ایک ناقص ہے جس کے محوروں کے لمبوں $ا+ب+ج$ اور $ب$ ہیں اور جس کے مابین کے نقاط مذکور ہیں۔

مشقیں

۱۰۔ اگر محدودوں کا حاصل ضرب $(ب+ج)$ ہو تو اسی طرح ثابت کر دیجئے کہ لفاف قطع زائد ہے جس کے اس کے نقاط مذکور ہیں۔

باب نوزدہم پر متفرق مثالیں

۱۱۔ ایک خط مستقیم دو ثابت خطوط مستقیم کے ساتھ ملکر مستقل رقبہ کا ایک مثلث بناتا ہے، ثابت کرو کہ اول الذکر خط کا لفاف ایک زائد ہے جس کے متقارب مذکورہ بالا خطوط مستقیم ہیں۔

۱۲۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو محوروں پر اس کے مقطوعوں کا فرق مستقل رہتا ہے، ثابت کرو کہ حرکت خط کا لفاف قطع مکانی ہے۔

۱۳۔ ایک دائرہ لا کے محور پر لگتا ہے، اس کا لفاف معلوم کرو۔

۱۴۔ ج ن اور ج ق ایک ناقص کے مزدوج قعر ہیں، اس خط کا لفاف معلوم کرو جو ن اور ق کے معینوں کے وسطی نقاط کو وصل کرتا ہے۔

۱۵۔ خط مستقیم $ا = م + لا + ز$ اور $ا + م + ج = م$ ب کا لفاف معلوم کرو جہاں م متغیر ہے۔

۱۶۔ ایک مکانی محدودوں کے محوروں کو مس کرتا ہے اور دونوں کی مسادات $ا + لا + ب = ا$ ہے، لفافوں کے طریقہ سے ثابت کرو کہ

خط مستقیم لالہ + ب مایہ لہ / (لہ + ا) ہمیشہ منہی کو مس کرتا ہے خواہ لہ کی قیمت کچھ ہی ہو۔
۱۷۔ ثابت کرو کہ وہ سب خطوط جو ہم کو مختلف قیمتیں دینے سے

سادات (لاجم عم + ماجب عم) = رجم عم + ب جب عم سے حاصل ہوتے ہیں سب کے سب ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں۔
۱۸۔ شق ماقبل کی مدد سے ایک ثابت مخروطی کے دو علی القوائم تماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق دریافت کرو۔
۱۹۔ اگر ایک ناقص کے دو تماس ایک ہم مرکز دائرہ کے محیط پر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ثابت کرو کہ ان کا وتر تماس ایک اور ناقص کو مس کرتا ہے۔

۲۰۔ ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُن عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ جو دو ثابت نقطوں سے اس پر دکائے جائیں مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم کا لفاف قطع ناقص ہے۔
۲۱۔ کئی نقطوں سے ایک متحرک خط مستقیم عمود دکائے گئے ہیں، اگر ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ اس خط کا افاف قطع ناقص ہے۔

۲۲۔ ایک ناقص کے دو نقاط ن اور ق پر کے تماس علی القوائم ہیں، ثابت کرو کہ ن ق ایک ثابت ہم مرکز ناقص کو مس کرتا ہے۔
۲۳۔ ایک ناقص کا وتر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا وسطی نقطہ ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہوتا ہے، ثابت کرو کہ اس وتر کا لفاف قطع مکافئ ہے۔
۲۴۔ اگر کتاب آٹا ایک ورق اس طرح موڑا جائے کہ اس کا ایک کونہ مقابل کے کسی ایک ضلع پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ شکل کے خط کا لفاف قطع مکافئ ہے۔

باب ہستم

موسیقی تقسیم

۲۶۲۔ موسیقی صفت - تعریف - ایسے نقطوں کی کسی تعداد کو جو ایک
خداست تقسیم پر واقع ہوں نقطوں کی صفت کہتے ہیں -
چار نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' موسیقی صفت میں ہوں گے اگر ان میں
سے دو نقطے باقی دو نقاط کے درمیانی فاصلہ کو داخلا اور خارجاً ایک ہی
نسبت سے تقسیم کریں

یعنی $\frac{ا ج}{ب د} = \frac{ا د}{ب ج} \dots \dots \dots (۱)$
مثلاً فرض کرو کہ ج اور د خط 'ا' ب کو داخلا اور خارجاً ایک ہی نسبت
سے تقسیم کرتے ہیں

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$$

شکل ۹۲

تب 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ایک موسیقی صفت بناتے ہیں اور نقاط ج 'د' کا
زوج نقاط 'ا' 'ب' کے زوج کا موسیقی مزدوج کہلاتا ہے -
۲۶۳۔ اگر نقاط ج اور د نقاط 'ا' اور ب کے موسیقی مزدوج ہوں
تو 'ا' اور ب نقاط ج اور د کے موسیقی مزدوج ہوں گے -

کیونکہ حسب مفروض $\frac{ا ج}{ج ب} = \frac{ا د}{ب د}$ جہاں فاصلوں کی علامتوں کو ملحوظ رکھا گیا ہے، اس سے

$$\frac{ا ج}{ا د} = \frac{ج ب}{ب د}$$

یعنی ا اور ب خط ج د کو داخل اور خارجاً ایک ہی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔
نتیجہ صریح۔ نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کا باہمی ربطیوں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{ا ج \times ب د}{ا د \times ب ج} = ۱ = ۱ \dots \dots \dots (۲)$$

کیونکہ $\frac{ا ج \times ب د}{ا د \times ب ج} = ۱$ اور $ا ج = ج ب$ ۔

یہ نتیجہ یاد رکھنا چاہئے۔ شمار کنندہ میں نقطوں کی ترتیب وہی ہے جس میں کہ یہ خط پر واقع ہوتے ہیں اور نسب نماییں پہلا نقطہ تو وہی ہے لیکن باقی نقطوں کی ترتیب الٹ دی گئی ہے۔ مثلاً

$$\left\{ \begin{array}{c} ا ج ب د \\ ا د ب ج \end{array} \right\}$$

اوپر کے متکافی ربط کے لحاظ سے ہم اکثر اوقات یوں کہینگے کہ نقطوں کے دو زوج موسیقی ہیں۔

۴۶۴۔ ایک خط پر نقطوں کے دو موسیقی زوج ہیں، اگر ان کے فاصلے اس خط پر کے کسی نقطہ سے ناپے جائیں تو ان فاصلوں کا باہمی ربط دریافت کرو۔



فرض کرو کہ وہ نقطہ جس سے سب فاصلے ناپے گئے ہیں وہ ہے اور
 و، ب، ج، د کے طول بالترتیب لا، لام، لائم، لائم ہیں۔
 (یہ کہنے کی ضرورت نہیں کہ جو فاصلے ایک سمت میں ناپے جائیں گے
 وہ مثبت ہوں گے اور جو مقابل سمت میں ناپے جائیں گے وہ منفی
 ہوں گے)

$$\text{تب} \quad \frac{\text{اج}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{اد}}{\text{ب د}}$$

ا ب ا ج = لا - لائم، ج ب = لا - لائم وغیرہ
 پس ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{\text{لا} - \text{لائم}}{\text{لا} - \text{لائم}} = \frac{\text{لا} - \text{لائم}}{\text{لا} - \text{لائم}}$ کیونکہ بالعموم
 کوئی فاصلہ مثلاً ا د کے لا کو ا کے لا سے تفریق کرنے سے
 حاصل ہوتا ہے وغیرہ وغیرہ۔

پس مساوات بالا سے (لا - لائم) (لا - لائم) - (لا - لائم) (لا - لائم) =
 یا ضرب دیجانے اور رقوم کو اکٹھا کرنے سے

$$۲ (لا لا + لا لائم) - (لا لائم - لا لائم - لا لائم - لا لائم) = ۰$$

۲ (لا لائم + لا لائم) = (لا لا + لا لائم) (لا لائم + لا لائم) (۳)
 نتیجہ صریح - برعکس اس کے جب یہ ربط پورا ہو تو

$$\frac{\text{لا} - \text{لائم}}{\text{لا} - \text{لائم}} = \frac{\text{لا} - \text{لائم}}{\text{لا} - \text{لائم}}$$

اور نقطوں کے زوج ا، ب اور ج، د موسیقی ہوں گے۔

پس اگر نقطہ و کے ایک مقام کے لئے ربط (۳) پورا ہو تو چار نقطہ
 موسیقی ہوں گے اور نقطہ و کے ہر مقام کے لئے یہ ربط درست ہوگا۔

۲۶۵۔ خاص صورتیں۔ نقطہ و کو خاص مقامات پر فرض کر کے سے ہم دفعہ باقیل کے نتیجہ سے دو نہایت ضروری ربط حاصل کر سکتے ہیں۔
(۱) فرض کرو کہ نقطہ و، اریہ منطبق ہوتا ہے،
تب لا =۔ اور ربط ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{لا} + \frac{1}{لا} = \frac{2}{لا} \quad (لا + لا) = لا$$

پس رب اوسط موسیقی ہے و ج اور د کا۔ اس سے موسیقی اوسطوں اور موسیقی صفوں کا تعلق ظاہر ہوتا ہے۔

پس و ج، و ب، ا د موسیقی ترتیب میں ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ نقطہ و، رب کا وسطی نقطہ ہے، تب لا =۔ لا
یعنی لا + لا =۔ اور مساوات (۳) کی بائیں جانب صفر ہو جاتی ہے۔

$$پس لا لا + لا لا =۔ یا لا لا = لا$$

لہذا اگر ج اور د، و اور ب کے موسیقی مزدوج ہوں اور و وسطی نقطہ ہو و رب کا تو

$$و ج \times و د = و ب$$

نہر سچا ج اور د، و کے ایک ہی جانب واقع ہیں ورنہ و ج \times و د کوثری ہو جاتا ہے۔ اس سے و اور ب کے لحاظ سے ج کے موسیقی مزدوج نقطہ کو معلوم کرنے کا نہایت آسان طریقہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال۔ ایک خط پر کے چار نقطوں کے فاصلے اس پر کے ایک نہایت نقطہ سے بالترتیب ۵، ۱، ۸، ۱، ۹ اکائیاں ہیں، معلوم کرو کہ ان میں سے کوئی زوج دوسرے زوج کا موسیقی مزدوج ہے یا نہیں۔

ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ ان میں سے کسی نقطہ سے باقی نقطوں کے فاصلوں کو اس طرح ترتیب دیا جاسکتا ہے کہ یہ فاصلے سلسلہ

موسیقی میں ہوں (مقابلہ کرو (۱) سے)
 پہلے نقطہ سے دوسرے، تیسرے، چوتھے نقطوں کے فاصلے بالترتیب
 $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ہیں، اگر ان کو سلسلہ موسیقی میں ترتیب دینا ممکن
 ہو تو ظاہر ہے کہ ان کے شکافیوں یعنی $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ کو سلسلہ
 حسابیہ میں ترتیب دینا ممکن ہوگا، لیکن مؤخر الذکر اپنی موجودہ ترتیب
 میں ہی سلسلہ حسابیہ میں ہیں، لہذا پہلے اور تیسرے نقطہ کا زوج دوسرے
 اور چوتھے نقطہ کے زوج کا سبقتی مزدوج ہے اور برعکس اس کے [دیکھو (۱)]
 ۲۶۶۔ موسیقی صفت کی خاص صوتیں۔ لاتنا ہی پر کا نقطہ۔
 اگر نقاط α ، β اور γ دوسری زوج ہوں اور γ ، α ، β کا
 وسطی نقطہ ہو تو δ لاتنا ہی پر ہوگا۔

کیونکہ α ، β ، γ = ج ب اس لئے لازماً δ مساوی ہوگا δ ب
 کے اور یہ صرف اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ دونوں مقادیریں
 لامتناہی ہوں کیونکہ ان مقادیر کا فرق محدود ہے۔

پس α ، β کے وسطی نقطہ کا موسیقی مزدوج اس خط پر لاتنا
 فاصلہ پر واقع ہوتا ہے (دیکھو دفعت ۱۹۹، ۲۰۰)

یہ امر اس طرح غور کرنے سے بھی واضح ہو جاتا ہے۔ اگر α ، β
 کا وسطی نقطہ ہو تو α ، β = γ (دفعہ ۲۶۵) کیونکہ γ ، α
 کے جتنا قریب آتا جاتا ہے δ اتنا ہی اس سے پرے ہوتا ہے
 اور بالآخر جب γ ، α پر منطبق ہو جاتا ہے تو δ لاتنا ہی پر چلا جاتا ہے
 الفاظ میں اس اہم نتیجہ کو ہم یوں بیان کر سکتے ہیں۔

ایک خط پر کے کوئی دو نقطے ان کا درمیانی نقطہ اور اس خط کا لاتنا
 پر کا نقطہ چاروں ملکر ایک موسیقی صفت بناتے ہیں۔

مشقیں

۱۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۲۶۵، صورت اول میں δ ج اوسط موسیقی ہے

$$لا + لا + ۲ ب = لا + ج = اور لا + لا + ۲ ب = لا + ج =$$

سے معلوم ہوتے ہیں، اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ یہ دونوں زوج موسیقی

ہوں۔ فرض کرو کہ پہلی مساوات کی اصلیں لا، لا، ہیں اور دوسری کی لا، لا، تب ہم جانتے ہیں کہ

$$۲ (لا + لا + لا + لا) = (لا + لا) (لا + لا) \quad (\text{دفعہ ۲۶۴})$$

لیکن مسائل مساوات درجہ دوم کی رو سے

$$لا + لا = ۲ ب / لا اور لا + لا = ۲ ب / لا$$

$$لا + لا = ج / لا، لا + لا = ج / لا \quad (\text{یوٹوریل الجبر، دوم، ۱۵۶})$$

$$\text{لہذا } ۲ \left(\frac{ج}{لا} + \frac{ج}{لا} \right) = \left(\frac{۲ ب}{لا} - \right) \left(\frac{۲ ب}{لا} - \right)$$

$$یا لا + ج + لا + ج = ۲ ب + ۲ ب (۴)$$

نتیجہ سرسج - نقطوں کا ایک ایسا زوج معلوم کیا جاسکتا ہے جو دو اور معلومہ زوجوں میں سے ہر ایک کا موسیقی مزدوج ہو۔

فرض کرو کہ معلومہ زوج مساواتوں لا + لا + ۲ ب = لا + ج = اور لا + لا + ۲ ب = لا + ج = سے حاصل ہوتے ہیں۔

تب اگر دو نقاط جو لا + لا + ۲ ب = لا + ج = سے تعمیر ہوتے ہیں پہلے زوج کے موسیقی ہوں تو لا + ج + ج = لا + ۲ ب = اور اگر یہ دو نقطے دوسرے زوج کے موسیقی مزدوج ہوں تو لا + ج + ج = لا + ۲ ب =۔

ان دو مساواتوں سے لا، ب، ج کی نسبتیں حسب معمول (یوٹوریل الجبر، حصہ دوم، دفعہ ۶۸) حاصل ہو سکتی ہیں۔

مشقیں

۸۔ ایک خط پر کے ایک ثابت نقطہ و سے نقاط ل اور ب کے
فاصلے مساوات

$$لا - ۵ = لا + ۳ = ۰$$

سے حاصل ہوتے ہیں، اگر وج = ۱ تو د معلوم کرو جہاں ج
اور د مزدوج ہیں ل اور ب کے۔

(فرض کرو کہ د = ۵، تب جو نقطے درجہ دوم کی دو مساواتوں
لا - ۱) (لا - ۵) = اور لا - ۵ = لا + ۳ = ۰ سے تفسیر ہوتے ہیں

موسیقی مزدوج ہونے چاہئیں)

۹۔ ق کی دو قیمت معلوم کرو کہ نقاط کا زوج
لا + ۲ - لا = ۱ = ۰، لا + ۴ - لا = ق = ۰

کا موسیقی مزدوج ہو۔

۱۰۔ نقطوں کا ایسا زوج معلوم کرو جو ذیل کے دو زوجوں کا موسیقی
مزدوج ہو

$$لا = ۱، لا = ۳ اور لا = ۴، لا = ۶$$

۱۱۔ نقطوں کا وہ زوج جو دونوں زوجوں

$$لا + ۲ = لا + ۴ = ۰ اور لا + ۲ = لا + ۴ = ۰$$

کے لحاظ سے موسیقی ہے مساوات

$$(لا + لا) (لا + لا) - (لا + لا) (لا + لا) = ۰$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۶۹۔ د = ۵، و = ۵ اور و = ۵، ولہ شعاعوں کے دو زوج ہیں،
ایک خط مستقیم ان سے ل اور ب اور ج، د پر ملتا ہے، اگر ل اور ب

اور ج 'د موسیقی مزدوج ہوں تو ثابت کرو کہ ہر خط مستقیم جو ان شعاعوں سے ملتا ہے ان پر موسیقی نسبت سے تقسیم ہو جاتا ہے۔
و، ب اور ج 'د موسیقی نقطے ہوں گے اگر

$$\frac{اج \times ب د}{ود \times ب ج} = 1 \dots\dots\dots (دفعہ ۲۶۳)$$

نقطہ د سے اس خط پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ اس عمود کا طول ع ہے تب

$$اج \times ع = ۲ \Delta و ج$$

$$= و د \times و ج جب و د ج$$

اور اس لئے

$$اج = و د \times و ج جب و د ج / ع$$

$$ب د ' و د اور ب ج کیلئے$$

بھی اسی طرح کی قیمتیں حاصل

ہوتی ہیں۔

پس مساوات بالا میں درج

کرنے سے

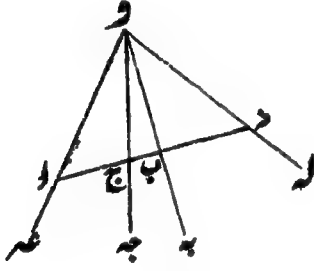
$$(و د \times و ج جب و د ج / ع) \times (و ب \times و د جب ب و د / ع)$$

$$=$$

$$(و د \times و د جب و د د / ع) \times (و ب \times و ج جب ب و ج / ع)$$

$$جس سے \frac{جب و د ج \times جب ب و د}{جب و د د \times جب ب و ج} = 1 \dots\dots\dots (۵)$$

اب اس شرط میں قطع کرنے والے خط کے مقام کی کوئی تخصیص نہیں بلکہ یہ محض شعاعوں کے باہمی میلان پر موقوف ہے، پس اگر یہ ایک قاطع خط کے لئے درست ہو تو یہ سب خطوں کے لئے درست ہوگی۔
۲۷۰۔ پنسل۔ تعریف۔ اگر کوئی خطوط مستقیم ایک ہی نقطہ میں سے گذریں تو یہ ایک پنسل بناتے ہیں۔



شکل ۹۴

اس نقطہ کو راس کہتے ہیں اور ہر خط کو منفرداً پنسل کی شعاع کہتے ہیں۔ مثلاً و، ا، ج، د، ب، و د (ر شکل ۹۲ میں) ایک پنسل بناتے ہیں، اس قسم کی پنسل کو مختصراً و (ا ج ب د) لکھا جاتا ہے۔ موسیقی پنسل - تعریف - اگر خطوط مستقیم کے دو زوج وعد، و ب اور و ج، و د، کسی خط (اور اس لئے حسب سابق سب قاطع خطوط) سے موسیقی نقطوں پر ملیں تو خط مستقیم کے ان زوجوں کو موسیقی زوج کہتے ہیں یا اصطلاحاً ما۔ یوں بیان کرتے ہیں کہ چار خطوط وعد، و ب، و ج، و د، موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

نظام پنسل - تعریف - اگر ایک خط کے کسی نقطہ ن کو ایک ثابت نقطہ و سے ملایا جائے اور د، ۱۰ محدودہ کسی اور خط سے ن پر ملے تو ن کو نقطہ ن کا ظل کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح ۱ - اس سے ظاہر ہے کہ اگر چار نقطے ایک موسیقی صنف بنائیں تو کسی اور خط پر ان کے ظل بھی موسیقی صنف بنائینگے۔ نتیجہ صریح ۲ - ایک موسیقی صنف کے نقطوں کو کسی راس کے ساتھ ملائے گا جو پنسل حاصل ہوتی ہے وہ موسیقی ہوتی ہے۔

۲۷۱ - صورت خاص - دفعہ ماقبل کے نتیجہ سے ہم ایک اور نتیجہ مستنبط کرتے ہیں جس کے ذریعہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کوئی مفروضہ پنسل موسیقی ہے یا نہیں۔

فرض کرو کہ قاطع خط ا ب ج د، ولہ کے متوازی ہے، تب د لائنائی ہوگا اور بنا بریں ج، ا ب کا وسطی نقطہ ہوگا پس اگر چار خط موسیقی پنسل بنائیں اور ان میں سے ایک خط کے متوازی ایک قاطع خط کھینچا جائے تو باقی تین خطوں میں سے دو خطوں کے درمیان قاطع کا جو حصہ منقطع ہوتا ہے اس کی تعریف تیسرا خط کرتا ہے اس کا عکس بھی درست ہے۔ مثلاً قطع زائد کے ماس کا وہ حصہ جو اس کے متقاربوں کے

درمیان منقطع ہوتا ہے نقطہ تماس پر دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوتا ہے اور چونکہ تماس مزدوج قطر کے متوازی ہوتا ہے اس لئے ثابت ہوا کہ قطع زائد کے کوئی دو مزدوج قطر متقاربوں کے لحاظ سے موسیقی مزدوج ہوتے ہیں۔

تحلیلی طریقہ سے بھی اس کی تصدیق ہو سکتی ہے قطع زائد

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱$$

کے متقارب ہیں $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱$ مزدوج قطر ہوں گے اگر اور خطوط $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱$ ۔

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱ \text{ (ریگوشق ۱۰، صفحہ ۳۵)}$$

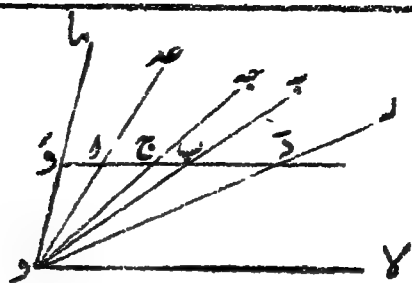
لیکن دفعہ ۲ کی رو سے یہ شرط وہی ہے جو پوری ہونی چاہئے تاکہ یہ خط متقاربوں کے لحاظ سے موسیقی مزدوج ہوں۔
۲ = ۲ اس امر کے لئے شرط معلوم کرو کہ مساواتوں

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱ \text{ اور } ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱$$

سے خطوط مستقیم کے جو دو زوج تعبیر ہوتے ہیں وہ باہم موسیقی ہوں۔ فرض کرو کہ خطوط کا پہلا زوج $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱$ ہے اور دوسرا زوج $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱$ ہے۔

نیز فرض کرو کہ خط $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱$ سے $۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱$ سے بالترتیب ۱ لا ، ۲ لا ، ۳ لا ، ۴ لا ہر پلٹا ہے تب ۱ لا اور ۲ لا موسیقی ہیں، ۳ لا اور ۴ لا کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں پہلی مساوات میں ۱ لا رکھنا چاہئے، لہذا ۱ لا ، ۲ لا مساوات قبل کی اصلیں ہیں

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} + ۳ \text{ لا} + ۴ \text{ لا} = ۱$$



شکل ۹۵

اسی طرح سے دوسرا زوج 'وج'، 'و' د مساوات ذیل کی اصلیں ہیں

$$\text{لا} + \text{ا} = ۲ \text{ م} - \text{لا} + \text{ب} = ۰$$

لہذا دفعہ ۲۶ کی رو سے شرط مطلوبہ ہے

$$\text{لا} + \text{ب} = \text{ا} + \text{ب} - ۲ \text{ م} = ۰ \dots\dots\dots (۵)$$

نتیجہ صریح - فرض کرو کہ خطوں کا دوسرا زوج حوالہ کے محور ہیں

$$\text{یعنی } \text{لا} = \text{ب} = ۰$$

اس صورت میں شرط بالا ہو جاتی ہے م م = ۰۔ لیکن چونکہ م

صفر نہیں ہے اس لئے م = -

یہ خطوط 'لا' + 'ب' = 'ا' = ۰۔ محوروں کے لحاظ سے موسیقی

خط ہیں۔

اس سے ظاہر ہے کہ خط 'ما' - 'م' لا = - اور 'ما' + 'م' لا = ۰۔ موسیقی ہیں

کیونکہ (ن کی مسا۔ ت ہے

$$\text{ما} - \text{م} = \text{لا} = ۰$$

جس میں لا 'ما' کی رقم نہیں ہے۔

نتیجہ صریح ۲ - اگر خطوط مستقیم کے دو زوج موسیقی ہوں اور ایک زوج

کے خط علی القوائم ہوں تو یہ خط دوسرے زوج کے درمیانی زاویوں کی

تصنیف کریں گے
 علی القوائم خطوط مستقیم کے زوج کو محدودوں کے محور فرض کر دے تب
 دوسرے خط $و$ اور $ب$ کا $==$ ہیں، اور یہ صریحاً محوروں کے ساتھ
 مساوی زاویے بناتے ہیں۔

مشقیں

۱۲۔ اگر $و$ $ب$ $ج$ ایک مثلث ہو اور $د$ $ب$ $ج$ کا وسطی نقطہ ہو تو
 خطوط $و$ $ب$ $ج$ اور قاعدہ کے متوازی $و$ میں سے گزرنیوالا
 خط موسیقی پینل بناتے ہیں۔

۱۳۔ دو خط اور ان خطوں کے درمیانی زاویہ کے داخلی اور خارجی
 منصف موسیقی پینل بناتے ہیں۔

(کسی قاطع کے لئے یہ امر اقلیدس ص ۶، ش ۳ سے ظاہر
 ہے) یا یوں غور کریں کہ اگر دو منصفوں میں سے ایک منصف کے
 متوازی خط کھینچا جائے تو یہ خط ایک مثلث مساوی الساقین قطع کرتا
 ہے اور چونکہ منصف علی القوائم ہیں اس لئے دوسرا منصف اس مثلث
 کے قاعدہ کی نصف کرتا ہے)

۱۴۔ تین خط $و$ $و$ $ب$ $ج$ دے ہوئے ہیں، ایک اور خط
 $و$ دے ایسا کھینچنا مقصود ہے کہ $و$ $و$ $ب$ اور $و$ $ج$ $و$ د موسیقی
 مزدوج ہوں، $و$ د کے کھینچنے کے لئے ذیل کے عمل کی صداقت
 ثابت کرو، $و$ $ج$ پر کوئی نقطہ $ن$ لو اور $ن$ $م$ $ن$ $ل$ بالترتیب
 $و$ $ب$ کے متوازی کھینچو جو $و$ $و$ سے بالترتیب
 $م$ اور $ل$ پر ملیں اور پھر $و$ $م$ $ل$ کے متوازی کھینچو۔

۱۵۔ ایک متحرک خط مستقیم کسی چار ثابت خطوط مستقیم
 $و$ $ب$ $ج$ $د$ پر ملتا ہے،
 ثابت کرو کہ $و$ $ب$ $ج$ $د$ کی قیمت قاطع خط کے تمام مقامات
 $و$ $ب$ $ج$ $د$ پر

کے لئے وہی ہے۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ خطوط $ما = ۳$ لا اور $ما = ۴$ لا کا زوج اور $ما = ۵$ لا، $ما = ۱۱$ لا کا زوج موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

(ثابت کرو کہ جن نقطوں پر یہ خط لا = ۱ سے ملتے ہیں وہ موسیقی صف بناتے ہیں)

۱۷۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کے زوج لا + ۲ لا ما۔ ما۔ اور لا + ۳ لا ما۔ ما۔ موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۸۔ خواہ محور قائم ہوں یا مائل، خطوط مستقیم $ما = ۴$ لا اور $ما = ۵$ لا محوروں کے ساتھ موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۹۔ لہ کی وہ قیمت معلوم کرو کہ خطوط مستقیم کے زوج

$۳ لا + لا ما۔ ما۔$ اور $لا + لہ لا ما + ما۔$

موسیقی پنسل بنائیں۔

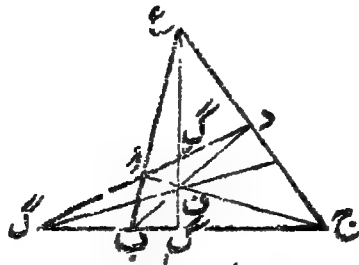
۲۰۔ اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ جو خط خیالی زوج لا + ۲ ما۔ کے ساتھ موسیقی پنسل بناتے ہیں وہ علی القوائم ہیں۔

۲۱۔ اگر حوالہ کے محور ایک دوسرے سے زاویہ سہ بنائیں تو ثابت کرو کہ جو خط خیالی زوج لا + ۲ لا ما جم سہ + ما۔ کے ساتھ موسیقی پنسل بنائیں ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔

۲۲۔ ذواربعۃ الاضلاع کی موسیقی خاصیت۔

ایک ذواربعۃ الاضلاع $ا ب ج د$ ہے، $ا ب ج$ اور $ا د گ$ پر ملتے ہیں، $ا ب$ و $ج د$ نقطہ $ع$ پر اور $ب د$ و $ا ج$ نقطہ $ف$ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ خطوں کے زوج $گ ع$ ، $گ ف$ اور $گ ا$ ب موسیقی ہیں۔

$گ ب ج$ اور $گ ا د$ کو حوالہ کے محور مانو،



شکل ۹۶

اگر گ، د = ع، گ، ب = ب، گ، ج = ج، د، گ = د، گ
تو ہم خطوط مستقیم کی مساواتیں حسب ذیل لکھ سکتے ہیں

و ب ہے $\frac{1}{ب} + \frac{1}{د} = 1$ و ج ہے $\frac{1}{ج} + \frac{1}{د} = 1$
ن د ہے $\frac{1}{د} + \frac{1}{ب} = 1$ ب د ہے $\frac{1}{ب} + \frac{1}{د} = 1$
گ، ع خطوط و ب، ج د کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے نیز میڈا اس پر
واقع ہے اس لئے اس کی مساوات ہے

$$\left(\frac{1}{ب} + \frac{1}{د} - 1 \right) - \left(\frac{1}{ج} + \frac{1}{د} - 1 \right) = 0$$

$$\text{یا } \left(\frac{1}{ب} - \frac{1}{ج} \right) + \left(\frac{1}{د} - \frac{1}{د} \right) = 0$$

اسی طرح سے آخری دو مساواتوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ گ، ف کی
مساوات ہے

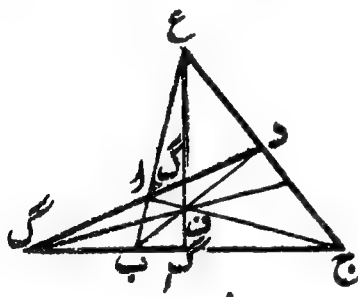
$$\left(\frac{1}{ب} - \frac{1}{ج} \right) - \left(\frac{1}{د} - \frac{1}{د} \right) = 0$$

چونکہ گ، ع اور گ، ف کی مشترک مساواتیں لا ما والی رقم
نہیں ہے اس لئے خط گ، ع، گ، ف محوروں کے ساتھ ملکر ایک
موسیقی پیش بناتے ہیں۔ (دیکھو دفعہ ۲۷۲، نتیجہ صریح ۱)

ذیل کے نتائج صریح کو طالب علم متقین سمجھ کر خود ثابت کرے۔
 نتیجہ صریح ۱۔ اسی طرح سے ع، د، ب، ع، د، ج کو محور ماننے سے
 ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ازواج ع، ف، ا، ع، گ اور ع، ا، ب، ع، د، ج
 موسیقی ہیں۔

نتیجہ صریح ۲۔ ف کو مبدأ اور ب، ف، د اور ا، ف، ج کو محور مانکر
 ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ازواج ف، ع، ا، ف، گ اور ف، ا، ب
 موسیقی ہیں۔

۳۔ مکمل ذواربعۃ الاضلاع اور اس کے خواص۔
 پوری شکل کو مکمل ذواربعۃ الاضلاع کہتے ہیں۔ ایسی شکل کھینچنے کا
 آسان طریقہ یہ ہے کہ پہلے ہم خطوط ع، ا، ب اور ع، د، ج کھینچیں
 جو ع پر ملتے ہیں، پھر تقاطع خطوط گ، ب، ج اور گ، د، ج کھینچیں۔



شکل ۹

اس کو غور سے دیکھ لینا طالب علم کیلئے
 مفید ثابت ہوگا کیونکہ اگر ایسا
 کرنے کی بجائے نقطے ا، ب، ج، د
 پہلے سے لئے جائیں تو اکثر اوقات
 شکل کے مختلف خطوط تقریباً متوازی
 ہونگے اور شکل بہت بڑی بن جائیگی۔
 یہ بات بھی توجہ کے قابل ہے کہ

نقاط ع، ف، ا، گ درحقیقت ذواربعۃ الاضلاع ا، ب، ج، د کے
 لحاظ سے متشکل ہیں کیونکہ ان میں سے ہر ایک نقطہ، نقطہ تقاطع ہے
 ایسے دو خطوط کا جو ا، ب، ج، د میں سے دو رؤسوں کو ملانے سے
 پیدا ہوں۔

اگر نقاط تقاطع ع، ف، ا، گ میں سے کسی ایک میں سے حسب ذیل
 چار خطوط کھینچے جائیں تو یہ خط موسیقی پیشل بناتے ہیں۔
 (۱) پہلے دو خط ایک تقاطع (مثلاً ف) کو باقی دو نقاط تقاطع

گماعت سے وصل کرتے ہیں

(۲) دوسرے دو خط اسی نقطہ تقاطع کو ابتدائی ذوار بقتہ الاضلاع کے نقاط (ب، ج، د) سے ملاتے ہیں۔

۲۷۵ - دفعہ ۲۷۳ کے نتائج سے ہمیں لحاظ و تقاط معلوم ہوا ہے اور ۵ کے نقطہ گ کے موسیقی مزدوج معلوم کرنے کی ایک آسان اور دل چسپ ترکیب حاصل ہوتی ہے۔

کوئی نقطہ گ لہ اور گ ج، گ د، گ گ کو ملاؤ تب ج
میں سے کوئی خط ج لکھیں جو گ گ سے ف پر اور گ د سے
ا پر لے، د ف کو ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ یہ گ ج سے
باہر لے۔ اس کے بعد با کو

یہ ج د سے ع یر ملے۔

تبع مطلوبہ نقطہ ہے، جیسا کہ باقیوں سے ظاہر ہے۔

ممکن ہے کہ طالب علم یہ خیال کرے کہ مندرجہ بالا عمل طویل اور پیچیدہ ہے اور کوئی اس قسم کا عمل

یہ عجبہ ہے اور کوئی اس قسم کا
 کرپنے ج د کی و پر تنصیف کی جائے اور پھر و گ x و ع = و د بنا یا جا
 زیادہ موزوں ہے۔ درحقیقت جو عمل ہم نے اوپر بیان کیا ہے وہ علم چند
 میں سب سے زیادہ ضروری ہے اور یہ اس بنا پر کہ اس میں صرف رولرٹنی پیکر
 سے کام لینا پڑتا ہے یہ امر دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ طالب علم اقلیدسی غلوکی
 جانچ کرے اور دیکھے کہ ان سب میں پرکار سے کام لینا پڑتا ہے۔
 امثلہ دفعہ ۲۷۲، مشق ۱ میں زیادہ آسان عمل بتایا گیا ہے۔

مشق

۲۲۔ شکل ۹۷ کے مکمل ذرا بچتہ الاضلاع میں اگر $\angle C$ مفروضہ ہو

ب ج سے گم پرے تو ثابت کرو کہ نقاط کے زوج ب، ج اور گ، گ موسیقی ہیں۔
یہ ثابت کرنے کے بعد کہ پنسل ع (ب ف ج گ) موسیقی ہے اس سے مستنبط کرو کہ ف (گ ج گ ب) بھی موسیقی ہے۔ (گ ج ع ب) موسیقی ہے۔

(یہ سب امور اس اصول سے ظاہر ہوتے ہیں کہ موسیقی پنسل کو ہر ایک خط موسیقی صاف پر قطع کرتا ہے)
۲۷۶۔ مختصر و طویل کے لحاظ سے دو مزدوج نقطے ان نقطوں کے موسیقی مزدوج ہوتے ہیں جن پر اول الذکر نقطوں کو ملاسنے والا خط مخروطی سے ملتا ہے۔

باقاعدہ اگر دو دور بیابانہ نقطے ہوں کہ ان میں سے ہر ایک کا قطبی دوسرے میں سے گزرے، اور اب مخروطی سے نقاط ان اور ق پرے تو نقاط اب اور ن، ق کے زوج موسیقی ہو جائیں گے۔
فرض کرو کہ مخروطی

لا + لا + ہ (لا + ما + ب + ما + گ + لا + ف + ما + ج) =
ہے، نقطہ لا (لا، ما) ہے اور نقطہ ب (لا، ما) ہے، تب لا کا قطبی ہے

لا + لا + ہ (لا + ما + ب + ما + گ + لا + ف + ما + ج) =
اور چونکہ نقطہ ب (لا، ما) اس پر واقع ہے اس لئے

لا + لا + ہ (لا + ما + ب + ما + گ + لا + ف + ما + ج) =
اب جن نسبتوں میں مخروطی خط لا ب کو تقسیم کرتی ہے مشہور و معروف نسبتی مساوات درجہ دوم

ک + س + ۲ ک ل م + ل س = [دفعہ ۳۶]

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں

م = ا + ل + ل + ص (ل + ل + ل + ل) - ب + ل + ل + ل + گ (ل + ل + ل) + ف + ل + ل + ل + ج

س = و لا + ا + ب + ا + ب + ا + گ + ل + ف + ج

[illegible]

اور کرا کا سفر ہے، اس لئے دونوں لیٹن سداوی اور مختلف اعلیٰ
ہیں یعنی 'ا' اور 'ق'، 'ا' کو داغاً اور غاراً ایک ہی نسبت سے
تقسیم کرتے ہیں، اس سے نتیجہ ثابت ہوا۔

۷۷۔ متبادل ثبوت۔ فرض کرو کہ ω اور λ شکل (۹۹) دونوں کا معلومہ ہیں، ω کو میدان ω اور λ کو λ کا محور فرض کرو، نیز فرض کرو کہ مخروطی کی مساوات ہے

اولاً + ۲ء لا + ما + ب + ۱ء + ۲ء گ + لا + ۲ء ف + ما + ج =۔

اگر مخروطی ولا سے ن اور ق پر ملے تو ن اور ق کے طول معلوم کرنے کے لئے ہمیں اوپر کی مساوات میں ماکو صفر بنانا چاہئے۔ پس 'ن' اور ق مساوات

ولا' + ۲ گ + لا + ج = .

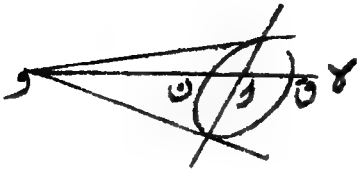
کی اصلیں ہیں، لہذا مسائل کے مسائل کی رو سے

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{b}}$$

لیکن مبداء (و، ک، ج) کا قطعی گ لا + ف + ج = ہے اور چونکہ یہ حسب مفروض ا میں سے گزرتا ہے اس لئے و کی قیمت مساوات گ لا + ج = سے حاصل ہوتی ہے

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{10} \therefore$$

ان دونوں نتیوں کا مقابلہ کرنے سے ہم فوراً دیکھ سکتے ہیں کہ



$$\frac{1}{و} + \frac{1}{ن} = \frac{2}{ق}$$

جس سے ظاہر ہے کہ و اور ن
نقاط ن اور ق کے موسیقی

شکل ۹۹

مزدوج ہیں (دیکھو دفعہ ۲۶۵)

اس نتیجہ کے یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔

موسیقی نقطہ میں سے گزرنے والا خط اس نقطہ، منحنی اور اس نقطہ کے
قطبی نسبت موسیقی نسبت پر تقسیم ہو جاتا ہے۔

مثلاً اگر ایک ثابت نقطہ و سے ایک خط کھینچا جائے جو
منحرفی سے ن اور ق پر ملے اور اس خط پر ایک اور نقطہ لے ایسا لیا جا
کہ و اور وسط موسیقی ہو و ن اور ق کے درمیان، تو جیسے خط
و ن ق کے گرد گھومتا ہے لے ایک خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے۔
کیونکہ وہ نقطہ جس پر خط و ن ق، و کے قطبی سے ملتا ہے۔
مسئلہ بالا خط و ن ق کی موسیقی تقسیم کرتا ہے پس لے ہمیشہ و کے
قطبی پر رہتا ہے۔

مشقیں

۲۳۔ اس کی تصدیق کرو کہ نقطے (۱، ۱)، (۳، ۳)، (۴، ۴) منحرفی

لا + لا + ما + ما = م کے لحاظ سے مزدوج نقطے ہیں جس نسبت سے
ان کو ملانے والا خط منحنی سے تقسیم ہوتا ہے اس کے لئے مساوات
درجہ دوم دریافت کرو اور اس سے تصدیق کرو کہ تقسیم موسیقی ہے۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ اگر ایک منحنی، خط مستقیم و ب کی موسیقی نسبت سے

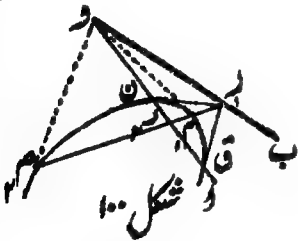
تقسیم کرے تو ا کا قطبی ب میں سے گزرتا ہے۔

۲۵۔ ا، ب، ج، د ایک مخروطی پر چار نقطے ہیں، ا ب، ب ج، ج د سے ع پر، ب ج، ج د سے گ پر، ا ج، ج د سے ف پر ملتا ہے، نیز ع ف، ا د سے گ پر اور ب ج سے گ پر ملتا ہے۔ مکمل ذواربعتہ الاضلاع کے خواص سے ثابت کرو کہ نقطوں کے زوج گ، گ اور د، ا، زوج گ، گ اور ج، ب موسیقی ہیں۔ اس سے مستنبط کرو کہ گ کا قطبی گ اور گم میں سے گزرتا ہے اور اس لئے یہ خط ع ف ہے۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ شق ماقبل میں مثلث ع ف گ ایسا ہے کہ اس کا ہر ایک ضلع مخروطی کے لحاظ سے مقابل کے رأس کا قطبی ہے۔

ایسے مثلث کو مخروطی کے لحاظ سے 'ثلث مزدوج بالذات' کہتے ہیں۔
۲۷۔ مخروطی کے لحاظ سے دو مزدوج خط اور ان کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے مماس موسیقی پیدل بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ و، ا، ب منحنی کے لحاظ سے مزدوج ہیں یعنی ایسے خط ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کا قطب دوسرے پر واقع ہوتا ہے، تب اگر نقطہ و سے مماس و م، و م، کیپنے جائیں تو ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ خطوط و، ا، ب اور و م، و م، باہم موسیقی ہیں۔



فرض کرو کہ خط و، ا مخروطی سے ن اور ق پر ملتا ہے، تب سب مفروض و، ا کا قطب و ب پر واقع ہوتا ہے، لیکن و، ا کا قطب

ن اور ق پر کے مماسوں کا نقطہ تقاطع ہے، اس لئے یہ مماس و ب پر (یعنی نقطہ ب پر) ملتے ہیں دیکھو شکل۔

اب ب کا قطبی ن ق نقطہ و میں سے گزرتا ہے

ہذا م، م، جو و کا قطب ہے نقطہ لہ میں سے گزرتا ہے
فرض کر دو کہ م، م، ن ق سے لہ پر ملتا ہے، تب حسب دفعہ ۲۷۶
لہ اور لہ مزدوج ہیں م، اور م، کے۔

پس و لہ، و لہ خطوط و م، و م، کے ساتھ موسیقی پنل بناتے ہیں
(دفعہ ۲۷۰) یعنی خطوط و لہ، و ب اور و م، و م، کے موسیقی
ہیں۔

۲۷۹۔ متبادل ثبوت۔ اب ہم دفعہ مابقی کے مسئلہ کا بھی
تجلیلی ثبوت مندرج کرتے ہیں تاکہ مسئلہ مذکور کی اہمیت اور اس طریقہ
کی خوبی پوری طرح طالب علم کے ذہن نشین ہو جائے۔
فرض کر دو کہ مزدوج خط محدودوں کے محور ہیں اور اس لئے و مبداء ہے۔
چونکہ محور بالعموم مخروطی

لا + لا + لا + ب + ما + گ + لا + ف + ما + ج =۔

کے لحاظ سے مزدوج نہیں ہوتے، اس لئے ضرور ہے کہ سروں کے درمیان
کوئی شرط پوری ہو، اس شرط کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں یہ دیکھنا چاہیے
کہ کن حالات کے ماتحت لا =۔ کا قطب ما =۔ پر واقع ہوتا ہے۔
اب لا، ما کا قطب ہے

لا (لا + لا + لا + گ) + ما (لا + ب + ما + ف) + گ + لا + ف + ما + ج =۔

ہذا لا =۔ کا قطب مذکور کرنے کی مساواتیں ہیں

لا + ب + ما + ف =۔ اور گ + لا + ف + ما + ج =۔

اگر یہ نقطہ ما =۔ پر واقع ہو تو

لا + ف =۔ اور گ + لا + ج =۔

ہذا ف + گ = ج =۔ (۱)

اب وہیں سے گزرنے والے ماس ہیں

(گ + لا + ن + ما + ج) = ج (لا + لا + ۲ + لا + ما + ب + ما + گ + لا + ن + ما + ج)

دفعہ ۱۳۸

یا لا (و ج - گ) - ۲ لا ما (ن گ - ج ص) + ما (ب ج - ن ا) یہ۔
لیکن لا ما دانی رٹم (۱۱) کی رو سے صفر ہے پس دفعہ ۲۷۲ کی رو سے
خورا یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ماسوں کا زوج اور محور موسیقی پنسل
بناتے ہیں۔

۳۸۰۔ اوپر سے مسئلہ کی مثال کے طور پر کسی مرکز دار تراش کے مزدوج
قطروں پر غور کر دو۔

مرکز میں سے گزرنے والے مزدوج خط مزدوج قطر ہوتے ہیں کیونکہ کسی
قطر کا قطب وہ نقطہ ہے جہاں اس قطر کے سروں پر کے ماس ایک
دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ لیکن چونکہ یہ دونوں ماس مزدوج قطر کے
متوازی ہیں، اس لئے یہ مزدوج قطر کے متساوی پر کے نقطہ پر ملتے
ہیں (دیکھو دفعہ ۲۰۰) لہذا کسی قطر کا قطب اس کے مزدوج قطر پر واقع
ہونا ہے، پس حسب تشریح بالا مزدوج قطر مرکز میں سے گزرنے والے
مزدوج خط ہیں۔ نیز مرکز میں سے گزرنے والے ماس متقارب ہیں اس لئے
معلوم ہوا کہ مزدوج قطر دوں کا زوج اور متقارب موسیقی پنسل بناتے ہیں

باب ستم پر متفرق مثالیں

۲۷۔ ایک خط پر کے ایک نقطہ معلومہ سے

لا، لا + ۲ لا ما، لا + لا، لا + ما

فاصلوں پر نقطے لئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پہلا زوج دوسرے کا موسیقی
۳۸۔ ثابت کرو کہ وہ نقطے جہاں ایک شدت کے راسی زاویہ کے

داخلی اور خارجی نصف قاعدہ سے ملتے ہیں قاعدہ کے سروں کے موسیقی مزدوج ہیں۔

۲۹۔ وہ شرط معلوم کرو کہ خطوط مستقیم کے زوج

لا۔ ما۔ = اور لا۔ لا۔ + ۲ = لا۔ ما۔ + ب۔ ما۔ =

موسیقی پیشل بنائیں۔

۳۰۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کا صرف ایک ہی زوج ایسا ہو سکتا

ہے جو دو اور مفروضہ زوجوں میں سے ہر ایک کا موسیقی مزدوج ہو۔

۳۱۔ اگر محور قائم ہوں اور خطوط لا۔ لا۔ + ۲ = لا۔ ما۔ + ب۔ ما۔ کے درمیانی زاویہ کے داخلی اور خارجی نصف لا۔ لا۔ + ۲ = لا۔ ما۔ + ب۔ ما۔

ہوں تو ثابت کرو کہ لا۔ ب۔ = اور لا۔ ب۔ + ب۔ = ۲ = ۲ = ۲ = ۰ =

ان مساواتوں کو لا۔ اور ب۔ کے لئے حل کرنے سے منصفوں کی مساویات حاصل کرو۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ محور لا۔ پر کے دو نقطے جن کا فاصلہ مبدأ سے عہ اور یہ

ہے بلحاظ دو اور نقطوں کے جن کے فاصلے مساوات لا۔ لا۔ + ب۔ لا۔ + ج۔ =

سے حاصل ہوتے ہیں موسیقی ہوں گے اگر ا۔ عہ بہ + ب۔ (عہ + یہ) + ج۔ =

(مساوات درجہ دوم بناؤ جس کی اصلیں عہ اور یہ ہوں)

۳۳۔ اگر خطوط ما۔ = لا۔ ما۔ = ۲ = لا۔ اور خطوط لا۔ لا۔ + ۲ = لا۔ ما۔ + ب۔ ما۔ = موسیقی ہوں تو ثابت کرو کہ

لا۔ ما۔ + ۲ = (ما۔ + ۲) + ب۔ =

۳۴۔ ثابت کرو کہ تناواری الاضلاع کے قطر اور مقابل کے اضلاع کے

وسطی نقاط کو ملانے والے خط موسیقی پیشل بناتے ہیں۔

۳۵۔ ایک موسیقی صف لا۔ ب۔ ج۔ د۔ اور ایک نقطہ و دونوں معلوم

پس ثابت کرو کہ اگر ب میں سے ایک خط و د کے متوازی کھینچا جائے تو یہ خط و د اور ج سے ایسے نقطوں پر ملیگا جو ب سے متساوی الفاصل ہوں گے۔

یہ بھی ثابت کرو کہ اگر د ب ج د ایک اور موسیقی صنف ایسی ہو کہ خط و د ب ج ج ایک نقطہ پر ملیں تو خط د د بھی اسی نقطہ میں سے گزرے گا۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کے زوج ما = ص لا، ما = ص لا اور ما = ص لا، ما = ص لا صرف اس وقت موسیقی ہوں گے

$$\text{جبکہ } \frac{۱۴-۱۳}{۱۴-۱۳} \times \frac{۱۴-۱۳}{۱۴-۱۳} = ۱$$

(ان نقطوں کو جن پر کہ اوپر گئے خط لا = ا سے ملے ہیں موسیقی ثابت کرو)

۳۷۔ اگر خطوط مستقیم کے ازواج ذیل ما = ص لا، ما = ص لا، ما = ص لا،

$$\text{ما = ص لا موسیقی ہوں تو ازواج ما = لا ب ج د، ما = لا ب ج د، ما = لا ب ج د}$$

$$\text{ما = لا ب ج د، ما = لا ب ج د، ما = لا ب ج د}$$

جاں و ب ج د کوئی مستقل ہیں۔ اگر ناقص کے چار قطر موسیقی پنسل بنائیں تو ان سب کے مزدوج قطر بھی موسیقی پنسل بنائیں گے۔

۳۹۔ ایک دائرہ کے اندر ایک مثلث بنایا گیا ہے، دائرہ کا ایک قطر کھینچا گیا ہے جو مثلث مذکور کے ایک ضلع پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ باقی دو اضلاع (محدودہ بشرط ضرورت) اس قطر کو موسیقی نسبت سے تقسیم کرتے ہیں۔

۴۰۔ محدودوں کے مبداءوں میں سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں اور

ان میں سے کوئی خط و ن ق ص ایک ثابت خط مستقیم لا + ص + ما + س =۔
 سے ن پر اور ایک ثابت مخروطی لا + لا + ہ لا + ب + ما + گ لا + ن + ما + ج =۔
 سے نقاط ق اور ص پر ملتا ہے، اگر نقطہ را یا س ہو کہ ن، ق، ر، ص
 چار موسیقی نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ رک کا طریق مساوات ذیل سے
 تغیر ہو سکتا ہے

س (لا + ہ لا + ب + ما + گ لا + ن + ما + ج) = (ل + لا + م + ما + س)
 x (گ لا + ن + ما + ج)

آزمائشی پرچہ نمبر ۶

۱۔ اگر س = لا + ہ لا + ب + ما + گ لا + ن + ما + ج =۔
 اور س = لا + ہ لا + ب + ما + گ لا + ن + ما + ج =۔
 تو ثابت کرو کہ اس مخروطی کی مساوات جو س =۔ اور س =۔ کے
 چار نقاط تقاطع میں سے گزرتی ہے س + لہ س =۔ کی شکل ہے۔
 اگر محور قائم ہوں تو ثابت کرو کہ ان چار نقاط مشترک کے ایک
 دائرہ پر واقع ہونے کے لئے یہ شرط پوری ہونی چاہئے
 ہ : ہ = ل : ل = ب : ب = ن : ن
 ۲۔ ثابت کرو کہ وہ مخروطی جو مساوات

لا + ہ لا + ب + ما + گ لا + ن + ما + ج =۔
 سے تغیر ہوتی ہے کہاں طہ تغیر زاویہ ہے ہمیشہ دو ثابت نقطوں
 میں سے گزرتی ہے۔

۳۔ خطوط لا = ا، ما = ۲، لا = ما =۔ کے راسوں میں سے جو
 دائرہ گزرتا ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ اگر $عہ = ۱$ ، $بہ = ۲$ ، $چہ = ۳$ ۔ خطوط مستقیم کی مساواتیں ہوں تو بتاؤ کہ $عہ بہ بہ بہ$ سے کیا تعبیر ہوتا ہے، ثابت کرو کہ مساوات

لا ما = لا (لا / لا + ما / ب - ا) سے ایک مخروطی تراش تعبیر ہوتی ہے جو محدودوں کے محوروں کو مس کرتی ہے۔

۵۔ خطوط مستقیم کا جو قیل مساوات

$$۱۰۔ ۲ (لا + ۳ ما + ۱) + ۳ (۲ لا + ۴ ما + ۵) + ۴ = ۱۰$$

سے تعبیر ہوتا ہے اس کو مس کرنے والے منحنی (نفات) کا مقام اور نوعیت معلوم کرو۔

۶۔ ایک ناقص کے محور بلحاظ محل کے معلوم ہیں، اگر محوروں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو اس کا نفات معلوم کرو۔

۷۔ ”برہیچہ“ کی تعریف کرو اور مکافی کے برہیچہ کی مساوات دریافت کرو۔

۸۔ ایک خط مستقیم و لا زیر چار موسیقی نقطے ن، ق، ر، س واقع ہیں جن میں سے ازواج ن، ر اور ق، س ایک دوسرے کے موسیقی مزدوج ہیں۔ یہ سب نقطے و کے ایک ہی جانب واقع ہیں، ثابت کرو کہ

$$(ون + ور) (وق + وس) = ۲ ون \times و ر + ۲ وق \times و س$$

۹۔ ا، ب، ج، د ایک سطح مستوی پر کے چار نقطے ہیں اور ا، ب اور د، ج ایک دوسرے کو گ پر، ب، ج اور ا، د ایک دوسرے کو ع پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ خطوط ع (ب گ ج ف) موسیقی پنسل بناتے ہیں۔ ایک خط مستقیم پر تین نقطے دے ہو گئے ہیں، محض پٹری کے ذریعہ

عمل کرنے سے ان میں سے ایک نقطہ کا موسیقی مزدوج بنحاط باقی ماندہ دو نقطوں کے معلوم کرو۔

۱۰۔ اگر ایک نقطہ سے ایک خط مستقیم کھینچا جائے جو ایک مخروطی کو اور نیز مخروطی کے لحاظ سے جو نقطہ مذکورہ کا قطبی ہے اس کو قطع کرے تو ثابت کرو کہ یہ خط نقطہ مذکورہ 'مخفی' اور نقطہ مذکورہ کے قطبی پر موسیقی نسبت سے تقسیم ہو جاتا ہے۔

بتاؤ کہ مسئلہ ما قبل کیا ہو جاتا ہے جبکہ خط مستقیم زائد کے ایک شعاع کے متوازی ہو یا مکافی کی صورت میں اس کے قطر کے متوازی ہو یا نقطہ مذکورہ مخروطی کے مرکز پر واقع ہو۔



باب ہست ویکم

چلیپی (غیر موسیقی) نسبتیں

۲۸۱ - تعریف - اگر ایک خط مستقیم پر چار نقطے 'ا'، 'ج'، 'ب'، 'د' لے جائیں (دیکھو شکل ۱۰۱) تو نسبت

$$\frac{ا ج \times ب د}{د د \times ب ج}$$

کو صفت 'ا ج ب د' کی غیر موسیقی یا چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اسے اس طرح لکھتے ہیں (ا ج ب د) - علامتوں کے لئے معمولی دستور کو ملحوظ رکھنا چاہئے یعنی ا ج = ج ا

د ب ج ا و

شکل ۱۰۱

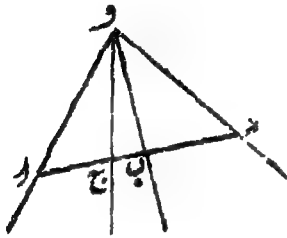
اوپر کی کسر کو لکھنے کا طریقہ بھی یاد رکھا جائے۔ شمار کنندہ میں نقطے اپنی ابتدائی ترتیب میں واقع ہوتے ہیں لیکن نسب نامیں دوسرے اوپر چوتھے نقطے باہم بدل دئے گئے ہیں۔

اسی طرح سے اگر چارے پاس چار متراکز خط و 'ا'، 'ج'، 'ب'، 'د' ہوں (شکل ۱۰۲) تو نسبت

$$\frac{ج ب ا و ج \times ج ب ب د د}{ج ب ا و د \times ج ب ب و ج}$$

$$\frac{ج ب ا و د \times ج ب ب و ج}{ج ب ا و ج \times ج ب ب د د}$$

کو شعاعوں وا، وج، وب، ود کی پزل کی غیر یویتی یا چلیبی نسبت کہتے ہیں اور اسے اس طرح لکھتے ہیں (واج باد) ۲۸۲ - چلیبی نسبتیں تجلیلی ہوتی ہیں - دسے خط واج باد پر ایک عمود کھینچو اور فرض کرو کہ اس کا طول ع ہے، تب



شکل ۱۰۲

$$\text{واج} \times \text{ع} = \Delta ۲ \text{ واج}$$

$$= \text{وا} \times \text{وج} \times \text{جب} \text{ واج}$$

$$\text{یا واج} = \frac{\text{وا} \times \text{وج} \times \text{جب} \text{ واج}}{\text{ع}}$$

اسی قسم کی قیمتیں باد، اد، ب ج کے لئے حاصل ہو سکتی ہیں۔
ہند چلیبی نسبت (واج باد)

$$\frac{\text{وا} \times \text{وج} \times \text{جب} \text{ واج} \times \text{وب} \times \text{ود} \times \text{جب} \text{ باد}}{\text{وا} \times \text{ود} \times \text{جب} \text{ اود} \times \text{وب} \times \text{وج} \times \text{جب} \text{ ب وج}} =$$

$$= \frac{\text{جب} \text{ واج} \times \text{جب} \text{ باد}}{\text{جب} \text{ اود} \times \text{جب} \text{ ب وج}} = \text{و (واج باد)}$$

اب فرض کرو کہ کوئی اور قاطع اسی پزل کو واج باد پر کاٹتا ہے۔
تب (واج باد) = و (واج باد)

$$= \text{و (واج باد)} = \text{و (واج باد)}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی چلیبی نسبت کی قیمت تجلیلی سے نہیں بدلتی (تجلیلی کی تعریف کے لئے ملاحظہ ہو دفعہ ۲۷۰ اس قسم کی تجلیلی کو مخروطی تجلیلی کہتے ہیں)

اب ہندسی مخروطات میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ مخروطی تجلیلی کے ذریعہ ایک دائرہ کی تجلیلی سے سب قسم کی مخروطی تراشیں بننے

مکافی، ناقص اور زائد حاصل ہو سکتی ہیں اور برعکس اس کے کسی مخروطی تراش کی تحلیل سے ایک دائرہ حاصل ہو سکتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر چلیبی نسبتوں کی کوئی خاصیت دائرہ کے لئے ثابت نہ ہو، تو وہی خاصیت، ہر قسم کی مخروطی تراشوں کے لئے درست ہوگی۔

چلیبی نسبت کی قیمت کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے، فرض کرو کہ ایک نقطہ پر کے نقاط 'ا، ب، ج، د' اس پر کے ایک ثابت میدان سے بالترتیب فاصلوں 'د، ب، ج، د' پر ہیں۔ تب صریحاً (شکل ۱۰۱)۔

$$\text{راج} \times \text{ب د} = (\text{ا ج} - \text{د}) (\text{ا د} - \text{ب د})$$

$$\text{ا د} \times \text{ب ج} = (\text{د} - \text{ا}) (\text{ج} - \text{ب د})$$

مختفی نہ رہے کہ شکل ۱۰۱ میں ب ج منفرد ہوگا۔ چلیبی نسبت کی اس صورت کو جبکہ یہ نسبت 'ا' کے مساوی ہو موسیقی نسبت کہتے ہیں اور یکھو دفعہ ۲۶۳ نتیجہ صریحاً۔

۳۸۳۔ چار نقطوں کی مختلف چلیبی نسبتیں - ایک خط مستقیم پر چار نقطے دئے ہوئے ہیں، اگر ان کو مختلف ترتیبوں سے لیا جائے تو صریحاً مختلف چلیبی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں ظاہر ہے کہ کل مختلف ترتیبیں ۲۴ ہیں لیکن ان میں سے چلیبی نسبت کی مختلف قیمتیں حاصل نہیں ہوتیں، ذیل کی نسبتوں کی قیمتیں گینے سے اس امر کی آسانی سے تصدیق کی جاسکتی ہے کہ

$$(\text{ا د ب ج}) = (\text{ا ب د ج}) = (\text{ج د ا ب}) = (\text{د ج ب ا})$$

اور اسی طرح سے باقی ترتیبوں کی صورت میں۔ لہذا مختلف ترتیبوں سے صرف ۲۲ ÷ ۲ یعنی ۱۱ مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ہم دیکھنے کے کہ یہ قیمتیں ایک دوسرے سے تعلق

رکھتی ہیں۔
 ہمید یہ = اگر علامتوں کو ملحوظ رکھا جائے تو اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ

$$\begin{aligned} & \text{ا ج} \times \text{ب د} + \text{ا ب} \times \text{د ج} + \text{ا د} \times \text{ج ب} = ۰ \\ & \text{کیونکہ یہ رقم} = (\text{ا د} + \text{د ج}) \text{ب د} + (\text{ا د} + \text{د ج}) \text{ا ج} + \text{ا د} \times \text{ج ب} \\ & = \text{ا د} (\text{ب د} + \text{د ج} + \text{ج ب}) + \text{د ج} (\text{ب د} + \text{ا ج}) + \text{ا د} \times \text{ج ب} = ۰ \\ & \text{کیونکہ ب د} + \text{د ج} + \text{ج ب} = \text{ب د} + \text{ا ج} + \text{د ج} = ۰ \end{aligned}$$

$$\text{ا ب} (\text{ا د ب ج}) = \frac{\text{ا د} \times \text{ب ج}}{\text{ا ج} \times \text{ب د}} = \frac{۱}{\text{ا ج ب د}} \dots (۱)$$

$$\text{ا ب ج د} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ج د}}{\text{ا د} \times \text{ج ب}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{د ج}}{\text{ا د} \times \text{ب ج}} \dots (۲)$$

$$\therefore (\text{ا ج ب د}) + (\text{ا ب ج د}) = \frac{\text{ا ج} \times \text{ب د} + \text{ا ب} \times \text{د ج}}{\text{ا د} \times \text{ب ج}} = ۱$$

(بموجب ہمید یہ بالا)

یا (ا ب ج د) = ۱ - (ا ج ب د)
 اور اسی طرح سے دوسری ترتیبوں کے لئے طالب علم کو بطور مشق کے اس کی تصدیق کرنی چاہئے کہ اگر (ا ج ب د) کی قیمت لہ کے مساوی ہو تو باقی پانچ نسبتوں کی قیمتیں

$$\frac{۱}{لہ} ، ۱ - لہ ، \frac{۱}{لہ} ، \frac{۱}{لہ} ، ۱ - لہ ، \frac{۱}{لہ} \text{ ہوں گی۔}$$

۲۸۴ - مثالیں۔ اگر 'ا ب ج' کے ایک دائرہ کے محیط پر شاہیہ نقطے ہوں اور اس دائرہ پر کاکوئی اور نقطہ ہو تو جلیبی نسبت و (ا ج ب د) کے مقام پر نظر نہیں ہے۔ یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ زوایا ا ج د و ج ب د ب و د اور د و ا کی قیمتیں و کے مقام پر موقوف نہیں ہیں۔ (دیکھو

۱۲۸۔ قیاس میں ۳۱ (۲۱) -
 دائرہ کی تطیل ایک مخروطی تراش میں کرنے سے ہمیں نہایت
 اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ مخروطی پر کے چار ثابت نقطوں کو اس پر
 کے کسی اور نقطہ سے ملانے سے جو پنسل حاصل ہوتی ہے اس کی
 چلیبی نسبت کی قیمت مؤخر الذکر نقطہ کے ہر مقام کے لئے وہی
 رہتی ہے۔

نیز اگر ایک مخروطی کے چار ثابت ماس کچنے جائیں تو کسی
 پانچویں ماس پر ان کے نقاط تقاطع سے جو صاف بنے گی اس کی
 چلیبی نسبت مستقل ہوگی۔

فرض کر دو کہ ایک معلومہ دائرہ پر چار ثابت نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'
 ہیں اور ان پر کے ماس کسی اور نقطہ 'ق' پر کے ماس کو نقاط
 'ل'، 'م'، 'ن' پر قطع کرتے ہیں، اگر دائرہ کا مرکز وہ ہو تو

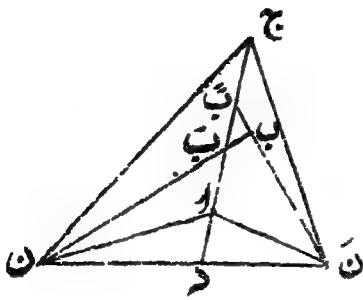
$$\Delta ل و م = \Delta ل و ق = \Delta م و ق = \Delta ا و ب$$

$$- \Delta ا و ب و ق = \Delta ا و ب اور اس لئے$$

مستقل ہے۔

پس پنسل و (ل م ن ر) کے زاوے مستقل ہیں، اس لئے
 پنسل کی چلیبی نسبت مستقل ہے، لہذا صفت کی چلیبی نسبت
 بھی مستقل ہے۔ تطیل کے ذریعہ مسئلہ کی توسیع مخروطی تراشوں کی
 صورت میں بھی ہو سکتی ہے۔

۲۸۵ - اگر دو پنسلوں کی چلیبی نسبتیں مساوی ہوں اور ان کی ایک شعاع
 مشترک ہو تو دونوں پنسلوں کی باقی تین تین شعاعوں میں سے متناظر
 شعاعوں کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوں گے۔
 فرض کر دو کہ پنسلیں (ن ا ب ج) اور (ل ا ب ج) ہیں
 اور ن ا ن کی مشترک شعاع ہے۔



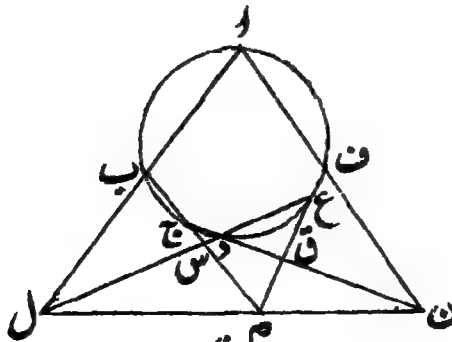
شکل ۱۰۳

نیز متناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع
ا ب ج ہیں، اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ
ا ب ج، ن ب اور ن ب کو دو
مختلف نقاط ب، ب پر کاٹا ہے
نیز فرض کرو کہ ا ب ج، ن ب سے
د پر ملتا ہے، تب چونکہ پسلوں کی
جلیبی نسبتیں مساوی ہیں، اس لئے

$$(د ا ب ج) = (د ا ب ج)$$

جو ناممکن ہے تاہم قیاساً ب اور ب ایک، دوسرے پر منطبق نہ ہوں۔
۲۸۶۔ پاسکل کا مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ یا مخروطی کے اندر کسی
شکل کا سدس بنایا جائے تو مقابل کے اضلاع کے نقاط
تقاطع ایک ہی خط پر واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب ج د ع ف سدس ہے، اور ا ب د ع
ایک دوسرے سے ل پر، ب ج ع ف ایک دوسرے سے
م پر، ج د ف ا ایک دوسرے سے ن پر ملتے ہیں، نیز فرض کرو کہ
ب ج د ع ایک دوسرے کو م پر اور ج د ع ف ق پر
قطع کرتے ہیں۔ ل م، م ن کو ملاؤ



شکل ۱۰۴

غیر موسیقی نسبت م (ل ج د ع) = (ل س د ع) = ب (ل س د ع)
 = ب (ل ج د ع)

اسی طرح سے م (ن ج د ع) = (ن ج د ق) = ف (ن ج د ق)

= ف (ل ج د ع)

لیکن ب (ل ج د ع) = ف (ل ج د ع)

م (ن ج د ع) = م (ل ج د ع)

لیکن چونکہ تین شعاں م ج، م د، م ع دونوں نسبتوں میں متطابق ہیں، اس لئے م ل اور م ن بھی متطابق ہونگے لہذا ل، م، ن ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہیں۔

پاسکل کے مسئلہ سے ہمیں محض پٹری کے ذریعہ پانچ معلوم نقطوں میں سے ایک مخروطی کھینچنے کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ل، ب، ج، د، ع، غروفہ نقطے ہیں، تب شکل ۱۰۴ میں اگر ع میں سے گزرنے والا کوئی خط مخروطی سے دوبارہ ف ن پر ملے تو ل، ب، د، ع اور ب، ج، ع ف ن اور ج د، ا کے نقاط تقاطع ایک ہی خط پر واقع ہونگے۔ پس نقطہ ف معلوم کرنے کا عمل یہ ہے۔

ل، ب اور د ع کو اتنا خارج کرو کہ وہ ایک دوسرے سے ل پر ملیں، اور فرض کرو کہ ب، ج، ع میں سے گزرنے والے خط سے م پر ملتا ہے، ل م کو ملا کر خارج کرو اور فرض کرو کہ ل م محدود ج د محدود سے ن پر ملتا ہے، تب ن ل اور م ع محدودہ کا نقطہ تقاطع ف مخروطی پر کا نقطہ ہوگا۔

چونکہ ع میں سے کئی خط کھینچے جاسکتے ہیں، اس لئے ہم منحنی پر کے کئی نقطے معلوم کر سکتے ہیں اور پھر ان میں سے مخروطی کھینچ سکتے ہیں۔
 درپیا۔ اگر ایک خط د ل پر نقطوں کے تین زوج و، ل اور ب، ب

اور ج، ج ایسے ہوں کہ

$$و ا \times و ا = و ب \times و ب = و ج \times و ج = ک ا$$

تو ان چھ نقطوں میں سے کسی چار کی چلیبی نسبت ان نقطوں کے چار مزدوج نقطوں کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

ولا پر عمود و ما ایسا کہیں جو کہ و ما = ک ا (دیکھو شکل ۱۰۵)

تب و ما = و ا \times و ا اس لئے دائرہ و ما و ا و ما کو مس کرتا ہے، ہذا

$$\Delta و ما و ا = \Delta و ا و ما$$

اسی طرح سے

$$\Delta و ما ب = \Delta و ب ما$$

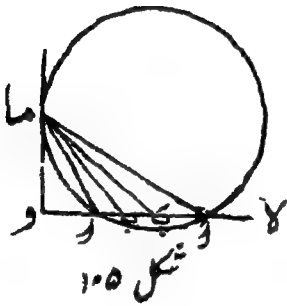
ہذا تفریق کرنے سے

$$\Delta و ما ب = \Delta و ا ب$$

اسی طرح سے $\Delta و ب ما ج = \Delta و ب ما ج$ وغیرہ وغیرہ، پس پنسل ما (و ب ج ج) کے زاوے بالترتیب پنسل ما (و ب ج ج) کے زاویوں سے مساوی ہیں، پس ان پنسلوں کی چلیبی نسبتیں اور اسلئے ان کی صفوں کی چلیبی نسبتیں باہم مساوی ہیں۔

ظاہر ہے کہ نقاط و ا و و اور ب، ب اور ج، ج ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز و ہے ایک دوسرے کے مقلوب ہیں۔

نقاط و ا و و، وغیرہ درپچا کا ایک نظام بناتے ہیں جس کا مرکز و ہے، اگر و لا پر و کے دونوں جانب دو نقاط و، و ایسے



نئے جائیں کہ $وفا = وقت = کا$ تو $ف$ درپچا کے اسکے
کہلاتے ہیں۔

مشقیں

- ۱۔ اگر (ا ب ج د) = ۱ تو ثابت کرو کہ (ا ج ب د) = ۲ اور
(ا ج د ب) = $\frac{1}{2}$
- ۲۔ اگر پنسل و (ا ج ب د) = ۱ تو ثابت کرو کہ پنسل کی دو شعاعیں
ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں (واقعہ ۲۸۲ کو استعمال کرو)
- ۳۔ اگر ا ب ج د کو قطر بان کر دائرے کھینچے جائیں جو ایک دوسرے
کو زادیہ طہ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ نقاط ا ب ج د کی صفوں
کی چھ جلیبی نسبتیں یہ ہیں

$$\frac{مس}{ا} = \frac{قط}{ب} = \frac{ج ب}{ا} = \frac{م م}{ب} = \frac{ج م}{ا} = \frac{ق م}{ب}$$

- ۴۔ اگر دو خط ایک دوسرے سے نقطہ و پر ملیں اور ان پر تین تین نقطے
ا ب ج اور ا ب ج ایسے ہوں کہ (ا ب ج) = (ا ب ج) تو
ثابت کرو کہ خطوط ا ب ج ج ستر اکڑ ہیں۔
- ۵۔ ناقص لا + ۴ = ۱۰۰ پر چار نقاط ا ب ج د ہیں جن کے محدود
بالترتیب (۰، ۱)، (۱، ۰)، (۵، ۰)، (۰، ۳)، (۰، ۱۰) ہیں، اگر ن ناقص پر
کوئی اور نقطہ ہو تو پنسل ن (ا ب ج د) کی جلیبی نسبت دریافت کرو۔
- ۶۔ ایک خط مستقیم پر چار نقطے ا ب ج د دے ہوئے ہیں،
ایک اور نقطہ ن کا طریق دریافت کرو جبکہ زاوے ا ب ن اور
ب ن و مساوی ہوں۔



سوالات کے پرچے

پرچہ سوالات ۱

۱۔ اگر ایک نقطہ کہ نقطہ (ن، ق) سے ملا یا جائے تو اس مانے والے خط کی تعریف خط ل ل + م م + ن = زاویہ قائمہ پر کرتا ہے، اول الذکر نقطہ کے محدود معلوم کرو۔

۲۔ ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک مثلث مساوی الاضلاع کے دو معلوم ضلعوں سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے اور ۲ ج کے مساوی ہوتا ہے، ثابت کرو کہ طریق ایک ناقص ہے، اس کے پاسکوں کا مقام اور اس کا خروج الم مرکز معلوم کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا^2}{ا} + \frac{با^2}{ب} = ۱$ کے کسی نقطہ پر کا محاس ناقص $\frac{لا^2}{ا} + \frac{با^2}{ب} = ک$ (ک < ۱) سے جن نقطوں پر ملتا ہے وہ نقطہ اس سے مساوی الفصل ہیں۔

۴۔ ایک نقطہ معلوم سے ایک ناقص کے عماد کھینچے گئے ہیں جو محور اعظم سے زاوے طہ، طہ، طہ، طہ بناتے ہیں، اگر اس نقطہ کو ناقص کے مرکز کے ساتھ ملانے والا خط محور کے ساتھ زاویہ طہ

بنائے تو ثابت کرو کہ

مس طم + مس طم + مس طم = مس طم

۵۔ چنانچہ مکانی کو رتبہ، محور سے ملتا ہے اس لیے تو یہ کہ مرکز اور وتر خاص کو قطران کر ایک دائرہ لکھنا گیا۔ یہ ثابت ہے کہ مرکز لحاظ اس دائرہ کے مکانی کے تماس کے قطب کے طریق قائم قیاس نہ آتا ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنی لا + ۲ لا ما - ۲ لا ما - ۲ لا ما = ۰ کے متقابل لا + ما - ۱ = ۵ ۶۷ میں منحنی کو مرتبہ کرو۔

۷۔ ایک متغیر دائرہ ایک ثابت خط مستقیم اور ایک ثابت دائرہ دونوں مس کرتا ہے، اس کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۸۔ ایک ناقص کے مزدوج قطروں ج ن، ج ق کے طول کو ب ہیں اور محور لا کے ساتھ ان کے میلان طم، طم ہیں، ثابت کرو کہ لا جب ۲ طم + ب جب ۲ طم = ۰

۹۔ ایک معلومہ خط مستقیم کے کسی نقطہ سے ایک مخروطی تراش کے تماس کھینچے گئے ہیں، اگر ان کے نقاط تماس سے خط مذکور پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ عمودوں کے متکافوں کا مجموعہ یا فرق مستقل ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{1}{لا + ما - ۱} + \frac{1}{لا - ما + ۱} + \frac{1}{لا + ما - ۱} = ۰$$

ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے۔ اس کا اسکے او مرتب معلوم کرو۔

پہرچہ سوالات ۲

۱۔ ایک شش کے دور اُسوں سے ایک نقطہ کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ہمیشہ مساوی ہوتا ہے تیسرے راس سے ان کے فاصلہ سے

۹۔ ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ پر کے دو نقطوں کے معینوں کا مجموعہ
ب ہے، ثابت کرو کہ ان کو ملانے والے وتر کے قطب کا طہ لقی
 $ب' لا + لا' ما = ۲$ و ب ما ہے۔

۱۰۔ ایک مخروطی پر جس کی مسادات $\frac{لا}{ب' لا} + \frac{ما}{ب' ما} = ۱$ ہے
ایک ایسا نقطہ ن لیا گیا ہے کہ ن پر کا عماد ایک ثابت نقطہ
(ص، ک) میں سے گذرتا ہے، ثابت کرو کہ ن ذیل کے منحنی پر واقع
ہوتا ہے

$$\frac{ب' لا - لا' ما}{ص - ما - ک لا} = \frac{لا}{لا - ص} + \frac{ما}{ما - ک لا}$$

پرچہ سوالات ۳

۱۔ وہ شرائط معلوم کرو کہ مسادات

$لا + ب لا + ج ما + د لا + ع ما + ف ن =$
ایک خط مستقیم کو تعبیر کرے۔

۲۔ دائرہ ۱۲۔ ۱۳۔ (جم طہ + ۱۳ جب طہ) + ۵ =
کا نصف قطر اور نیز اس کے مرکز کے قطبی محمد معلوم کرو۔

۳۔ ایک ناقص کی مسادات بلحاظ قائم محوروں کے

$$(لا + ۱) لا + ۲ (ج + لا) لا + (ج + ۱) ما = ف$$

ہے۔ ناقص کا رقبہ دریافت کرو۔

$$۴۔ ناقصوں $\frac{لا}{ب' لا} + \frac{ما}{ب' ما} = ۱$ اور $\frac{لا}{ب' لا} + \frac{ما}{ب' ما} = ۱$$$

کا ایک مشترک ماس معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ ماس اس متوازی الاضلاع

علوم کرو۔

پرچہ سوالات ۴

۱۔ خط مستقیم $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ اور دائرہ ۵ $(لا + ما + ب + لا + ب) = ۹$ اور ب کے تقاطع کو مبدأ کے ساتھ ملانے سے خطوط مستقیم کا جو زوج حاصل ہوتا ہے اس کی مساوات معلوم کر۔ نیز اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ یہ خطوط مستقیم علی التوا نہ ہوں۔

۲۔ دو دائروں کی مساواتیں

$$(لا - ل) + (ب - ما) = ج'$$

$$\text{اور } (لا - ب) + (ما - ل) = ج''$$

ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے باہم مس کرنے کی شرط $ج' = (ل - ب)$ ہے۔

۳۔ ایک ناقص کا محور اصغر ص ہے۔ اس کا ایک ماسکی وتر ناقص ہے، ثابت کرو کہ ص ن اور ص ق کے تقاطع کا طریق قطع زائد ہے۔

۴۔ ایک نقطہ ص سے کسی ناقص کے دو ماس م ن اور ص ق کھینچے گئے ہیں۔ اگر ص کے محدود (حد اک) ہوں تو ثابت کرو کہ حلقہ م ن ق کا رقبہ

$$وب \left(\frac{ص''}{ب} + \frac{ک''}{ب} - ۱ \right) / \left(\frac{ص''}{ب} + \frac{ک''}{ب} \right) \text{ ہے۔}$$

۵۔ اگر قلع کاٹی کے دو عماد ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ایک عماد کا جو حصہ مٹنی سے قطع ہوتا ہے وہ دوسرے عماد سے نسبت ۳:۱ میں تقسیم ہو جاتا ہے۔

۲۔ وہ دائرہ معلوم کرو جو (۳، ۰)، (۰، ۵) میں سے گزرے اور طہ سے گزرتا ہو۔

۳۔ مکانی ما = ۳ ل لا کے دو علی القوائم ماسکی وتر کھینچے گئے ہیں اور ہر وتر کے وسطی نقطہ سے اس وتر پر ایک خط عمود وار کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ ان خطوں کے نقطہ تقاطع کا طریق

$$ما = ۱۲ ل (۵ - ل) ہے۔$$

۴۔ ایک ناقص کے وتر کے محاذی مرکز پر زاویہ قائمہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ وتر ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۵۔ مزدوج قطروں کے سروں ن اور ق پر کے عمود محور اعظم سے گزرتا ہو، ثابت کرو کہ

$$ن گ + ق گ = \frac{۱}{۲} (ل + ب)$$

۶۔ ناقص کے دو ماس کھینچے گئے ہیں، ان کے تقاطع ماس کے خارج مرکز زاویوں کا حاصل جمع مستقل ہے، ان کے نقطہ تقاطع کا طریق دریافت کرو۔

۷۔ ایک ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں ن اور ق ہیں، اگر ن پر کاماس میں ن کے ساتھ زاویہ طہ بنائے اور ق پر کاماس میں ق کے ساتھ زاویہ فہ بنائے تو ثابت کرو کہ مم طہ + مم فہ مستقل ہے۔

۸۔ اس دائرہ کی سادات معلوم کرو جو نقاط (۰، ۱)، (۲، ۳)، (۳، ۱) میں سے گزرے۔ نیز دکھاؤ کہ یہ دائرہ خط مستقیم لا۔ ما سے جو حصہ

قطع کرتا ہے اس کا طول تقریباً ۲،۳۹ ہے۔

۹۔ اگر ایک دائرہ کے کسی وتر کے محاذی ایک نقطہ معلوم ہو زاویہ قائمہ بنے تو ثابت کرو کہ وتر مذکور ایک مخروطی تراش کو لغت کرتا ہے۔

۱۰۔ دو مکانیوں ما = ۳ ل (لا - ل) اور لا = ۳ ل (ما - ل) میں

ل، دو نوں تغیر ہیں، یہ کافی اس طرح حرکت کرتے ہیں کہ یہ ہمیشہ ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، ان کے نقطہ تماس کا طریق دریافت کرو۔

پہرچہ سوالات ۶

۱۔ اوج ایک ایسا استوی شت ہے جس میں سس و سس ہیں۔

ج کا طریق معلوم کرو جبکہ اوج ثابت ہو۔

۲۔ ایک شت کے اضلاع کی مساواتیں حسب ذیل ہیں

$$\text{رجم طہ} - \text{ج} = ۰$$

$$\text{رجم} (\text{طہ} - \frac{\pi}{4}) - \frac{\text{ج}}{2} = ۰$$

$$\text{رجم طہ} + \text{رجب طہ} + ۲ \text{ج} = ۰$$

اس کا رقبہ معلوم کرو۔

۳۔ $\text{ما} = \text{م}$ اور $\text{لا} = \text{ب}$ یا دو مکان ہیں، ان کے مشترک تماس کی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ ایک ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد محور اعظم سے گ پر ملتا ہے، ن پر کے تماس پر مرکز ج سے عمود ج ما کھینچا گیا ہے، ج گ کا وسطی نقطہ ہے اور محور اصغر کا ایک سرا ص ہے، ثابت کرو کہ

$$\text{ون} = \text{وما} = \text{وص}$$

۵۔ ذیل کی مخروطیوں $\text{لا} + ۲ \text{لا} + ۳ \text{ما} = ۸$ کو مرتب کرو اور یہ دکھاؤ کہ ان میں سے ہر ایک کے ماسکے دوسری پر واقع ہوتے ہیں، نیز دکھاؤ کہ چار نقطے ایسے ہیں جن میں سے ہر دووں مخروطیاں گزرتی ہیں۔

۶۔ مکانی پر کے ایک نقطہ (عہ، بہ) سے منحنی کے دو عماد کھینچے گئے ہیں جو منحنی سے نقاط (عہ، یہ)، (عہ، بیہ) پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

بہ (عہ - عہ) + بہ بہ (عہ - عہ) + بہ بہ (عہ - عہ) =

۷۔ ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے مزدوج قطروں کے سروں پر

محاس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط تقاطع کا طریق

ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۲$ ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ مساوات (۱ ما - با لا) + ک (لا - ل) (ما - با) =

دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے، نیز یہ دونوں خط تائید لا ما - ل ک = کرو
مس کرتے ہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ مساوات لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۰ سے

جو چار خط تعبیر ہوتے ہیں وہ ایک موسیقی پنسل بناتے ہیں۔

۱۰۔ ایک مثلث کا قاعدہ معلوم ہے اور اس کے باقی دو ضلعوں کی

سطح کو ان کے مربعوں کے مجموعہ کے ساتھ جو نسبت ہے وہ بھی معلوم

ہے، مثلث کے رأس کا طریق معلوم کرو۔

پرچہ سوالات ۷

۱۔ نقطہ (ھ، ک) سے خط لا + با + ما + ج = ۰ پر جو عمود کھینچ سکتا

ہے اس کی مساوات دریافت کرو اور خطوط کے نقطہ تقاطع کے محدود

معلوم کرو۔

۲۔ ثابت کرو کہ سوال ۱ میں جو خطوط ہیں ان کے نقطہ تقاطع کا فاصلہ

(ھ، ک) سے

{ (۱ + ج + ک) + (۱ + ب) (ھ - ک) } / (۱ + ب) ہے

۳۔ ایک دائرہ کامرکز اس خط مستقیم پر واقع ہے جو محوروں کے درمیانی

نزدیک کی تنصیف کرتا ہے اور دائرہ خطوط لا + با + ما + ج = ۰ اور

۱۔ لا + ب + ما = کو مس کرتا ہے، دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔
 ۴۔ ایک مکانی کا اُس وہے اور ن، ق اس پر کے دو نقطے ہیں، انہما اور
 ق میں سے گزرنے والے قطر راق اور رن سے بالترتیب سی اور
 و پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ سی و مکانی کے محور پر عمود ہے۔
 ۵۔ ثابت کرو کہ دو مکانی ما = ۸ لا اور لا = ۲۷ ما ایک دوسرے
 کو قطع کرتے ہیں زاویہ قائمہ پر اور ایک ایسے زاویہ پر جس کا محاسس
 $\frac{1}{12}$ ہے۔

۶۔ ن پر کا عماد ق پر کے محاس سے محور اصغر پر ملتا ہے، ثابت
 کرو کہ ن ق زاؤ $\frac{لا}{(لا-۲ب)}$ - $\frac{۲ا}{ب}$ = $\frac{۱}{لا-۲ب}$ کو مس کرتا ہے۔
 ۷۔ مرتب سے مکانی ما = ۴ لا کے محاس کھینچے گئے ہیں، ان کے
 وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو۔

۸۔ زاؤ کے محیط پر ایک متغیر نقطہ ہے اور دو ثابت نقطے ہیں، متغیر
 نقطہ کو ثابت نقطوں کے ساتھ دو خطوط کے ذریعہ ملا یا گیا ہے، ثابت
 کرو کہ ملانے والے خطوط کے درمیان ہر ایک متقارب پر مستقل طول
 کا ایک حصہ کٹتا ہے۔

۹۔ ایک نقطہ ط کا قطبی بلحاظ ما = ۴ لا کے جن نقطوں پر مکانی کو قطع
 کرتا ہے اُن پر مکانی کے عماد کھینچے گئے ہیں اور وہ ایک دوسرے
 کو مکانی پر ہی قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ط کا طریق ما = (لا + ۲) + ۴ = ۱۰
 ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ناقص کے ایسے وتروں کا لغاف جن کے سامنے
 مبدا پر زاویہ قائمہ بنتا ہے ایک مخروطی تراش ہے جس کا ماسکہ مبدا ہے
 اور جس کا مرتب مبدا کا قطبی ہے۔

پرچہ سوالات ۸

۱۔ مساوات لا + ۲ھ لا + ب ما + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

اور ایسے خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبدأ سے مساوی الفاصل ہیں اثبات کرو کہ

فء۔ گء = ج (ب فاء۔ وگء)

۲۔ دو دائرے محور سا کو مشن کرتے ہوئے تقاطع (۵، ۵) اور (۴، ۴) میں سے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کو زاویہ مساخک پر قطع کرتے ہیں۔

۳۔ ایک مکانی کے دو ماس q اور Q ہیں اور ہا کے
ان پر عمل دس m ، s مپا نکالے گئے ہیں، ثابت کر دکھ۔
 s m x s m ایسے بدلتا ہے جیسے s q ۔

۴۔ نقطہ (لا، ما) سے ناقص $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما} = ۱$ کے دو ماس
کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کا درمیانی زاویہ

سنة اربع واربعة $\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16} - 1}$ $\sqrt{1 - \frac{9}{16} + \frac{9}{16} - 1}$ $\sqrt{1 - \frac{9}{16} + \frac{9}{16} - 1}$

۵۔ ایک کافی کے تین ایسے عاود کھینچے گئے ہیں جو ایک ہی نقطہ میں سے نہیں گزرتے، ثابت کرو کہ ان عاودوں کے درمیان جوشلث بنتا ہے اس کا رتبہ

$$\frac{1}{4} \text{ و } (م + م + م) (م - م) (م - م) (م - م)$$

۶۔ ایک مخروطی کی مسادات لا۔ ۲ لا ما + ما + ۶ لا = ۶ ہے ثابت کر دو کہ یہ زائد ہے، اس کا مرکز، اس کے نیم محوروں کا طول اور سمت اور اس کے متقاربوں کی مسادات معلوم کر دو۔

(۱) (۲) (۳) کے عمود نکالا گیا ہے، اس کا طول معلوم کرو۔
 ۴۔ مخروطی لائے لا + لا + لا = لا + لا + لا = ۱۸ کے مرکز کے محور معلوم کرو، مرکز میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے مساوات کو تبدیل کرو اور منحنی کو مرتب کرو۔

۵۔ ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$ پر کے کسی نقطہ ن سے محوروں پر

عمود ن ل، ن م نکالے گئے ہیں، اگر مرکز سے خط ل م پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے پایہ کا طریق ہے

$$\frac{۱}{لا} = \frac{قط ۱ طہ}{ب} + \frac{قط ۲ طہ}{ب}$$

۶۔ ثابت کرو کہ مکانی لا = لا کے تمام وتر جن کے سامنے رأس پر مستقل زاویہ عم بنتا ہے مخروطی
 (لا - لا) + لا + لا + لا = لا - لا = ۰
 کو مس کرتے ہیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ ان سب نقاط کا طریق جن پر ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$ کے محاذی ۶ کا زاویہ بنتا ہے ۳ (لا + لا - لا - لا) = لا (لا + لا - لا - لا) ہے۔

۸۔ ن ق مکانی لا = لا کا عمادی وتر ہے اور اس اس کا ماسک ہے ثابت کرو کہ مثلث س ن ق کے مرکز ہندسی کا طریق ہے

۳۶ لا + لا (۳ لا - لا) - لا = لا = ۱۲۸
 ۹۔ ثابت کرو کہ ناقص اور امدادی دائرہ کے دو تناظر ماسوں کے

درمیان بڑے سے بڑا زاویہ جب $\frac{لا - ب}{لا + ب}$ ہو سکتا ہے۔

۱۰۔ حوالہ کے محوروں پر بالترتیب دو نقطے ن، ق لگے گئے ہیں جو

ایک ثابت نقطہ (ر) سے مساوی الفصل ہیں، ن ق کے وسطی نقطہ کے طریق کی مساوات معلوم کرو اور منحنی کو مرتبہ معلوم کرو۔

پرچہ سوالات ۱۰

- ۱۔ حوالہ کے محوروں کے درمیان خط مستقیم $\frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$ پر جو حصہ کٹتا ہے اس پر مربع بنایا گیا ہے، اس کے اضلاع کی مساواتیں اور اس کے قطر دوں کے نقطہ التقاطع کے محدود معلوم کرو۔
- ۲۔ تین دائروں کے مرکز تین ثابت نقطے ہیں اور ان کے نصف قطر لہ، ک، لہ، ک، لہ، ک ہیں، ان کے بنیادی مرکز کا طریق معلوم کرو جبکہ ک، ب، لہ، ک، ب، لہ، ک دو مکانی $لا = م$ اور $لا = م$ ب، م ایک دوسرے کو بند اوپر اور نقطہ ن پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ن اور ن پر کے مماسات کے جو میلان کسی ایک محور کے ساتھ ہیں ان کے مماس سلسلہ ہندسیہ میں ہیں، نیز جو دو مثلث ن پر کے مماسات اور کسی ایک محور کے درمیان بنتے ہیں ان کے رتبے مساوی ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ (لا، م) سے مکانی $لا = م$ و لا کے تین عماد (حقیقی یا خیالی) کھینچ سکتے ہیں، نیز اگر یہ عماد حقیقی ہوں تو ان کے پایوں میں سے گذرے والا دائرہ مکانی کے رأس میں سے گزرتا ہے اور ایسے دائرہ کی مساوات حسب ذیل ہے

$$لا + م - \frac{لا م}{پ} - (لا + م) لا = ۰$$

- ۵۔ اگر مخروطی لا + م + لا + م + ب + م + گ + لا + م + ج = ۰ کے مزدوج قطر محور لا کے ساتھ زاویے عہ، بہ بنائیں تو ثابت کرو کہ ب مس عہ مس بہ + عہ (مس عہ + مس بہ) + لا = ۰
- ۶۔ ایک ناقص کے ماسکے سن، سن ہیں اور محور اعظم کے ایک ہی

جانب اس کے محیط پر نقطہ 'ق'، 'ق' اس طور پر لئے گئے ہیں کہ 'س' 'ق'،
 'ن' 'ق' یا ہم متوازی ہیں اور 'س' 'س' کے ساتھ زاویہ طہ بنتے ہیں،
 اگر اس نقطہ پر جس کا خارج المرکز زاویہ طہ ہے 'ماس' کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ
 یہ 'ماس' اور 'ق' 'ق' ایک دوسرے سے محور اعظم پر ملتے ہیں۔
 ۷۔ دو ثابت معلومہ سمتوں میں مکانی کے مساوی و تروں کے جوڑے
 کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔
 ۸۔ ایک ایسے قائم زائد کے مرکز کا طریق دریافت کرو جو تین معلومہ نقطوں
 میں سے گذرے۔

۹۔ ناقص کی سطح میں ایک نقطہ ہے، ثابت کرو کہ اس نقطہ میں سے دو ہم
 ماسکے کھینچ سکتے ہیں، ایک ناقص اور دوسرا زائد۔ اگر ایسا ہم ماسکون کے
 اعظم نیم دائروں کے طول و زوائدوں کو ثابت کرو کہ نقطہ مذکورہ اور مرکز کے خط
 وصل کا جو فردون نیم قطر بلحاظ ناقص سب سے اس کا طول (وا۔ وا۔) ہے۔
 نیز ثابت کرو کہ زائد اور ہم ماسکے ناقص کے نقاط تقاطع پر زائد کے چار ماس
 کھینچنے سے جو متوازی الاضلاع بنائے اس کا رقبہ $\frac{1}{2} \text{وا.ب.ا.ج}$ (وا۔ب.ا.ج)
 ۱۰۔ ایک دائرہ ایک ناقص کو دو نقطوں پر مس کرتا ہے، اگر ناقص کے
 کسی نقطہ سے دائرہ کا ماس کھینچا جائے اور اسی نقطہ سے ناقص اور دائرہ
 کے مشترک وتر پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ اس ماس اور عمود کی باہمی
 نسبت مستقل ہے۔

پرچہ سوالات ۱۱

- ۱۔ مثلث کے اضلاع ج ب، ج ا پر دو متغیر نقطے 'ن'، 'ق' اس طرح
 لئے گئے ہیں کہ ج ن : ن ا = ب ق : ق ا، ج ن ق کے درمیان
 نقطہ کا طریق دریافت کرو۔
- ۲۔ دو دائرہ $\text{وا.ا.ا.ا.} = \text{وا.ا.ا.ا.}$ کے وتر تقاطع کا طول دریافت
 کرو، نیز ہر نقطہ تقاطع پر دائروں کے درمیان جو زاوے بنتے ہیں ان کے

ماس معلوم کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ قائم زائیدیں مستقل طول کے جتنے وتر ہیں ان کے وسطی نقاط کے طریق کی مساوات حسب ذیل شکل کی ہوگی۔
(لا + ما) (لا + لا ما) + ب لا ما =

۴۔ مکانی پر دو نقطے ن اور ق ہیں جن پر کے ماس ط پر اور عماد ع پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ط ع کا ظل خور پر مرتب کے ن اور ق کے فاصلوں کے مجموعہ سے مساوی ہے۔

۵۔ مکانی کی مساوات ۹ لا ما + ۲۳ لا ما + ۱۶ ما + ۴۴ لا ما + ۸ ما + ۵ = ہے، اس کے وتر خاص کا طول معلوم کرو۔

۶۔ منحنی ۲ لا ما - ۳ لا ما - ۴ ما + ۵ ما + ۲ = کو مرسم کرو اور اس کے متقارب کھینچو۔

۷۔ اگر (لا، ما)، (لا، ما) نائس $\frac{لا}{لا + لا ما} + \frac{ما}{ما + لا ما} = ۱$ پر دو نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{لا}{لا + لا ما} \times \frac{ما}{ما + لا ما} = \frac{۱}{لا + لا ما}$$

اس بنیاد پر ثابت کرو کہ متوازی وتروں کے وسطی نقاط کا طریق خط مستقیم ہے۔

۸۔ ن ق ناقص کا ایک ایسا وتر ہے جو ن پر عماد ہے، ن ق کے متناظر نقطے اندادی دائرہ پر ن ق ہیں، ثابت کرو کہ زاویہ ن ج ق

لازمًا بڑا ہے ۱ - $\frac{۱۷۲}{۱۲}$ سے جہاں ز ناقص کا خروج الگ کرتے

۹۔ اگر ناقص ایک مربع کے اندر بنایا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے محور سمت میں مربع کے قطروں پر منطبق ہوں گے۔

۱۰۔ ایک مکانی دو خطوط مستقیم وا، وب کو لا اور ب پر

کرتا ہے، اگر کسی وتر کا درمیانی نقطہ A ہے، یہ واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس وتر کے جو حصے DA ، AB اور CA کے درمیان کٹتے ہیں وہ مساوی ہیں۔

پرچہ سوالات ۱۲

۱۔ ثابت کرو کہ $\angle A + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ۔ کا ایک منقہ دو خطوط
مستقیم $\angle A + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ کا $\angle 2$ گ $\angle 3$ ف $\angle 4$ ج۔ کے تقاطع
میں سے گزریگا اگر $\angle 2 = \angle 3$ (ف) = گ (ا) = ب)۔
۲۔ جس زاوے پر دائرے $\angle A + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ کا $\angle 2$ گ $\angle 3$ ف $\angle 4$ ج۔
اور $\angle A + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ کا $\angle 2$ گ $\angle 3$ ف $\angle 4$ ج۔ ایک دوسرے کو قطع کرتے
ہیں اس کی جیب التمام معلوم کرو۔

۳۔ مکافی ما = ۴۰ لاکھ کے دو نقطوں پر جن کے فاصلوں کی باہمی نسبت
 مہ : ا ہے دو ماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے تقاطع کا طریق مکافی
 ما = (مہ^۱ + مہ^۲) لاکھ ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 1$ کے اس وتر کا طول جو خط $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 1$ پر واقع ہوتا ہے

$$\frac{1}{1+m} \times \sqrt{1+m} + \frac{1}{1+m} \times \sqrt{1+m} = 1$$

۵۔ ایک ناقص کے منہم محور اور ب ہیں، اس کے کسی نقطہ پر ماس اور عماد کھینچے گئے ہیں، اگر مرکز سے ماس اور عماد پر عمود کھائے جائیں اور ان کے طولی بالترتیب ع اور ع ہوں تو ثابت کرو کہ ان کا باہمی تعلق ربط ذیل سے ظاہر ہوتا ہے

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$

۶۔ مکانی $\theta = \frac{r}{R}$ کے وتر ایک ایسے دائرہ کو لمس کرتے ہیں جس کا مرکز ماسک ہے اور نصف قطرب $\frac{R}{2}$ ثابت کر دو کہ وتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کی مسادات حسب ذیل ہے

$$(x^2 + 1)B = \{(x-1)x + 1\}$$

۷۔ مکانی ۴۹ لا + ۱۲۶ لا + ۸۱ لا + ۲۳ لا + ۱۱ لا + ۱۲ =
 کے محور کی مساوات معلوم کرو۔

۸۔ منحنی $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$ کو مرتسم کرو اور مبداء سے اس کے
فاصلے کی مساوات معلوم کرو۔

۴۔ دو خط ایک دوسرے کو وپر قطع کرتے ہیں، پہلے خط پر تین نقطے (ا، و، ی) لگے گئے ہیں اور دوسرے پر 'ب'، 'ب'، 'ب'۔ اگر دوسرے خط کو و کے گرد گھمایا جائے اور نقاط 'ب'، 'ب'، 'ب' اس کے ساتھ حرکت کریں، تو ثابت کرو کہ 'ا'، 'و'، 'ی' کو ملائے جائے خطوط سے جو متشابہ بنتا ہے اس کا رقبہ ایسے بڑھتا ہے جیسے و پر کے زاویہ کریس۔

۱۔ ثابت کرو کہ $اَقص\ با\ لا\ +\ اَما\ =\ اَبا$ کے کسی نقطہ پر تماس
اور زمین ان دونوں کے موسیقی مزدوج ہیں جو مجہر اعظم کے سروں کو نقطہ
مذکورہ کے ساتھ ملانے سے پیدا ہوں۔

پرچہ سوالات ۱۳

۱۔ اولاً ۲ھ لا ما + ب + ما + گ + لا + ۲ فن + ما + ج =۔ دو خطوط مستقیم ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقطہ انقطاع سے مبدأ کے فاصلے کا مربع $\frac{ج (و + ب) - فن^۲ - گ^۲}{و ب - ۲ھ}$ ہے۔

۲۔ محاورہ 'ا ب' ا ج کا زاویہ میلان ۹۰° ہے، ایک دائرہ 'ب' کا مرکز 'ا' پر ہے اور 'ا ج' پر ایک وتر کا ٹٹا ہے جس کا طول 'ا ن' کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق خط مستقیم ہے، اگر 'ا ن' = 'ل' تو دائرہ کی مساوات معلوم کرو۔

۳۔ زائدوں 'لا' = 'ما' = 'ا' اور 'لا' = 'ا' کے جو مشترک حماس ہیں ان کے نقاط تماس کے محدود معلوم کرو۔

۴۔ مکانی کے کسی نقطہ پر کا حماس اصلی محور کے ساتھ زاویہ مس-اسہ بناتا ہے اور منحنی نقطہ مذکورہ کے عماد پر جو حصہ کاٹتا ہے اس کا طول

$$لہ = \frac{مس لہ}{(۱ + مس لہ)} = \text{وتر خاص کا طول}$$

۵۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے عمادی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق ایک ایسا منحنی ہے جس کی مساوات حسب ذیل ہے

$$(ب لا + ا ما) (ب لا + ا ما) = (ب لا + ا ما) (ب لا + ا ما)$$

۶۔ ناقص ۲ 'ا ب لا' (ا ب لا + ا ما) = (ا ب لا + ا ما) میں معلوم کرو خروج مرکز، محوروں کے طول، رقبہ، وتر خاص کا طول۔ وتر خاص کے سروں پر جو تماس کیلچ ہے۔ اس کی مساواتیں معلوم کرو۔

$$۷۔ منحنی ۸ لا + ۱۲ لا + ۱۰ ما + ۱۲ لا + ۳۴ ما + ۱۰ = ۰$$

۸۔ لمحاظ ایک مخروطی کے ایک نقطہ کا جو قطبی ہے اس پر نقطہ مذکورہ سے عمود عمال کیا ہے اور یہ محور پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق خط مستقیم ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ زائد 'لا' = 'ا' کے ایسے وتروں کا لگاتار جن کے سامنے منحنی کے نقطہ (لا، ما) پر زاویہ عم بنتا ہے زائد 'لا' + 'ما' =

۲ = لا + ما (۲ + ۱) = ۳ = لا + م = ۴ = ک + ک + لا + ما ایک مخروطی
 ۱۰۔ ثابت کرو کہ مساوات لا + ما = ک + ک + لا + ما ایک مخروطی
 تراش کو تعمیر کرتی ہے جو مخروطوں کو مس کرتی ہے، ک کی کس قیمت
 کے لئے یہ مخروطی دائرہ ہوگی اور دائرہ کا نصف قطر کیا ہوگا۔ محور علی التواضع
 ہیں۔

پرچہ سوالات ۱۴

۱۔ مبدا میں سے دو خط وا، وب کھینچے گئے ہیں، ان کے طول
 وا، وب ہیں اور یہ محور کا کے ساتھ بالترتیب زاوے ۳۰° اور ۶۰°
 بنائے ہیں، وب کی مساوات معلوم کرو۔
 ۲۔ ی = لا + ۲ = لا + ما + ب + ما + گ + لا + ۲ = ج + ج =
 خطوط مستقیم کا ایک جوڑا ہے، ثابت کرو کہ جہاں یہ خط محوروں سے ملتے
 ہیں ان چار نقطوں میں سے گزرنے والا تیسرا جوڑا
 ج + ی + ۲ (ف + گ - ج) = لا + ما = ہے۔
 ۳۔ ایک مکانی کا وتر خاص ۳ = لا ہے، اس پر کے ایک نقطہ ن
 کا معین ما ہے اور اس دائرہ کی مساوات جو ن کے قطر پر
 کھینچا جائے

$$لا + ما - (لا + \frac{ما}{۲}) - لا - ما + \frac{ما}{۲} =$$

ہے، ثابت کرو کہ یہ دائرہ ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم کو مس کرتا ہے۔

۴۔ نقطہ ت (ف، گ) سے ناقص $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - ۱ = ۰$ کے
 مساوات تان، تاق ہیں، ناقص کا مرکز ج ہے، ثابت کرو کہ
 ذوا۔ بقۃ الاضلاع تان ج قی کا رقبہ

$$ما + ف + لا + گ - وب =$$

۵۔ ثابت کرو کہ ماسک سے مخروطی کے مساحات کی مساوات دائرہ کی شہر کو پورا کرتی ہے۔

۶۔ جن نقطوں پر خط مستقیم $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ مخروطی

رہے گا $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ سے ملتا ہے ان پر مخروطی کے عماد کیچنے گئے ہیں

ثابت کرو کہ عمادوں کا نقطہ تقاطع $\frac{ج}{ب} = \frac{ج}{ب}$ ہے۔

۷۔ منہی $۱۵ لا - ۲۳ لا - ۲۸ ما + لا + ۲۹ ما - ۶ = ۰$ کو مرتب کرو۔

۸۔ منہی $۱ + \frac{۱}{۲} = ۲$ حجم طہ + ۲ حب طہ کے متعلق بحث کرو اور $(ما - لا) = ۲ = ما + لا + ۱$ کے ماسک کے محدد معلوم کرو۔

۹۔ ایک نقطہ معلومہ سے زائد $\frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ب} = ۱$ کے عماد

کیچنے گئے ہیں، ثابت کرو کہ جن نقطوں پر یہ منہی سے ملتے ہیں ان کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے ذاتی ضریف کے مساوی ہے۔

۱۰۔ ایک قائم زائد کے متقارب محددوں کے محور ہیں، اس کا ایک

ماس کیچنا گیا ہے $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کی ہم ماسک مخروطیوں کے

کے لحاظ سے اس ماس کے قطب لئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان تمام

قطبوں سے یہی لحاظ مخروطی $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کے ایک ہی

نقطہ میں سے گزرتے ہیں، نیز ایسے نقطوں کا طریق ایک قائم زائد ہے جس کے متقارب محددوں کے محور ہیں اور جو اصلی زائد کا مزدوج ہے

اگر

$$۴ و ب = (و - ب)$$

پرچہ سوالات ۱۵

۱۔ اگر $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ، دو متوازی خطوط مستقیم کو تعبیر کر کے ثابت کرو کہ $\angle A + \angle B = 180^\circ$ اور $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ۔

اور خطوط کے درمیان فاصلہ ہے $2 \left\{ \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right\}$ ۔

۲۔ ناقص کے اس ماسکی نیم قطر کا مقام معلوم کرو جو منحنی کو نہایت ہی ترچھا قطع کرے۔

۳۔ مکانی کی مساوات $\angle A = \angle B = \angle C$ ہے، نقطہ $(1, 2, 3)$ سے اس کے ماس کھینچے گئے ہیں اور ان کے نقاط تماس کو ملایا گیا ہے، اس طرح جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۴۔ مکانی کے ماس ایک دوسرے کو ایک مستقل زاویہ 135° پر قطع کرتے ہیں، مماثلات اور ان کے نقاط تماس کو ماسک کے ساتھ ملائے جو دو اربعۃ الاضلاع بنتا ہے اس کے قطروں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

۵۔ مستقل نصف قطر کا دائرہ مکانی کے اس میں سے گزرتا ہے، اگر دائرہ اور مکانی کے باقی تین نقاط تقاطع پر مکانی کے عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور دائرہ کے مختلف مقامات کے لئے اس نقطہ کا طریق ایک ناقص ہے جس کا خروج مرکز $\frac{1}{2}a$ ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ مکانی $\angle A = \angle B = \angle C$ کے عمادی دتروں کے نقاط تنصیف کا طریق $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ہے۔

۷۔ مخفیات ذیل کو مرتسم کرو

$$(1) \quad 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2 + 20^2 = 120$$

$$(2) \quad (3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11 - 12 + 13 - 14 + 15 - 16 + 17 - 18 + 19 - 20) = 1$$

۸۔ اگر زائد کے اُن چار نقطوں کے نصلے جن پر کے عماد ایک ہی نقطہ میں سے گذرتے ہیں لا، لا، لا، لا، لا، لا ہوں مگر ثابت کرو کہ

$$(لا + لا + لا + لا) (لا + لا + لا + لا) = ۴$$

۹۔ ناقص کے مرکز کو مبدأ مانا گیا ہے اور اس کے ایک دیگر نقطہ تعصیف

$$(لا، لا) ہے، ثابت کرو کہ \frac{لا}{لا + لا} ، \frac{لا}{لا + لا} ، \frac{لا}{لا + لا} ، \frac{لا}{لا + لا} دتر کے$$

قطب کے محدود ہیں جہاں لا، ب ناقص کے نیم محور ہیں۔

۱۰۔ نقطہ ن سے مخروطی لا لا + لا = اکاماس ن ق کھینچا گیا ہے اور اس کے سامنے مرکز پر زاویہ قائمہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ ن کا طریق

$$\frac{لا}{لا + لا} = \frac{ب}{ب + لا}$$

ہے، اگر نقطہ تناس ق کے محدود (ھ، ک) ہوں تو ن کا دتر تناس

$$\text{بلحاظ مخروطی کے } \frac{لا}{ھ} - \frac{ب}{ک} = لا - ب \text{ ہے۔}$$

جوابات حاصل

صفحات (۱-۷۴)

- ۳- ۱۳ میل، ۱۰ میل ۴- ۲۵ ۵- ۱۳۷
 ۶- لا' + ما' = و' ۷- لا- (د) + (ع-ا) = و'
 ۹- (- ۷/۱۲ - ۵/۴) ۱۰- (۱/۴، ۹/۴) ۱۱- ۱۴:۴
 ۱۲- { (د-ر) لا+ ر لا } / { (د-ر) لا+ ر لا } / ن
 ۱۳- (د) (ب) ۱/۲ (و+ب) (ج) ۱/۲ (د-م) (ن) - ۱/۲ (ق-ل-م)
 ۱۵- ۲
 ۱۸- (د) - ۱ - ۱ (ب) - ۱ - ۱ (ج) ۳ - ۱/۲ - ۱/۲
 ۱۹- (د) ۲ ۵/۴ (ب) ۱۳۷ ۵/۴ (ج) ۵
 ۲۰- (د) ۱۲ (ب) ۲ ۲۱- (د) ۱/۲ (ب) ۱۳۷ ۵/۴
 ۲۷- لا' + ما' = ۲ ۲۸- لا' + ما' - ۱۲ = ۱۰
 ۲۹- ما = لا + لا جہاں لا معلومہ فاصلہ ہے۔

۳۰- (د) مبدأ اور نقطہ (۲، ۱) میں سے گزرنے والا خط مستقیم
 (ب) دائرہ جس کا مرکز مبدأ ہے اور نصف قطر ۴ (ج) دو خطوط مستقیم جو مبدأ
 کو نقاط (۲، ۱) اور (۱، ۲) کے ساتھ ملاتے ہیں (د) دو خطوط مستقیم
 جو دلا کے متوازی ہیں اور اس کے اوپر اور نیچے فاصلہ ۲ پر واقع ہیں

$$99 - (1) \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$(2) \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$100 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$101 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$102 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$103 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$104 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$105 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$106 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$107 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$108 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$109 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$110 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$111 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

خیالی ہیں

$$112 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$113 - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - \sqrt{1}) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 + \sqrt{1})$$

$$۱۲۳ - \frac{۵۵}{۳۶} - \frac{۵}{۳} - \frac{۱۲۳}{۵} - ۱۲۳ - ۱۲ - ۳ = ۲ + ۳ = ۵ = ۳ + ۲ = ۵$$

$$۱۲۵ - \left(\frac{۱}{ج} \cdot \frac{۱}{ج}\right) \text{ میں سے گذرتا ہے جہاں ج مستقل ہے}$$

$$۱۲۶ - (-۳، ۷) \quad ۱۲۹ - ۱۹ = \frac{۱}{۵} (۳ - ۱۹) = \frac{۱}{۵} (۱۶) = \frac{۱۶}{۵} = ۳ + ۱ = ۴$$

$$۱۳۱ - ۳ - ۱۹ = ۲ = \frac{۱}{۲۷} - \frac{۱}{۵} = ۱ + ۱ = ۲$$

$$۲ = \frac{۱}{۲۷} - \frac{۳}{۵} = ۲ - \frac{۱}{۲۷} - \frac{۳}{۵} = ۲$$

$$۱۳۳ - \text{اگر اوب، ب ج کے طول (ن) اور قی ہوں اور زاویہ}$$

$$\text{ب د دے ہو تو راج کی مساوات ہے طہ = مس۔ ا قی جب عہ قی جم عہ + ن}$$

$$\text{اور ب د ہے ر } \{ \text{ن جب طہ - قی جب (طہ - عہ) } \} = \{ \text{ن قی جب عہ} \}$$

$$۱۳۴ - \frac{۱}{۲۲۳} - ۱۳۵ - \frac{\text{ر با عہ - اوب}}{\text{رقی - ۲ عہ ن قی + ب ن}}$$

$$۱۳۷ - \frac{\text{ون} + ۲ عہ ن قی + ب قی}{\text{۲ با عہ + ۲ و - ب}} = \frac{\text{ون} + ۲ عہ ن قی + ب قی}{۲}$$

$$۱۳۹ - \text{ایک ایسا خط مستقیم جو ثابت خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع سے گذرتا ہے۔}$$

$$۱۴۰ - \text{اگر ا قاعدہ ہو اور عہ قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق اور قاعدہ کو محور لا مانا جائے تو رأس کا طریق ہے لا + ما - لا - و مام عہ = ۰}$$

آزمائشی پرچہ صفحہ ۴۷

$$۱ - لا + ما - و مام و = \frac{۱}{۲} \text{ ا قاعدہ کو محور لا مانا گیا ہے اور اس کا وسطی نقطہ مبدأ ہے۔}$$

۲۔ (۱) خط مستقیم جواب ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ ۱۵۰° بناتا ہے اور قطب سے فاصلہ پورے ۳۷ پر ہے۔
 (۲) خط مستقیم جواب ابتدائی خط کے متوازی ہے اور اس سے فاصلہ ۱ پر واقع ہے۔

$$۳۔ \frac{ج}{ج} \quad ۴۔ ۱۰ + ۷ = ۱۷ \quad ۱۳ + ۸ = ۲۱$$

$$۵۔ \frac{۱۵}{۱۵} \quad ۷۔ لا + لا = لا \quad لا + لا = لا \quad لا + لا = لا$$

$$۹۔ رجب ۱۵۰۰ + لا + ۲ جب ۱۵۰۰ (۷۰۰ رجب ۱۵۰۰) + لا + ۲ (۷۰۰ رجب ۱۵۰۰) = ۱۵۰۰$$

جوابات حصہ دوم

باب اول (صفحات ۱ تا ۷)

$$۲۔ (ا) لا + لا = لا \quad (ب) لا + لا = لا \quad (ج) لا + لا = لا$$

$$۳۔ (ا) لا + لا = لا \quad (ب) لا + لا = لا \quad (ج) لا + لا = لا$$

نصف قطر = نقطوں کے درمیانی فاصلہ کا نصف

$$(ع) لا + لا = لا$$

$$۴۔ لا + لا = لا$$

$$۵۔ لا + لا = لا$$

$$۶۔ (ا) لا + لا = لا \quad (ب) لا + لا = لا \quad (ج) لا + لا = لا$$

$$(د) لا + لا = لا$$

- ۷- (ا) $لا + ما - لولا - ب = ۰$
 (ب) $لا + ما - لولا - ب = ۰$ $ف + ق = ۲$ $ص = ۲$ $ن = ۲$ $ک = ۲$ $ق$
- ۸- $لا + ما - لولا - ب = ۰$ $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
- ۹- $لا + لولا - ب = ۰$ $(۰, ۰)$
- ۱۱- $لا + ما - لولا - ب = ۰$ $(۱, ۲)$
- ۱۲- (ا) $(\frac{1}{5}, \pi)$ (ب) $(\frac{2}{4}, \frac{\pi}{4})$
- ۱۳- $۴ = ۶$ $۱۵ - ۱۲ = ۳$ $۱۳ = ۶$ $۱۳ = ۶$ $۱۳ = ۶$
- ۱۶- $۳ = ۶$ $۳ = ۶$ $۳ = ۶$ $۳ = ۶$
- ۲۳- $۱۲ = ۶$ $۱۲ = ۶$ $۱۲ = ۶$ $۱۲ = ۶$
- ۲۴- $۱۰ = ۶$ $۱۰ = ۶$ $۱۰ = ۶$ $۱۰ = ۶$
- ۲۵- $(۰, ۰)$ $(۰, ۰)$ $(۰, ۰)$ $(۰, ۰)$
- ۲۶- $۴ = ۶$ $۴ = ۶$ $۴ = ۶$ $۴ = ۶$
- ۲۷- $۳۱ = ۶$ $۳۱ = ۶$ $۳۱ = ۶$ $۳۱ = ۶$
- ۳۲- $۲۷۲ = ۶$ $۲۷۲ = ۶$ $۲۷۲ = ۶$ $۲۷۲ = ۶$
- ۳۳- $۵ = ۶$ $۵ = ۶$ $۵ = ۶$ $۵ = ۶$
- ۳۴- $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$
- ۳۵- $(\frac{25}{13}, \frac{40}{13})$ $(\frac{25}{13}, \frac{40}{13})$ $(\frac{25}{13}, \frac{40}{13})$ $(\frac{25}{13}, \frac{40}{13})$
- ۳۶- $لا + ما = ب$ $لا + ما = ب$ $لا + ما = ب$ $لا + ما = ب$
- ۳۷- $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$
- ۳۸- $۳۹ = ۶$ $۳۹ = ۶$ $۳۹ = ۶$ $۳۹ = ۶$
- ۳۹- $۱۰ = ۶$ $۱۰ = ۶$ $۱۰ = ۶$ $۱۰ = ۶$
- ۴۰- $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$
- ۴۱- $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$
- ۴۲- $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$
- ۴۳- $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$
- ۴۴- $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$
- ۴۵- $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$
- ۴۶- $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$ $۲۵ = ۶$

۴۷۔ $\sqrt{a^2 + b^2} - 2ab$ جم - عہ - یہ
جب (عہ - یہ)

باب دوم

صفحات (۱۸ تا ۴۲)

- ۱۔ (د) ۳ لا - ۱۵ = ۲ (ب) ۱ - ۲ لا = ۱۳ (ج) ۱۴ = ۱۴
- ۲۔ (د) (۲۱ - ۷) (ب) (۱ - ۱) (ج) (۶ - ۰)
- ۳۔ (د) ۱۵ = ۱۵ (ب) ۱۵ = ۱۵ (ج) ۱۵ = ۱۵
- ۴۔ (د) ۵ (ب) ۱ (ج) $\frac{1}{27}$
- ۵۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۶۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۷۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۸۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۹۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۱۰۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۱۱۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۱۲۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۱۳۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۱۴۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۱۵۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۱۶۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۱۷۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۱۸۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۱۹۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۲۰۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۲۱۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۲۲۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۲۳۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۲۴۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۲۵۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۲۶۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۲۷۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۲۸۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۲۹۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۳۰۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰

جائے

- ۳۱۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۳۲۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۳۳۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۳۴۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۳۵۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۳۶۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۳۷۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۳۸۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۳۹۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۴۰۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۴۱۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۴۲۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۴۳۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۴۴۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۴۵۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۴۶۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۴۷۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۴۸۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۴۹۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰
- ۵۰۔ ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰ (ب) ۱۰ لا - ۱۵ = ۱۰

$$۴۲ - \frac{۱+۲+۳}{۳} \text{ گ.ج. - ج.گ.} + \frac{۱+۲}{۲} \text{ ف.ج. - ج.ف.} = ۱۰$$

۴۲۔ لا + م + ج = ج - ج
۴۳۔ بنیادی محور کو محور لا مانو اور اس کے وسطی نقطہ کو مبدأ، اگر دائروں کے نقاط تقاطع کے درمیان بنیادی محور کا طول ۲ ج ہو اور معلوم سمت کا تماس محور لا کے ساتھ ص ہو تو طریق مطلوب ہے لا۔ ما۔ ج = ۲ ص لاما

آزمائشی پرچہ ۱ (صفحہ ۴۲)

$$(-1) = 2 \quad 2 = 1 + 1$$

$$5 - \frac{4}{13} = \frac{25}{13} \quad 6 - (1 + \text{جم عم}) - 1 = (1 - \text{جم عم})$$

۸۔ دائرہ $r =$ لہ جسم (طرہ۔ عم) جہاں ثب اور عم دائرہ معلومہ کے مرکز کے قطبی محدد ہیں۔

باب سوم

(صفحات ۴۲-۶۲)

$$\frac{1}{2}(3) < (2) \quad 3(1) = 3$$

$$\overline{f}(1) = f(1) = 1 \quad \text{and} \quad \overline{f}(2) = f(2) = 2$$

$$\lambda = 11 \qquad \frac{1}{\lambda} = 10$$

۱۲۔ $(-\frac{3}{4}, 0)$ ، ماسک $(-1, 0)$ اور مرتب $2 = 0$ ۔

۱۳- (۲-۱۰) لا۔ ۱۵- پہلے مکانی کے باہر اور دوسرے کے اندر

$$\frac{1}{f} = y' \left(r' \frac{r}{f} \right)' (r') (1) = -1$$

$$= 0 + 9r^6 \left(r - \frac{r}{r}\right)^6 \left(r - \frac{r}{r}\right) (r)$$

$$= 4 + 6r - 1 + 6 \times 2 - 5 = 19 \quad 2 \times 2 = 4 - 1 = 3$$

باب چہارم

(صفحات ۶۴-۸۵)

$$= 8 + 614 - 64 + 692 - 94 = 1$$

$$1 = \frac{r_L}{r_U} + \frac{r_D}{r_D} - r$$

$$\frac{1}{r} \pm (r) \quad \sqrt{\frac{1}{r} \pm (r)} \quad \sqrt{\pm (1)} - r$$

4- (1) و (2) کے اندر

$$(r' r)' (-' r) (\mu) \quad (1' \mu)' (1' -) (r) \quad \overline{FV} \frac{1}{r} (1) = 13$$

$$(r'1)'(-1)(r)(r'5)'(r'2)(r) \sqrt{\frac{r}{r}}(1) = 1r$$

$$(r^6) \cdot (-6) (r) \cdot (1^6 r^{-2}) (1^6 r) (r) \cdot \frac{1}{r^7} (1) = 10$$

$$(1^1-)'(1^1), (3) \quad (3^1-)'(1-'), (2) \quad \overline{1} \frac{1}{2} (1) = 14$$

$$(P-1)(1+P)(P) (1^2-1)(1^2)(2) \quad P \div 1 = 1$$

$$([r + \sqrt{10} | r] - 'r) ('r - \sqrt{10} | r' r) (r) \sqrt{10} \sqrt{\frac{1}{10}} (1) = 1 \wedge$$

$$(n-2)'(n-1-)(n)$$

$\overline{f_1} \cdot \overline{f_2} (2) \quad \overline{f_1} \cdot \overline{f_2} (1) - 14$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}, \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}, \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 22 \quad \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}, \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \right) = -\frac{1}{t^2}$$

$$F_{12} = 29 + 63x - 51x^2 - 7x^3 + 6x^4 - 5x^5 - 4x^6$$

1964

$$f_1 - \frac{1}{3} f_2 = -29$$

$$P_9 = (6+9)P'(\frac{1}{P}, \frac{2}{P}) = 24$$

1. 1. The first part of the paper is a review of the literature on the topic.

$$= 177 - 697 - 5187 - 6709 + 6577 - 5719 = -177$$

$$۷ - (۳۱ - ۴) = ۳۴ + ۲ + ۱ = ۳۷$$

$$۹ - ۴ - ۱ = ۳ - ۱ = ۲ \quad ۱۱ - ۱ = ۱۰ \quad ۱۱ - ۱ = ۱۰ \quad ۱۱ - ۱ = ۱۰$$

$$۱ - ۱ = ۰ \quad ۱ - ۱ = ۰ \quad ۱ - ۱ = ۰$$

$$۱۱ - ۱ = ۱۰ \quad ۱۱ - ۱ = ۱۰ \quad ۱۱ - ۱ = ۱۰$$

$$۱۲ - ۱ = ۱۱ \quad ۱۲ - ۱ = ۱۱ \quad ۱۲ - ۱ = ۱۱$$

$$۱۳ - ۱ = ۱۲ \quad ۱۳ - ۱ = ۱۲ \quad ۱۳ - ۱ = ۱۲$$

$$۱۴ - ۱ = ۱۳ \quad ۱۴ - ۱ = ۱۳ \quad ۱۴ - ۱ = ۱۳$$

$$۱ = ۱ - ۱ = ۰$$

$$۱۵ - (۱) = ۱۴ \quad (۲) = ۱۳ \quad (۳) = ۱۲ \quad (۴) = ۱۱ \quad (۵) = ۱۰$$

$$۱۸ - ۱ = ۱۷ \quad ۱۸ - ۱ = ۱۷ \quad ۱۸ - ۱ = ۱۷$$

$$۱۹ - ۱ = ۱۸ \quad ۱۹ - ۱ = ۱۸ \quad ۱۹ - ۱ = ۱۸$$

$$۲۰ - ۱ = ۱۹ \quad ۲۰ - ۱ = ۱۹ \quad ۲۰ - ۱ = ۱۹$$

$$۲۱ - ۱ = ۲۰ \quad ۲۱ - ۱ = ۲۰ \quad ۲۱ - ۱ = ۲۰$$

$$۲۳ - ۱ = ۲۲ \quad ۲۳ - ۱ = ۲۲ \quad ۲۳ - ۱ = ۲۲$$

$$۲۵ - ۱ = ۲۴ \quad ۲۵ - ۱ = ۲۴ \quad ۲۵ - ۱ = ۲۴$$

$$۲۷ - ۱ = ۲۶ \quad ۲۷ - ۱ = ۲۶ \quad ۲۷ - ۱ = ۲۶$$

$$۲۸ - (۰) = ۲۸ \quad (۰) = ۲۸ \quad (۰) = ۲۸$$

$$۳۰ - ۲ = ۲۸ \quad ۳۰ - ۲ = ۲۸ \quad ۳۰ - ۲ = ۲۸$$

$$۳۱ - ۲ = ۲۹ \quad ۳۱ - ۲ = ۲۹ \quad ۳۱ - ۲ = ۲۹$$

۳۵۔ $(3 - a + b)(1 + a + b) = 4 - a^2 - b^2$
 ۳۶۔ $(3 - a - b)(4 + a + b) = 3 - a^2 - b^2$
 ۳۸۔ محور متقابلوں کے درمیانی زاویوں کی تصنیف کرتے ہیں، $a + b + c = 180^\circ$
 ۳۹۔ $\frac{a - b}{a + b} = \frac{a - b}{a + b}$
 ۴۰۔ $a + b + c = 180^\circ$

بائیں

(صفحات ۱۳۹-۱۴۶)

- ۱۔ مرکز (۱، ۱)۔ محور اعظم کی مساوات بجاظئے مرکز کے لا۔ $a = ۱$ ۔ ہے۔
نصف محوروں کے طول ۱۵ اور $\frac{۱}{۲}$ یا ۲۵۲۲ اور ۱۵۲۹ ہیں۔
ولا پر مقطوعے = ۱۵۸۲ اور ۵۸۲ اور وما پر = ۱۵۸۲ اور ۵۸۲
- ۲۔ مرکز $(\frac{۱۳}{۵}, \frac{۹}{۵})$ ۔ محور اعظم لا = ۱۵۲ ۔ نصف محوروں کے طول
 $\frac{۱}{۵}$ اور $\frac{۱۳}{۵}$ یا ۲۵۲۲ اور ۱۵۲۹ ، ولا اور وما پر مقطوع
خیالی، لا = ۲ پر مقطوعے ۲۵۳۸ یا ۵۸۵
- ۳۔ مرکز $(۱، ۳)$ ۔ محور اعظم لا = ۱۵۲ ۔ نصف محوروں کے طول
 ۱۵ اور $\frac{۱۳}{۲}$ یا ۲۵۲۲ اور ۱۵۲۹ ہیں۔ ولا پر مقطوعے خیالی ہیں،
وما پر مقطوعے = ۲۵۵۸ اور ۱۵۲۲ ۔
- ۴۔ مرکز $(\frac{۳}{۵}, \frac{۶}{۵})$ ۔ محور اعظم لا = ۱۵۲ ۔ نصف محوروں
کے طول ۱۵ اور ۱۵۰۳ ہیں۔ ولا پر مقطوعے خیالی ہیں، وما
پر مقطوعے = ۲۵۲۲ اور ۱۵۲۹ ۔
- ۵۔ مرکز $(۱، ۱)$ ۔ محور اعظم لا = ۱۵۲ ۔ نصف محوروں کے طول
 ۲۵۳۹ اور ۱۵۲۹ ہیں۔ ولا پر مقطوعے ۲۵۲۹ ۔ ۱۵۲۹ اور
اور وما پر = ۲۵۸۰ ۔ ۱۵۲۹ ۔

۶۔ مرکز (۱۶۲)۔ محور اعظم ہے $۶۶ = لا + ما = ۰$ ، نصف محوروں کے طول ہیں ۱۶۲۔ ولا پر نقطوے $= ۲۶۸۳، ۶۹۴$ ۔ منحنی و ما کو مس کرتا ہے $ما = ۲$ پر۔

۷۔ مرکز (۰، ۰)۔ محور اعظم ہے $لا + ما = ۰$ ، نصف محوروں کے طول ۲۶۴۶ اور ۲ ہیں۔ ولا پر نقطوے $= ۲۶۴۵ \pm$ اور و ما پر $= ۲۶۴۵ \pm$

۸۔ (ا) $لا - ما = ۰$ ، $لا + ما = ۲$ ۔ (ب) $لا + ما = ۱$ ، $لا - ما = ۳$ ۔ (ج) $لا + ما = ۲$ ، $لا - ما = ۳$ ۔

۹۔ مرکز (۰، ۰)۔ محور اعظم $لا + ما = ۰$ ، نصف محوروں کے طول ۱۶۴۱ اور ۸۲ ہیں، ولا پر نقطوے ہیں ± ۱ اور و ما پر ± ۱

پاسہ ششم

(صفحات ۱۴۷-۱۵۳)

مفصلہ ذیل میں (ا) مرکز کے محدد ہیں (ب) قاطع اور مزدوج محوروں کی مساواتیں ہیں جبکہ مرکز مبدا ہو (ج) نصف محوروں کے طول ہیں (د) متقاربوں کی مساواتیں ہیں جبکہ مرکز مبدا ہو (ع) ولا پر کے نقطوے (ف) و ما پر کے نقطوے ہیں

۱۔ (ا) $۱ - ۲$ (ب) $۳ + لا = ۲$ ، $۲ - لا = ۳$ ۔ (ج) ۲

(د) $لا - ما = ۰$ ، $۷ - لا = ۴$ ۔ (ع) $۱۵۶۹، ۳۳۴$

(ف) $۲۶۵۷ - ۲۶۵۷$

۲۔ (ا) $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۱}{۴}$ (ب) $لا - ما = ۰$ ، $لا + ما = ۰$

(ج) $۱۵۶۳، ۶۹۴$ (د) $۳۶۷۳ + لا = ۰$ ، $۲۷۷۳ + لا = ۰$

(ع) $۲۶۱۶ - ۱۵۱۶$ (ف) $۲۶۱۶ - ۱۵۱۶$

۳۔ (ا) ۱ (ب) $لا - ما = ۲$ ، $۲ + لا = ۳$

- (ج) ۱۵۸، ۱۷۱ (د) ۳۲۵، ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ع) ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ (ف) ۳۲۵، ۳۲۵ + ۱۷۱
 ۳ - (ا) ۱۷۱ (ب) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ج) ۱۷۱ (د) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ع) ۲۱۷، ۲۱۷ - ۱۷۱ (ف) ۳۲۵، ۳۲۵ + ۱۷۱
 ۵ - (ا) ۱۷۱ - ۱۷۱ (ب) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ج) ۳۲۵، ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱ (د) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱
 (ع) ۳۲۵، ۳۲۵ - ۱۷۱ (ف) خیالی
 ۶ - (ا) ۱۷۱ - ۱۷۱ (ب) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ج) ۳۲۵، ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱ (د) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱
 (ع) ۳۲۵، ۳۲۵ - ۱۷۱ (ف) خیالی
 ۷ - (ا) ۱۷۱ (ب) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ج) ۳۲۵، ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱ (د) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱
 (ع) ۳۲۵، ۳۲۵ - ۱۷۱ (ف) خیالی
 ۸ - (ا) ۱۷۱ (ب) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ج) ۳۲۵، ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱ (د) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱
 (ع) ۳۲۵، ۳۲۵ - ۱۷۱ (ف) لا متناہی
 ۹ - (ا) ۱۷۱ - ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ (ب) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ج) ۳۲۵ + ۱۷۱، ۳۲۵ + ۱۷۱ (د) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ع) ۳۲۵ + ۱۷۱، ۳۲۵ + ۱۷۱ (ف) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ج) ۳۲۵ + ۱۷۱، ۳۲۵ + ۱۷۱ (د) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰
 (ع) ۳۲۵ + ۱۷۱، ۳۲۵ + ۱۷۱ (ف) ۳۲۵ + ۱۷۱ = ۱۷۱، ۱۷۱ - ۱۷۱ = ۰

نقطہ $(\frac{13}{14}, \frac{20}{14})$ میں سے گزرتا ہے۔

۲۔ ناقص جس کا مرکز مبدأ ہے۔ نصف محور ۴ اور ۳۔ محوروں کی مساواتیں لا۔ $۲ = ۲۰ - ۲۰ \pm ۰$ ، ولا پر نقطہ ۴۶ ± ۰ ، وما پر نقطہ ۴۱۳ ± ۰

۳۔ مکانی، محور ۳ لا۔ $۲ = ۲ + ۲ = ۰$ ، رأس پر کاماس $۲ + ۳ + ۶ = \frac{1}{2}$ ۔ وتر خاص $۱۶ = ۱۶$ ۔ منحنی تماس کے اس جانب واقع ہے جس جانب کہ مبدأ نہیں ہے۔ ولا پر نقطہ $۴ = ۴ - ۴ = ۰$ ، وما پر نقطہ خیالی ہیں۔ منحنی $(۲، ۴)$ ، $(۲، ۴)$ میں سے گزرتا ہے۔

۴۔ ناقص جس کا محور اعظم ۲ لا۔ $۱ = ۱$ ۔ ہے اور محور اصغر لا۔ $۲ = ۲ + ۲ = ۰$ نصف محوروں کے طول $\frac{1}{2}$ ہیں، ولا پر نقطہ $۱۵ - ۱۵$ ہیں اور وما پر $۳۵ - ۳۵$

۵۔ قائم زائد مرکز $(\frac{13}{14}, \frac{20}{14})$ ، یعنی محور $۳۶ + ۳۶ = ۰$ کے متوازی ہے

نیم محوروں کے طول ۸۹ ، متقارب ان خطوط کے متوازی۔ $۱۵۴ = ۱۵۴ - ۱۵۴$ ، ولا پر نقطہ ۴۶ ، ۳۵ اور وما پر ۱۶۳ ، ۳۴ ، ۱۶ ۔

۶۔ زائد جس کے متقارب لا۔ $۲ = ۱ + ۲ = ۰$ ، ولا $۲ - ۱ = ۳ = ۰$ ہیں۔ مرکز $(۱، ۱)$ ۔ منحنی کی ایک شاخ دونوں متقاربوں کے اس طرف واقع ہے جس طرف کہ مبدأ ہے۔ نیم قاطع محور $\frac{1}{2}$ ، نیم مزدوج محور $\frac{1}{2}$ ۔ ولا پر کا نقطہ خیالی ہے اور وما پر $۲۲۲ = ۲۲۲ - ۲۲۲$ ، منحنی نقاط $(۲، ۲۲۲)$ ، $(۲، ۲۲۲)$ ، $(۳، ۲۵۵)$ ، $(۳، ۲۵۵)$ ، $(۴، ۲۵۵)$ میں سے گزرتا ہے۔

۷۔ زائد جس کا مرکز مبدأ ہے اور $۳ + ۵ = ۵$ ۔ قاطع محور ہے۔ نیم قاطع محور $\frac{1}{2}$ ، $۳۷ = ۵۸$ ، نیم مزدوج محور $\frac{1}{2}$ ، $۷۱ = ۷۱$ ۔ متقارب ہیں

۸۔ ± ۱۷۸۸ لا، ± ۳۶ لا۔ ولا پر مقطوعے ± ۱۷۷ اور و ما پر خیالی۔ منحنی نقاط $(۱۵، ۱)$ ، $(۱، ۱۷۷۷)$ ، $(۱۷۷، ۱)$ ، $(۱، ۱۷۷۷)$ ، $(۱۷۷، ۱)$ ، $(۱، ۱۷۷۷)$ میں سے گذرتا ہے۔ قائم زائد مرکز $(۲، ۵)$ اور محور ± ۲ لا، ± ۵ ۔

نصف محوروں کے بل ± ۱۷۷۷ ، ± ۳۶ ۔ متقارب ہیں لا، ± ۳ ، ± ۷ لا، ± ۷ ولا پر مقطوعے ± ۱۷۷ اور و ما پر مقطوعے خیالی منحنی نقاط $(۱۱، ۱۸۳)$ ، $(۱۱، ۱۸۳)$ ، $(۱۲، ۱۷۷۷)$ ، $(۱۲، ۱۷۷۷)$ ، $(۱۲، ۱۷۷۷)$ ، $(۱۲، ۱۷۷۷)$ میں سے گذرتا ہے۔

۹۔ ناقص مرکز $(۲، ۳)$ اور محور لا، ± ۵ لا، ± ۱ نصف محوروں کے طول ± ۱۷۷ یا ± ۱۷۷ ، ± ۱۷۷ ولا و ما پر مقطوعے خیالی ہیں۔ منحنی نقاط $(۲، ۳)$ ، $(۲، ۳)$ ، $(۳، ۱)$ ، $(۳، ۱)$ میں سے گذرتا ہے۔

۱۰۔ زائد محور لا، ± ۱ لا، ± ۲ لا، ± ۲ نصف محوروں کے طول ± ۳ اور ± ۳ مرکز $(۱، ۰)$ ۔ متقارب ہیں لا، ± ۰ ۔

۳ لا، ± ۳ لا، ± ۳ ولا پر مقطوعے خیالی ہیں اور و ما پر ± ۱۷۷ منحنی نقاط $(۱، ۱۷۷)$ ، $(۱، ۱۷۷)$ ، $(۲، ۱۷۷)$ ، $(۲، ۱۷۷)$ ، $(۲، ۱۷۷)$ ، $(۲، ۱۷۷)$ میں سے گذرتا ہے۔

۱۱۔ زائد متقارب ± ۱۷۷ لا، ± ۱۲ لا، ± ۳ لا، ± ۹ مرکز $(۱۱، ۱۱)$ ۔

منحنی کی ایک شاخ دونوں متقاربوں کے اسی طرف واقع ہے جس طرف کہ مبدا ہے۔ ولا پر مقطوعے ± ۱۷۷ اور و ما پر ± ۱۷۷ منحنی نقاط $(۱۷۷، ۱)$ ، $(۱۷۷، ۱)$ ، $(۲، ۱۷۷)$ ، $(۲، ۱۷۷)$ ، $(۲، ۱۷۷)$ ، $(۲، ۱۷۷)$ میں سے گذرتا ہے۔

۱۲۔ دو خطوط مستقیم ۴ لا + ۵ ما = ۷ لا + ۲ ما = ۵ + ۳ = ۵۔ جو ایک

ایک دوسرے کے نقطہ $(\frac{2}{11}, \frac{14}{11})$ پر قطع کرتے ہیں۔ ولا پر مقطوع

$$= \frac{5}{4}, \frac{5}{3} \text{ اور و ما پر } = \frac{5}{3}, \frac{5}{5}$$

۱۳۔ مکانی محور لا + ۱ = ۱، رأس پرکاماس ۳ ما + ۲ = ۲، وتر خاص

= ۳، منحنی اور مبدأ رأس پر کے حماس کی متقابل جانبوں میں واقع ہیں۔

ولا پر مقطوع خیالی ہیں اور و ما پر = ۱، منحنی نقاط $(2, -3)$ ،

$(1, -2)$ میں سے گذرتا ہے۔

۱۴۔ مکانی محور ۲ لا + ۳ ما = ۱۴، رأس پرکاماس ۳ لا + ۲ ما = ۲۸،

وتر خاص = ۴۵، منحنی اور مبدأ رأس پر کے حماس کے ایک ہی جانب

واقع ہیں، ولا پر مقطوع = ۱۸، ۱۳، و ما پر = ۳۳، منحنی

نقاط $(1, -1)$ ، $(1, -33)$ ، $(2, -18)$ ، $(2, -13)$ میں سے

گذرتا ہے۔

۱۵۔ زائید مرکز $(-1, -1)$ اور محور ۲ لا + ۱۱ ما = ۱۱، ۱۲ لا + ۱۱ ما = ۱۱،

نیم قاطع محور = ۷، نیم مزدوج محور = ۱۲، متقارب ہیں ما = ۱،

ولا پر مقطوع = ۲، و ما پر = ۱۱، ۱۲، منحنی نقاط

$(1, -1)$ ، $(2, -11)$ ، $(1, -12)$ ، $(2, -11)$ میں سے گذرتا ہے۔

۱۶۔ زائید مرکز $(1, 1)$ ، محور ۲ لا + ۱ = ۱، لا + ۲ ما = ۳،

نیم قاطع محور کا طول = ۲، نیم مزدوج محور کا طول = ۱، متقارب ہیں

۸ لا + ۳ ما = ۳، لا + ۱ = ۱، ولا پر مقطوع خیالی ہیں

اور و ما پر = ۵، ۳۳، منحنی نقاط $(1, 1)$ ، $(1, 12)$ ، $(1, 3)$

$(2, 19)$ ، $(2, 3)$ ، $(1, 39)$ ، $(1, 3)$ میں سے گذرتا ہے۔

۱۔ مکانی جس کا محور $2 + 4 = 6$ ہے اور اس پر کا ماس $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ،
 وتر خاص 4 ، منحنی اس پر کے ماس کے اس جانب واقع ہے جس جانب

کہ سبائے - ولا پر موقوفے = $\frac{1}{4}$ و سائرے = $\frac{3}{4}$

۱۸- زائد متقارب ۳-۵-۱۲-۱۳-۹=۶ مرکز $(\frac{26}{11}, \frac{26}{11})$

مبدأ اور منفی مقادروں کے ایک ہی زاویہ میں واقع ہیں۔ ولا پر منقطع ہیں

۱۲۔ اور و ما پیر ۱۵، مخفی نقاط (۲، ۲۱۶۹)، (۲، ۱۲۷۷)، (۲، ۲۱۶۹) میں سے گذرتا ہے۔

۱۹۔ دو خطوط مستقیم لا۔ ۱+۱=۲، ۱+۱+۱=۳۔ جو ایک دوسرے کو نقطہ (۲، ۱) پر قطع کرتے ہیں۔

۲۔ مکانی محور ۲-۹-۳+۴=۰، رأس پر کاماس ۳+۹+۶+۱۶=۳۸ وتر خاص = $\frac{1}{13}$ ، منحنی رأس پر کے کام کے مبداء والی جانب

۲۱۔ دائرہ مرکز (۵-۳) اور نصف قطر = ۶، ولایہ مقبوعہ

[illegible][illegible]

- ۲۳۔ دو متوازی خطوط مستقیم ۲-لا-۳-۳۱، ۳-۳۱-۲-لا-۳-۳۱=۱۱۔
 ولا پر مقطوعے = ۱، ۱، ۱، ۱ اور و ما پر = ۱، ۱، ۱، ۱
 ۲۴۔ مکانی، محور ۳-لا-۳-۳۱، رأس پر کما ماس ۸-لا-۹-۱۱، وتر خاص = ۳، منحنی رأس پر کے ماس کے مبدأ والی جانب واقع ہے۔
 ولا پر مقطوعے میں ۲۵۶۹-۱۵۵۸، و ما پر = ۲۵۶۹-۱۵۵۸
 منحنی نقاط (۱، ۱، ۱، ۱)، (۱، ۱، ۱، ۱)، (۱، ۱، ۱، ۱)، (۱، ۱، ۱، ۱)
 (۱، ۱، ۱، ۱)، (۱، ۱، ۱، ۱) میں سے گذرتا ہے۔
 ۲۵۔ دو خطوط مستقیم ۵-لا-۳-۳۱، ۳-۳۱-۲-لا-۳-۳۱=۱۱۔ جو ایک دوسرے
 کو نقطہ (۱، ۱) پر قطع کرتے ہیں۔ ولا پر مقطوعے ہیں ۱، ۱، ۱، ۱
 اور و ما پر = ۱، ۱، ۱، ۱
 ۲۶۔ دو خیالی متوازی خطوط مستقیم ۲-لا-۳-۳۱، ۳-۳۱-۲-لا-۳-۳۱=۱۱
 ۲۷۔ ناقص مرکز (۱، ۱) محور ۲-لا-۳-۳۱، ۳-۳۱-۲-لا-۳-۳۱=۱۱
 نیم محوروں کے طول = ۱، ۱، ولا پر مقطوعے = ۱، ۱، ۱، ۱ اور و ما پر
 = ۱، ۱، ۱، ۱
 ۲۸۔ قائم زائد، متقارب ۲-لا-۳-۳۱، ۳-۳۱-۲-لا-۳-۳۱=۱۱، مرکز (۱، ۱)
 محور ۳-لا-۳-۳۱، ۳-۳۱-۲-لا-۳-۳۱=۱۱، نیم محوروں کے طول = ۱، ۱
 ولا پر مقطوعے خیالی، و ما پر = ۱، ۱، ۱، ۱، منحنی نقاط
 (۱، ۱، ۱، ۱)، (۱، ۱، ۱، ۱)، (۱، ۱، ۱، ۱)، (۱، ۱، ۱، ۱)
 (۱، ۱، ۱، ۱)، (۱، ۱، ۱، ۱) میں سے گذرتا ہے۔
 ۲۹۔ مکانی، محور ۳-لا-۳-۳۱، رأس پر کما ماس ۹-لا-۱۱-۱۱=۱۱
 وتر خاص = ۱، منحنی اور مبدأ رأس پر کے ماس کی متقابل
 جانبوں میں واقع ہیں۔ ولا اور و ما پر مقطوعے خیالی ہیں، منحنی نقاط

(۱-۱۹) (۱-۵۲) (۲-۱۵۹۵) (۲-۱۰۳) میں سے گذرتا ہے۔

۳۸۔ دو متوازی خطوط مستقیم لا + ۶۲ = ۱ + ۶۲ = ۶۳ لا + ۶۲ = ۱۲۴ = ۶۳ لا پر

مقطوع = ۱ - ۲ اور و ما پر مقطوع = $\frac{1}{2}$ - ۱

۳۱۔ قائم زائد مرکز مبدا، محور ۱۵ لا + ۱۸ = ۸ لا - ۱۵ = ۱۸

نصف محوروں کا طول = ۱، متقارب ہیں ما = $\frac{23}{2}$ لا = ۶ = $\frac{2}{23}$ لا

ولا پر مقطوع خیالی ہیں، و ما پر = ۱، ۳۳ ± ۱، منحنی نقاط (۱، ۳۳) (۳، ۳۳)

(۱-۳۳) (۱-۴۵) (۱-۴۵) (۱-۴۵) میں سے گذرتا ہے۔

۳۲۔ زائد مرکز (۱-۲) محور ۳ لا + ۶۲ = ۶ لا - ۳ = ۳ = ۶

نیم قاطع محور = ۱، نیم مزدوج محور = ۲، متقارب ہیں ۶ لا - ۳ = ۱ = ۶

لا - ۱۵ = ۱۵ = ۱۵ لا پر مقطوع = ۱۵، ۳۳ - ۱۵ = ۳۳

و ما پر = ۳۵، ۲۵۴، منحنی نقاط (۱، ۲۵۱۹) (۱، ۱۵۹۴)

(۱-۳۱۲) (۱-۴۲) (۱-۴۲) (۲-۳۳۵) (۲-۲) (۲-۱۵۲)

(۳-۵۹۳) (۳-۱۵۸۱) میں سے گذرتا ہے۔

۳۳۔ ناقص مرکز (۳۱۲) - ۲ - ۲ - ۳۱۲ یعنی (۱۵۹۶) - ۱۵۹۶

محور لا + ۳۱۲ = ۶ + ۳۱۲ لا - ۱۵ = ۸ = ۸، نصف محور = ۵ اور ۳

ولا پر مقطوع خیالی، و ما پر = ۶، ۹۱ - ۶، ۹۹، منحنی نقاط

(۲-۱۲۹۳) (۲-۱۶۵) (۱-۶۱۱) (۱-۱۲۱۲)

(۲-۱۲۹) (۲-۱۳۴) (۳-۸۲۱) (۳-۲۳۳)

(۶-۱۵۵) (۶-۱۳۴) میں سے گذرتا ہے۔

۳۴۔ ناقص مرکز (۱، ۱) محور لا - ۳۱۲ + (۱-۳۱۲) = ۳۱۲ لا + ۱

(۱+۳۱۲) = ۱، نصف محوروں کے طول = ۳۱۲، ولا پر مقطوع = ۳۱۲

۱۱، ۲ اور و ما پر مقطوع = ۲۰۲ - ۱۳۱ -

۳۵۔ ناقص مرکز (۳، ۸) محور ۲۲۴ لا - ۱۵۳۱۲ = ۱۵۳۱۲ اور

$$15 - \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = 0$$

$$3 - (3 - 2 + 1) + (3 - 2 + 1) + (3 - 2 + 1) + (3 - 2 + 1) = 12$$

۱۸ - (۱) خط مستقیم (۲) مخروطی تراش

$$19 - \text{داخله} \quad 2: 13 \quad 2: 20 \quad 2: 20 \quad 2: 20$$

$$21 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$22 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$25 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$26 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$27 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$29 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$30 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$31 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$33 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

(ب) ۳ لا + ۲ لا + ۸ لا + ۸ لا + ۱۳ لا + ۵۱۲ لا + ۸۴۳ لا + ۹۶۴ لا = ۹۶۴

$$34 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$36 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$38 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$39 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$40 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$41 - 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3 \quad 2: 3$$

$$\sqrt{3+2\sqrt{1}} = 2 \quad \sqrt{3+2\sqrt{1}} = 2$$

۴۴- $\omega_m + \omega_l + \omega_g = \omega$

$$1990 - 6 \text{ yr} (r) \text{ vs } 6 \text{ yr} (r) \quad 1991 - 6 \text{ yr} - (1) = 5.$$

۵۳۔ لاجم طہ + ماجب طہ = ۱ (۱ + ججم طہ)

$$(1 - \frac{1}{4}) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\psi' = \psi - i - 54 \quad \overline{\psi} \frac{1}{r}(r, i) = 54$$

$$\overline{\sigma}_r = \frac{1}{2} \sigma - \sigma_n$$

۵۸۔ سن ۱۳۵۲ھ میں جب وہ عرب تو دو عمومی لباس نہیں پہنچ سکتے۔

$$d(2 + \frac{q}{n} + \frac{n}{q}) = 1 - 42$$

$$\frac{16}{16+16} \cdot \frac{16}{16+16} = 15$$

$$\left(r - \frac{10}{r}\right)^2 = 9 + 6r - 2r - 48$$

٤٥ - لا مس عه - با + ٢ ولا (مس عه + ٢) + لا مس عه -

باب سیزدهم

(صفحات ۲۲۸-۲۵۸)

$$= 1 + 6 + 9r(r) = r + 6 + 9r(1) = 1$$

$$-9 = (1 + m + m^2) + m + m^2 = -12 \quad -12 = m^2 + m + m^2 =$$

$$۱۶ - ۱ = \frac{ب لا}{۱}$$

$$۱۹ - ج ن = ۵۱، عمود = \frac{۱۰۷}{۱۱}، جب سہ = \frac{۷}{۲۱}$$

$$۲۰ - ۲۱ \pm ۳۱ \pm ۲۱$$

$$۲۲ - ۱۸، ۲۵، ۲۵$$

$$۲۳ - ۹۲، ۳۱، ۱۱۶۲$$

$$۲۵ - \frac{۱}{۱} لا - ۱ + ۱ = ۱، ۳ لا - ۱ + ۱ = ۲، ۲ لا + ۲ ص لا + ۱ + ۱ = ۱$$

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱۱$$

$$۲۶ - ۲ لا + ۱ لا - ۱ + ۱ + ۱ = \frac{۱}{۱} + ۱ + ۱ + ۱ = ۱، ۲ لا + ۱ لا - ۱ + ۱ + ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱$$

$$۲۸ - ۳ لا + ۱ لا = ۳۱ - ۱۵۲، ۵۶$$

$$۳۲ - ج ن = ۲۱، ج ق = \frac{۱}{۱۱}، جب ۱ = \left(\frac{۱}{۲۱}\right)$$

$$۳۳ - ۱ = \frac{۳}{۲}، \left(\frac{۳}{۲}\right) = ۳۴ - ۱ = ۱، \left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱$$

$$۳۶ - ۲ لا + ۱ لا + ۱ = ۲$$

$$۳۸ - لا + ۱ لا + ۲ لا + ۱ لا + ۱ لا + ۱ لا = ج = ۱$$

$$۴۰ - واجب طہ (الاجب طہ - باجم طہ) / (واجب طہ + باجم طہ)$$

$$- باجم طہ (الاجب طہ - باجم طہ) / (واجب طہ + باجم طہ)$$

$$۴۱ - ۹ لا + ۱ لا + ۱ لا = ۴۲ - لا + ۱ لا + ۱ لا = ۱$$

$$۴۵ - لا + ۱ لا = ۴۶ - لا + ۱ لا = ۱$$

$$۴۷ - لا + ۱ لا + ۱ لا + ۱ لا = ۴۸ - لا + ۱ لا + ۱ لا + ۱ لا = ۱$$

۴۸ - لا + ۱ لا + ۱ لا + ۱ لا + ۱ لا = ۱، شرط ہے باجم طہ = ۱ ج
 ان تمام خطوط کی جو معلومہ متوازی خطوط مستقیم کو ملائیں ایک ایسا خط نصف
 کرتا ہے جو ان معلومہ خطوط کے متوازی ہوا اور ان کے عین درمیان میں

$$۲۴- \text{وگ} / (\text{و-ب}) \pm \text{ب} / (\text{و-ب}) - \text{وگ} / (\text{و-ب})$$

$$۲۵- \text{لا} (۱ - \frac{۲}{۳}) \text{ما} (۱ - \frac{۲}{۳}) - ۲۶ - ۱۴۴$$

$$۲۷- \text{ما} = ۴ (۱ - \text{لا})$$

$$۲۹- (۱) \text{محدود مقدار} = \text{صفر}، \text{ایسا خط دائرہ لا} + \text{ما} = \text{وگ کا عاؤ نہیں ہو سکتا۔}$$

$$۳۰- \frac{\text{و}}{\text{ب}} - \frac{\text{ب}}{\text{ما}} = (\text{و} + \text{ب}) - ۳۱ - \text{ما} = ۱ (۱ - \text{لا})$$

$$۳۳- \text{ما} = ۱ (۱ - \text{لا})$$

پرچہ امتحان ۴ (صفحہ ۲۷۴)

$$۱- \text{لا} (\frac{۱}{۲} \text{م ق} - \text{گ}) + (\frac{۱}{۲} \text{م ن} + \text{بق} + \text{ن}) - \text{گ ن} + \text{ق}$$

$$- \text{ج} =$$

$$۳- \text{لا} - \text{ما} + ۶ + \text{لا} + \text{و} = ۳ - ۱۰ + ۶ + ۲۵ =$$

$$۵- ۳ \text{لا} - ۳ \text{لا} + ۶ + ۲ - ۳ = ۴ =$$

باب پانزدہم

(صفحات ۲۷۶-۲۹۸)

$$۱- \text{لا} + ۶ - ۲ = ۲ - ۱۴ + ۱۰ + ۱۷ = ۳ - \text{گ لا} + \text{ن} + \text{ج} =$$

$$۵- \text{عار} - ۱۱ - \frac{۹}{۲} - \frac{۱۵}{۲} - ۱۲ - \frac{۱}{۲}$$

$$۱۳- - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} - ۱۷ - \text{بیل} - ۲ \text{م ل م} + \text{ل م} = \text{ل ب} - \text{م}$$

- ۱۸ - لا - ما = ۱
 ۱۹ - لا ۳ + ما ۳ + ۵ = لا ۴ + ما ۵ + ۲ = لا ۲ + ما ۲
 لا (۱ + ۲ + ۳ + گ) + ما (۲ + ۳ + ب) + گ =
 ۲۰ - (اُل - بام) (ا - ۱/۲) (۲/۳ - ۱/۲) (۲/۳ - ۱/۲) (۲/۳ - ۱/۲)
 ۲۱ - اُل ل - بام م = ا ل + ل + ۲ و م م = ۲ ج (ل م + ل م) =
 ۳۰ - ع قط عہ ۲ و مس عہ ۳۱ - سمت معلومہ کا مزدوج قطر
 ۳۳ - ما ۲ = لا ۲ - لا ۳ - لا ۴ = ما ۴
 ۳۶ - ف - ف - گ ، لا - ما = ل - لا - م ما
 ۳۹ - بنیادی محور [اس خط کو محور ما مانو، تب دائروں کی مساواتیں ہونگی
 لا + ما + گ لا + ج = اور لا + ما + گ لا + ج = ۰]

باب شانزدہم

(صفحات ۲۹۹ - ۳۳۳)

- ۱ - (۱ - ما) = (۱ - لا) ۱ - ۲ - (لا - ج) + (ما - ج) = ۱
 ۴ - (۱) ۵ = وغیرہ (۲) جب ب = جم ۳ ز، وغیرہ
 ۷ - (۱) (۲) (۳) (۴) (۱ - ۱/۲) (۱ - ۱/۳) (۱ - ۱/۴) (۱ - ۱/۵) ۸ - ۱
 ۹ - ۱/۲، ۱/۳، ۱/۴، ۱/۵ - ۱۰ - (م + م) - ما - لا ۲ = لا ۲ + م م م
 ۱۳ - وگ = لا ۲ + لا ۲ - ۱۴ - (۲ + م) - (۲ + م) - م
 ۱۵ - م = ۲، ۱ - ۳

$$۲۳ - \frac{لا(۱-۳)}{ب} + \frac{لا(۱+۳)}{ب} = \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = \frac{۲لا}{ب} = ۲$$

$$۳۴ - \text{محوروں کے سرے} \quad ۳۸ - \{ \pm ۱ \pm \sqrt{۱-۴} \} / ۲ = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$۴۲ - \text{ما} = ۲ \text{ لا} = (۱+لا) \text{ مس} = ۴۹ - ۲(۱+لا) = (۱-لا) \text{ ما}$$

$$۵۲ - \frac{لا}{ب} + \frac{لا}{ب} = ۱$$

$$۵۹ - لا + ۲ \text{ تم} (عہ - ب) = ۱ \quad \text{ما} - ۲ \text{ تم} (عہ - ب) = ۱$$

$$۶۳ - (۱-لا) \text{ ما} (ب-لا) + (۱+لا) \text{ ما} (ب+لا) = ۱$$

باب ہفتم

(صفحات ۳۳۴-۳۵۰)

$$۵ - \frac{۳}{۴} \text{ یا } \frac{۱}{۴} \quad ۱۱ - \text{دائرہ} \quad ۱۴ - لا = \frac{لا}{ب} = \frac{لا}{ب} = \frac{لا}{ب}$$

۱۷ - وتر خاص اور کوئی دو ماسکی وتر جو اس سے مساوی زاوے بنائیں۔

$$۲۰ - (۱-لا) \text{ ز} + ۱ \text{ ب} = ۱ \quad ۲۳ - \text{رحیم طہ} = ۳ \text{ لا} \quad \text{خط مستقیم جو محور پر عمود ہے۔}$$

آزمائشی پرچہ ۵ (صفحہ ۳۵۰)

$$۳ - \left(\frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴} \right)$$

باب ہشتم

(صفحات ۳۵۲-۳۷۹)

$$۴ - ۲ لا + ۳ لا + ما = ۴ = ۵ - ج س - ج س = ۰$$

$$۷- ۳ لا + ۲ لا م + ۳ لا = ۳$$

$$۸- ۱۷ لا + ۲۶ لا م + ۱۷ لا م^۲ - ۶۰ لا - ۶۰ م + ۶۰ = ۰$$

$$۱۴- ۳ لا - لا م - ۵ م + لا + م + ۱ = ۰$$

$$۱۵- ۵ لا - لا م - ۶ م + ۶ م + ۹ لا - ۶ م = ۰$$

$$۲۰- لا + لا م = \sqrt{۸ لا + (۱۷ لا + ۲۶ لا م - ۱۷ لا م^۲ - ۶۰ لا - ۶۰ م + ۶۰)}$$

$$۲۴- ۲ لا - لا م + لا م^۲ - لا م - ۳ م = ۰ \quad ۲۵- لا (لا - م - ۱) = ۰$$

$$۲۶- (ع - ج) (ج - ل) / ع - ج - ل$$

$$۳۱- \frac{لا^۲}{ج م} - \frac{لا}{ج م} = ۱ \quad ۳۲- ۵ (لا - م) = ۱$$

$$۳۵- \frac{۱}{لا - ۲} + \frac{ب}{۱ + م} + \frac{ج}{لا + م} = ۰$$

$$۳۶- لا + م - لا م - ۳ لا + ۳ م + ۳ = ۰$$

$$۳۷- \text{دائرہ لا + م = لا + ب جہاں لا + ب ناقص کے نیم محوریں}$$

$$۳۸- \frac{ن}{ک م} ، \frac{م}{ک م} - \frac{ن}{ک م}$$

$$۵۱- لا = \frac{۱}{۲} \pm \frac{۱}{۲} \quad ۵۲- لا = \frac{۱}{۲} \pm \frac{۱}{۲} \quad ۵۳- لا = \frac{۱}{۲} \pm \frac{۱}{۲}$$

$$۵۶- \text{دفعہ ۲۳ استعمال کرو۔}$$

$$۵۷- لا + ف لا م - لا م = لا + ب جہاں ف کوئی مستقل ہے۔$$

$$۵۹- ۱ = \frac{ع}{ب} \pm \frac{ع}{ب}$$

$$۶۲- (\text{استعمال کرو ع} = لا ج م + ب ج م) \quad ۶۳- لا + م = ۱$$

$$\text{جہاں م دائرہ کا نصف قطر ہے۔}$$

$$۶۳ - \frac{لا}{رجم\text{ طہ}} + \frac{با}{ب\text{ جب طہ}} = ۱$$

باب نوزدہم

صفحات (۳۸۰-۳۹۶)

$$\begin{aligned} ۲ - \frac{۱}{اب} &= \text{محدودوں کے محوروں پر} \quad ۳ - با + ۱۶ لا = ۰ \\ ۷ - با + ۴ لا = ۴ & \quad ۸ - (لا - لا - با) = ۴ \quad ۹ - با = ۴ \\ ۱۲ - (لا + با - ج) = ۱۲ & \quad ۱۳ - (با - ۲ ب) = ۰ \quad \text{جہاں ب دائرہ کا نصف قطر ہے۔} \\ ۱۴ - \frac{لا}{ب} + \frac{با}{ب} = \frac{۱}{۸} & \quad ۱۵ - (لا - ب) + (با - ج) = ۲ \\ ۲۲ - \frac{لا}{(با + ۱)} + \frac{با}{(لا + ۱)} &= ۱ \end{aligned}$$

باب بستم

صفحات (۳۹۷-۴۲۲)

$$\begin{aligned} ۲ - \text{پہلا اور دوسرا نقطہ موسیقی ہیں تیسرے اور چوتھے کے ساتھ} \\ ۳ - \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \frac{۵}{۶}, \frac{۶}{۷}, \frac{۷}{۸}, \frac{۸}{۹}, \frac{۹}{۱۰}, \frac{۱۰}{۱۱}, \frac{۱۱}{۱۲}, \frac{۱۲}{۱۳}, \frac{۱۳}{۱۴}, \frac{۱۴}{۱۵}, \frac{۱۵}{۱۶}, \frac{۱۶}{۱۷}, \frac{۱۷}{۱۸}, \frac{۱۸}{۱۹}, \frac{۱۹}{۲۰} \\ ۸ - \frac{۱}{۱۰} \\ ۱۰ - لا + لا + ۱۱ = ۰ \quad یا \quad لا = \frac{۱}{۱۰} (-۱۱ \pm ۱۰) \\ ۱۹ - ۴ = ۲۳ - ۴ = ۱۹ \\ ۲۳ - ۴ = ۱۹ \end{aligned}$$

- ۲۹۔ $ل = ب$ ۳۸۔ مشق ۳۶ کی خاص صورت
 ۳۹۔ اگر $ن$ ، $ق$ قطر کے سرے ہوں تو $ل$ ، $ن$ ، $ل$ ، $ق$ کے زاویوں کی
 تقصیف کرتے ہیں۔
 ۴۰۔ قطبی محدودوں میں بدلو اور ور کو $ون$ ، $وق$ ، $وس$ کی قوم
 میں معلوم کرو۔

آزمائشی پرچہ ۶ (صفحہ ۴۲۲)

- ۲۔ $ل + ل + ب + م + ۲$ لا $ما + ۲$ ف $ما + ج =$ اور $گ لا = ف$ ما
 کے نقاط تقاطع
 ۳۔ $ل + م + ۲ - لا - ۲ = ۴ + ۳ = ۷$ ۔ $لا = م + ج$
 ۷۔ $۲ (لا - ل) = ۲$ $لا = ۲$

باب بست ویکم

(صفحات ۴۲۵-۴۳۳)

- ۵۔ $\frac{1}{4}$
 ۶۔ طریق مطلوب ایک دائرہ ہے جو $ف$ کے قطر پر بنایا جائے
 جہاں $ف$ ، $ف$ مطابق دفعہ ۲۸۷ متعین کئے گئے ہیں۔ نقطہ $و$
 ایسے کسی دو دائروں کے بنیادی محور پر واقع ہے جو $ل$ ، $و$ ، $ب$ میں
 سے کھینچے جائیں۔

پرچہ سوالات ۱ (صفحہ ۴۳۴)

- ۱۔ $\frac{(ل - م) ق - ل م م - م (ل - ف) - ل م ق - ل ن}{ل + م}$

$$۱۰۔ ۵ لا \pm ۶ با - ۶ با' = ۱ = \pm با (۱ - \frac{۶ با}{۵})$$

پرچہ سوالات ۴ (صفحہ ۴۳۹)

$$۱۔ (۵ - \frac{۳ پ}{۵}) لا - ۸ لا ما + (۵ - \frac{۱۲ پ}{۵}) ما' = ۱ = ۲ با یا \frac{۱}{۲} ب$$

۱۰۔ ایک ضلع کو محور لا مانو، ثلث کے رأس کو مبدأ، تب طریق ہوگا
لا (۴ + ن جم عہ) + ۵ ن جب عہ = \frac{۱}{۲} ج

پرچہ سوالات ۵ (صفحہ ۴۴۰)

$$۱۔ \frac{۱۲ ج - ۲ با}{ج} = ۲ - لا ما - ۵ د لا + \frac{(۵ د جم عہ + ۲ ما)}{ج ب عہ} = ۲ د -$$

$$۲۔ لا ما' = \frac{۱۲ پ}{۵ + پ} - ۶ - ب لاجب ج - ۱۰ ا جم ج - جہاں ج مستقل ہے$$

$$۸۔ ۷ لا + ۷ ما' - ۴ لا - ۱۵ ما + ۳۲ =$$

۹۔ دے ہوئے نقطہ کو مبدأ مانو، دائرہ اگر لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ن ما + ج =

ہو تو نفاذ ہوگا لا (۲ ج - ۲ ن) + ۲ گ لا + ما (۲ ج - ۲ گ) + ج گ لا + ج ن ما + ج =

$$۱۰۔ ما' - ۳ لا ما + ۲۲ لا =$$

پرچہ سوالات ۶ (صفحہ ۴۴۲)

۱۔ ا ب کو محور لا اور ا ب کے نقطہ تقصیف کو مبدأ مانو، اس طرح ج کا طریق ہوگا ۸ لا + ۳ ج لا - ما' =

$$۲۔ \frac{۱}{۲} (۱۱ - ۳۷ - ۵) ج - ۳ - لا + ب ما + لا ب عہ =$$

فہرست اصطلاحات

Abridged notation	مختصر ترمیم
Abscissa	فصلہ
Anharmonic ratio	غیر موسیقی نسبت
Asymptotes	متقارب
Auxiliary circle	امدادی یا معاون دائرہ
Axis	محور
Cartesian (Coordinates)	کارٹیزی (محدود)
Complete quadrilateral	مکمل ذواربعمہ الاصلع
Concurrency	تقارن
Confocal conics	ہم ماسک مخروطی تراشیں
Conjugate diameters	مزدوج قطر
Coordinates	محدود
Corresponding Points	متناظر نقطے
Cross ratio	چھپی نسبت
Director Circle	مرتب دائرہ
Directrix	مرتب
Eccentricity	خروج المرکز
Ellipse	قطع ناقص
Envelope	لغاف
Equilateral hyperbola	قائم الزاویہ
Focus	ماسک
Harmonic Conjugates	موسیقی مزدوج

Hyperbola	قطع زائد
Infinity	لاتناہی
Invariants	غیر متغیر
Inversion	تقلیب
Involution	برہنج
Latus rectum	وتر خاص
Limiting Points	انتہائی نقطے
Major axis	محور اعظم
Minor axis	محور اصغر
Normal	عمود
Notation	ترقیم طریق کتابت
Oblique axes	مائل محور
Ordinate	معیّن
Parabola	قطع مکانی
Parameter	مبدل
Pencil	پنسل
Perpendicular	عمود
Polar Coordinates	قطبی محاورہ
Projection	تظلیل
Quadrilateral	دو اربع الاضلاع
Radical axis	بنیادی محور
Radius Vector	سمتی نیم قطر
Tangent	ماس
Ultimate intersections	انتہائی تقاطع
Vectorial angle	سمتی زاویہ

